G. N. Berman

Problemas y ejercicios de análisis matemático

ИЗДАТЕЛЬСТВО · МИР ·

Г. Н. БЕРМАН

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО КУРСУ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»

G. N. BERMAN

Problemas y ejercicios de análisis matemático

EDITORIAL MIR
MOSCÚ

Traducido del ruso por N. N. Serdiukova

На испанском языке

Impreso en la URSS. 1977

Prefacio

El presente libro de «Problemas y ejercicios de análisis matemático» se destina a los alumnos de ingeniería que estudian el análisis matemático, de acuerdo con los programas correspondientes, en escuelas técnicas superiores.

Contiene diversos ejercicios que en su mayor parte tienen por objeto controlar y profundizar el nivel de conocimientos que hayan adquirido los alumnos en el análisis matemático. En el manual no se dan explicaciones teóricas ni fórmulas. Se estima que el lector las encontrará en cualquier manual de análisis matemático. Para un conjunto de problemas y ejercicios análogos por su contenido se dan indicaciones instructivas, comunes para ellos.

Los problemas y ejercicios para cuya solución es necesario conocer las leyes de física van precedidos de la correspondiente información. En los más difíciles (señalados por un asterisco [*]) se dan sugerencias para su solución, que aparecen en la parte de «Respuestas a los ejercicios».

Esta es la traducción al español de una de las últimas variantes del manual escrito por los siguientes autores:

I. G. Aramanóvich, G. N. Berman, A. F. Bermant,
B. A. Kordemski, R. I. Pozoiski, M. G. Shestopal.

B. A. Kordemski
11 de septiembre de 1976

Indice

Capítulo I

Función

§ 1. Nociones elementales sobre la función

Funciones y formas de su expresión

1. La suma de los ángulos interiores de un polígono convexo plano es función del número de sus lados. Expresar analíticamente esta función. ¿Qué valores puede tomar el argumento?

2. La función y de x está dada en la siguiente tabla:

Variable independiente x	0	0,5		1	1,5	2	3
Función y	−1,5	−1		0	3,2	2,6	0
Variable independiente x	4	5	6	7	8	9	10
Función y	−1,8	−2,8	0	1,1	1,4	1,9	2,4

Construir su gráfica, uniendo los puntos con una línea «suave». Siguiendo la gráfica y determinando los valores de la función para $x = 2{,}5;\ 3{,}5;\ 4{,}5;\ 5{,}5;\ 6{,}5;\ 7{,}5;\ 8{,}5;\ 9{,}5$, hacer la tabla «más completa».

3. La función viene expresada por la gráfica representada en la fig. 1. Pasar el dibujo al papel milimetrado, elegir la escala y unos

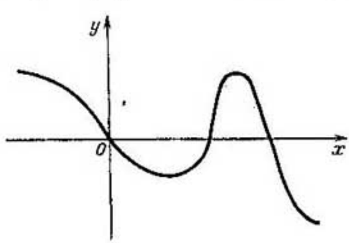

Fig. 1

cuantos valores de la variable independiente. Después de leer en el dibujo los valores de la función, correspondientes a los valores elegidos de la variable independiente, formar la tabla de dichos valores.

4. La función viene dada por la gráfica representada en la fig. 2. Ateniéndose a la gráfica contestar a las siguientes preguntas:

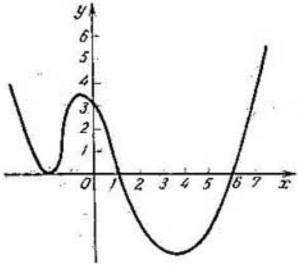

Fig. 2

a) ¿Qué valores de la variable independiente hacen que la función se anule?

b) ¿Cuáles deben ser los valores de la variable independiente para que la función sea positiva?

c) ¿Cuáles deben ser los valores de la variable independiente para que la función sea nagativa?

5. La fórmula de la ley de Coulomb expresa la relación de dependencia que existe entre la fuerza F de interacción de dos cargas eléctricas e_1 y e_2, por una parte, y la distancia r que media entre ellas, por otra:

$$F=\frac{e_1\cdot e_2}{\varepsilon\cdot r^2}$$

Poniendo $e_1=e_2=1$ y $\varepsilon=1$ formar la tabla de los valores de la función dada para $r=1, 2, 3, \ldots, 10$ y construir su gráfica uniendo los puntos con una línea «suave».

6. Escribir la función que exprese la dependencia entre el radio r de un cilindro y su altura h siendo el volumen dado $V=1$. Calcular los valores de r, teniendo h los siguientes valores: 0,5; 1; 1,5; 2; 2,5; 3; 3,5; 4; 4,5; 5. Construir la gráfica de la función.

7. Expresar el área de un trapecio isósceles de bases a y b como función del ángulo α de base a. Construir la gráfica de la función para $a=2$, $b=1$.

8. Expresar la dependencia entre la longitud b de un cateto de un triángulo rectángulo y la longitud a de otro cateto, siendo la hipotenusa constante e igual a $c=5$. Construir la gráfica de esta función.

9. Dadas las funciones

a) $f(x)=\frac{x-2}{x+1}$; b) $\varphi(x)=\frac{|x-2|}{x+1}$,

hallar: $f(0)$; $f(1)$; $f(2)$; $f(-2)$; $f\left(-\frac{1}{2}\right)$; $f(\sqrt{2})$; $\left|f\left(\frac{1}{2}\right)\right|$; $\varphi(0)$; $\varphi(1)$; $\varphi(2)$; $\varphi(-2)$; $\varphi(4)$. ¿Existen $f(-1)$, $\varphi(-1)$?

10. Dada la función $f(u)=u^3-1$, hallar $f(1)$; $f(a)$; $f(a+1)$; $f(a-1)$; $2f(2a)$.

11. Dadas las funciones $F(z)=2^{z-2}$ y $\varphi(z)=2^{|z|-2}$, hallar $F(0)$; $F(2)$; $F(3)$; $F(-1)$; $F(2{,}5)$; $F(-1{,}5)$ y $\varphi(0)$; $\varphi(2)$; $\varphi(-1)$; $\varphi(x)$; $\varphi(-1)+F(1)$.

12. Dada la función $\psi(t)=t\cdot a^t$, hallar $\psi(0)$; $\psi(1)$; $\psi(-1)$; $\psi\left(\frac{1}{a}\right)$; $\psi(a)$; $\psi(-a)$.

13. $\varphi(t)=t^3+1$. Hallar $\varphi(t^2)$ y $[\varphi(t)]^2$.

14. $F(x)=x^4-2x^2+5$. Demostrar que $F(a)=F(-a)$.

15. $\Phi(z)=z^3-5z$. Demostrar que $\Phi(-z)=-\Phi(z)$.

16. $f(t)=2t^2+\frac{2}{t^2}+\frac{5}{t}+5t$. Demonstrar que $f(t)=f\left(\frac{1}{t}\right)$.

17. $f(x)=\operatorname{sen} x-\cos x$. Demostrar que $f(1)>0$.

18. $\psi(x)=\lg x$. Demostrar que $\psi(x)+\psi(x+1)=\psi[x(x+1)]$.

19. $F(z)=a^z$. 1) Demostrar que para cualquier valor de z es válida la siguiente relación

$$F(-z)\cdot F(z)-1=0.$$

2) Demostrar que

$$F(x)\cdot F(y)=F(x+y).$$

20. Dados la gráfica de la función $y=f(x)$ y los valores a y b de la variable independiente x (véase la fig. 3), construir $f(a)$

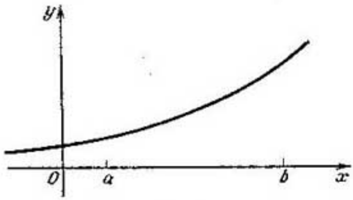

Fig. 3

y $f(b)$ en el dibujo. ¿Cuál es la interpretación geométrica de la relación

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}?$$

21. Mostrar que si cualquier cuerda de la gráfica de la función $y = f(x)$ está por encima del arco que aquélla subtiende, se verifica la desigualdad

$$\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} > f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$$

para todas las $x_1 \neq x_2$.

22. Dada la función $f(x) = x^2 - 2x + 3$, hallar todas las raíces de la ecuación a) $f(x) = f(0)$; *b)* $f(x) = f(-1)$.

23. Dada la función $f(x) = 2x^3 - 5x^2 - 23x$, hallar todas las raíces de la ecuación $f(x) = f(-2)$.

24. Dada la función $f(x)$, hallar por lo menos una raíz de la ecuación $f(x) = f(a)$.

25. Señalar dos raíces de la ecuación $f(x) = f\left(\frac{x+8}{x-1}\right)$, si es sabido que la función $f(x)$ está definida en el intervalo $[-5, 5]$. Hallar todas las raíces de la ecuación dada siendo $f(x) = x^2 - 12x + 3$.

26. $F(x) = x^2 + 6$; $\varphi(x) = 5x$. Hallar todas las raíces de la ecuación $F(x) = |\varphi(x)|$.

27. $f(x) = x + 1$; $\varphi(x) = x - 2$. Resolver la ecuación

$$|f(x) + \varphi(x)| = |f(x)| + |\varphi(x)|.$$

28. Hallar los valores de a y b en la expresión de la función $f(x) = ax^2 + bx + 5$ para los cuales sea válida la identidad $f(x+1) - f(x) \equiv 8x + 3$.

29. Sea $f(x) = a \cdot \cos(bx + c)$. ¿Cuáles deben ser los valores de las constantes a, b y c para que se cumpla la identidad $f(x+1) - f(x) \equiv \operatorname{sen} x$?

Funciones compuestas

30. $y = z^2$, $z = x + 1$. Expresar y como función de x.

31. $y = \sqrt{z+1}$, $z = \operatorname{tg}^2 x$. Expresar y como función de x.

32. $y = z^2$, $z = \sqrt[3]{x+1}$, $x = a^t$. Expresar y como función de t.

33. $y = \operatorname{sen} x$; $v = \lg y$; $u = \sqrt{1+v^2}$. Expresar u como función de x.

34. $y = 1 + x$; $z = \cos y$; $v = \sqrt{1-z^2}$. Expresar v como función de x.

35. Presentar en forma de cadenas formadas a base de las principales funciones elementales las siguientes funciones compuestas:

1) $y = \operatorname{sen}^3 x$; 2) $y = \sqrt[3]{(1+x)^2}$; 3) $y = \lg \operatorname{tg} x$;

4) $y = \operatorname{sen}^3 (2x+1)$; 5) $y = 5^{(3x+1)^2}$.

36. $f(x) = x^3 - x$; $\varphi(x) = \operatorname{sen} 2x$. Hallar:

a) $f\left[\varphi\left(\frac{\pi}{12}\right)\right]$; b) $\varphi[f(1)]$; c) $\varphi[f(2)]$;

d) $f[\varphi(x)]$; e) $f[f(x)]$; f) $f\{f[f(1)]\}$;
g) $\varphi[\varphi(x)]$.

37. Demostrar que es válida la siguiente forma de construir la gráfica de la función compuesta $y = f[\varphi(x)] = F(x)$, valiéndose de las gráficas conocidas de las funciones componentes: $y = f(x)$, $y = \varphi(x)$. Del punto A de la gráfica de la función $\varphi(x)$ (véase la fig. 4), el cual corresponde al valor dado de la variable independiente

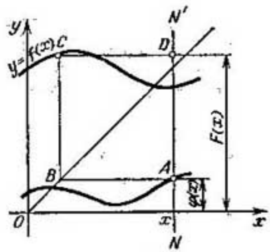

Fig. 4

x, se traza una recta paralela al eje Ox hasta que se corte en el punto B con la bisectriz de los ángulos coordenados primero y tercero. Del punto B se traza una recta paralela al eje Oy hasta que se corte con la gráfica de la función $f(x)$ en el punto C. Si del punto C se traza una recta paralela al eje Ox, el punto D de su intersección con la recta NN' será el de la gráfica de la función $F(x)$ correspondiente al valor tomado de x.

Funciones implícitas

38. Escribir en forma explícita la función y dada en forma implícita mediante la siguiente ecuación:

1) $x^2 + y^2 = 1$; 2) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$;
3) $x^3 + y^3 = a^3$; 4) $xy = C$; 5) $2^{xy} = 5$;
6) $\lg x + \lg(y + 1) = 4$; 7) $2^{x+y}(x^2 - 2) = x^3 + 7$;
8) $(1 + x)\cos y - x^2 = 0$.

39*. Mostrar que para $x > 0$ la ecuación $y + |y| - x - |x| = 0$ determina la función cuya gráfica será la bisectriz del primer ángulo coordenado, mientras que para $x \leqslant 0$ son las coordenadas de todos los puntos del tercer ángulo coordenado (incluidos sus puntos frontera) las que satisfacen a la ecuación dada.

§ 2. Propiedades más elementales de las funciones

Dominio de definición de la función

40. Formar la tabla de los valores de la función de argumento entero $y = \frac{1}{x!}$ para $1 \leqslant x \leqslant 6$.

41. El valor de la función de argumento entero $u = \varphi(n)$ es igual a la cantidad de números primos no mayores que n. Formar la tabla de los valores de u para $1 \leqslant n \leqslant 20$.

42. El valor de la función de argumento entero $u = f(n)$ es igual al número de divisores enteros del argumento distintos de 1 y de la misma n. Formar la tabla de los valores de u para $1 \leqslant \leqslant n \leqslant 20$.

43. La figura 5 presenta una «barra» formada por tres segmentos cuyas longitudes son iguales a 1; 2; 1 unidad de longitud, y el peso

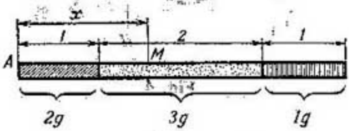

Fig. 5

es igual a 2; 3; 1 unidades de peso, respectivamente. El peso del segmento AM cuya longitud es igual a x, es función de x. ¿Para qué valores de x está definida esta función? Presentar su forma analítica y construir su gráfica.

44. Una torre tiene la siguiente forma: Un cono circular recto truncado cuyos radios de base son $2R$ (inferior) y R (superior) y cuya altura es R, sostiene un cilindro de radio R y de altura $2R$. Este último sostiene, a su vez, una semiesfera de radio R. Expresar el área S de la sección transversal de la torre como función de la distancia x que media entre la sección y la base inferior del cono. Construir la gráfica de la función $S = f(x)$.

45. Una esfera de radio R lleva inscrito un cilindro. Hallar la dependencia funcional entre el volumen V del cilindro y su altura x. Indicar el dominio de definición de esta función.

46. Una esfera de radio R lleva inscrito un cono recto. Hallar la dependencia funcional entre el área de la superficie lateral S del cono y su generatriz x. Indicar el dominio de definición de esta función.

En los ejercicios 47—48 hallar los dominios de definición de las funciones que se indican:

47. 1) $y=1-\lg x$; 2) $y=\lg(x+3)$; 3) $y=\sqrt{5-2x}$;

4) $y=\sqrt{-px}$ $(p>0)$; 5) $y=\frac{1}{x^2-1}$; 6) $y=\frac{1}{x^2+1}$;

7) $y=\frac{1}{x^3-x}$; 8) $y=\frac{2x}{x^2-3x+2}$; 9) $y=1-\sqrt{1-x^2}$;

10) $y=\frac{1}{\sqrt{x^2-4x}}$; 11) $y=\sqrt{x^2-4x+3}$;

12) $y=\frac{x}{\sqrt{x^2-3x+2}}$; 13) $y=\operatorname{arcsen}\frac{x}{4}$;

14) $y=\operatorname{arcsen}(x-2)$; 15) $y=\arccos(1-2x)$;

16) $y=\arccos\frac{1-2x}{4}$; 17) $y=\operatorname{arcsen}\sqrt{2x}$;

18) $y=\sqrt{1-|x|}$; 19) $y=\frac{1}{\sqrt{|x|-x}}$; 20) $y=\frac{1}{\sqrt{x-|x|}}$;

21) $y=\sqrt{\lg\left(\frac{5x-x^2}{4}\right)}$;

22) $y=\lg \operatorname{sen} x$; 23) $y=\arccos\frac{2}{2+\operatorname{sen} x}$;

24) $y=\log_x 2$.

48. 1) $y=\frac{1}{\lg(1-x)}+\sqrt{x+2}$; 2) $y=\sqrt{3-x}+\operatorname{arcsen}\frac{3-2x}{5}$;

3) $y=\operatorname{arcsen}\frac{x-3}{2}-\lg(4-x)$;

4) $y=\sqrt{x}+\sqrt[3]{\frac{1}{x-2}}-\lg(2x-3)$;

5) $y=\sqrt{x-1}+2\sqrt{1-x}+\sqrt{x^2+1}$;

6) $y=\frac{3}{4-x^2}+\lg(x^3-x)$;

7) $y=\lg\operatorname{sen}(x-3)+\sqrt{16-x^2}$;

8) $y=\sqrt{\operatorname{sen} x}+\sqrt{16-x^2}$;

9) $y=\frac{1}{\sqrt{\operatorname{sen} x}}+\sqrt[3]{\operatorname{sen} x}$;

10) $y=\lg\frac{x-5}{x^2-10x+24}-\sqrt[3]{x+5}$;

11) $y=\sqrt{\frac{x-2}{x+2}}+\sqrt{\frac{1-x}{\sqrt{1+x}}}$;

12) $y=\sqrt{x^2-3x+2}+\frac{1}{\sqrt{3+2x-x^2}}$;

13) $y=(x^2+x+1)^{-\frac{3}{2}}$; 14) $y=\lg(\sqrt{x-4}+\sqrt{6-x})$;

15) $y=\lg[1-\lg(x^2-5x+16)]$.

49. ¿Son idénticas las funciones

$$1)\ f(x)=\frac{x}{x^2}\ \text{y}\ \varphi(x)=\frac{1}{x};\ 2)\ f(x)=\frac{x^2}{x}\ \text{y}\ \varphi(x)=x;$$

$$3)\ f(x)=x\ \text{y}\ \varphi(x)=\sqrt{x^2};\ 4)\ f(x)=\lg x^2\ \text{y}\ \varphi(x)=2\lg x?$$

50. Pensar un ejemplo de la función dada en forma analítica:

1) definida sólo en el intervalo $-2 \leqslant x \leqslant 2$;

2) definida sólo en el intervalo $-2 < x < 2$ y no definida para $x = 0$;

3) definida para todos los valores reales de x, a excepción de $x = 2$, $x = 3$, $x = 4$.

51. Hallar los dominios de definición de las ramas unívocas de la función $y = \varphi(x)$ dada mediante la ecuación:

1) $y^2 - 1 + \log_2(x-1) = 0$; 2) $y^4 - 2xy^2 + x^2 - x = 0$.

Características del comportamiento de funciones

52. $f(x)=\frac{x^2}{1+x^2}$; indicar el dominio de definición de la función $f(x)$ y mostrar que dicha función es no negativa.

53. Hallar los intervalos de signos constantes y las raíces de la función:

1) $y = 3x - 6$; 2) $y = x^2 - 5x + 6$; 3) $y = 2^{x-1}$;

4) $y = x^3 - 3x^2 + 2x$; 5) $y = |x|$.

54. ¿Qué funciones de las que se dan a continuación son pares, impares y qué funciones no son pares ni impares?

1) $y = x^4 - 2x^2$; 2) $y = x - x^2$; 3) $y = \cos x$; 4) $y = 2^x$;

5) $y=x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}$ 6) $y = \operatorname{sen} x$; 7) $y = \operatorname{sen} x - \cos x$;

8) $y = 1 - x^2$; 9) $y = \operatorname{tg} x$; 10) $y = 2^{-x^2}$;

11) $y=\frac{a^x+a^{-x}}{2}$; 12) $y=\frac{a^x-a^{-x}}{2}$; 13) $y=\frac{x}{a^x-1}$;

14) $y=\frac{a^x+1}{a^x-1}$; 15) $y=x\cdot\frac{a^x-1}{a^x+1}$;

16) $y=2^{x-x^4}$; 17) $y=\ln\frac{1-x}{1+x}$.

55. Presentar cada una de las siguientes funciones como suma de una función par y otra impar:

1) $y = x^2 + 3x + 2$; 2) $y = 1 - x^3 - x^4 - 2x^5$;

3) $y = \operatorname{sen} 2x + \cos\frac{x}{2} + \operatorname{tg} x$.

56. Demostrar que $f(x) + f(-x)$ es una función par y que $f(x) - f(-x)$ es una función impar.

57. Presentar las siguientes funciones como suma de una función par y otra impar:

1) $y = a^x$; 2) $y = (1 + x)^{100}$ (véase el ejercicio 56).

58. Demostrar que el producto de dos funciones pares es una función par, el de dos impares es una función par y el de una par y otra impar es una impar.

59. ¿Qué funciones de las que se dan a continuación son periódicas?

1) $y = \operatorname{sen}^2 x$; 2) $y = \operatorname{sen} x^2$; 3) $y = x \cdot \cos x$;

4) $y = \operatorname{sen} \frac{1}{x}$; 5) $y = 1 + \operatorname{tg} x$; 6) $y = 5$;

7) $y = [x]$; 8) $y = x - [x]$.

(La función $[x]$ se define así: si x es un número entero, entonces $[x] = x$. Si x no es número entero, $[x]$ es igual al número entero máximo menor que x. Así, se tiene $[2] = 2$; $[3, 25] = 3$; $[-1,37] = -2$.)

60. Construir la gráfica de una función periódica tal que su período sea $T = 1$ y que en su intervalo semiabierto $[0, 1)$ sea dada mediante la fórmula:

1) $y = x$; 2) $y = x^2$.

61. Indicar los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los intervalos en que las funciones son constantes

1) $y = |x|$; 2) $y = |x| - x$.

62. Indicar los valores máximo y mínimo de las funciones

1) $y = \operatorname{sen}^2 x$; 2) $y = \cos x^3$; 3) $y = 1 - \operatorname{sen} x$; 4) $y = 2^{x^2}$.

63. Mediante la adición de gráficas construir la gráfica de la función $y = f(x) + \varphi(x)$:

1) para las gráficas presentadas en la fig. 6;

2) para las gráficas presentadas en la fig. 7.

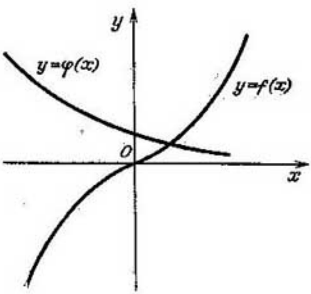

Fig. 6

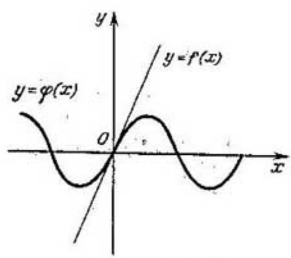

Fig. 7

64. Conociendo la gráfica de la función $y = f(x)$ construir la gráfica de la función:

1) $y = |f(x)|$; 2) $y = \frac{1}{2}[|f(x)| + f(x)]$;

3) $y = \frac{1}{2}[|f(x)| - f(x)]$.

§ 3. Funciones más simples

Función lineal

65. Sean la intensidad de corriente $I = 0{,}8$ A y la tensión $E = 2{,}4$ V. Aplicando la ley de Ohm, expresar analíticamente la dependencia entre la intensidad de corriente y la tensión. Construir la gráfica de la función hallada.

66. Un vaso de forma cualquiera contiene un líquido. A la profundidad $h = 25{,}3$ cm la presión del líquido es $p = 18{,}4$ gf/cm².

a) Formar la función que exprese la dependencia entre la presión y la profundidad;

b) determinar la presión a la profundidad de $h = 14{,}5$ cm;

c) ¿a qué profundidad la presión resultará igual a 26,5 gf/cm²?

67. Un cuerpo efectúa movimiento rectilíneo bajo la acción de la fuerza F. Partiendo de la ley de Newton escribir la función que exprese la dependencia entre la fuerza F y la aceleración w, si se sabe que cuando el cuerpo se mueve experimentando una aceleración de 12 m/s², en su trayecto $s = 15$ m se realiza un trabajo igual a $A = 32$ julios.

68. Determinar la función lineal $y = ax + b$ valiéndose de los siguientes datos:

1)

x	y
0	4
3	6

2)

x	y
2	4,3
$-1{,}6$	0

3)

x	y
2,5	7,2
3,2	6,8

69. Cierta cantidad de gas ocupó el volumen de 107 cm³ a la temperatura 20° C; para una temperatura igual a 40° C el volumen llegó a ser igual a 114 cm³.

a) Aplicando la ley de Gay-Lussac formar la función que exprese la dependencia entre el volumen V del gas y la temperatura t.

b) ¿Cuál sería el volumen a 0° C?

70. Al comenzar un punto su movimiento uniforme a lo largo de una recta, al cabo de 12 s alcanza un punto que dista $+32{,}7$ cm de un cierto punto de dicha recta, mientras que al cabo de 20 s la distancia llegó a ser igual a $+43{,}4$ cm. Expresar la distancia s como función del tiempo t.

71. En un circuito la tensión va disminuyendo uniformemente (de acuerdo con la ley lineal). Al comienzo del experimento la tensión era igual a 12 V y al final del mismo experimento, que duró 8 s, la tensión descendió hasta 6,4 V. Expresar la tensión V como función del tiempo t y construir la gráfica de esta función.

72. Hallar el incremento de la función lineal $y = 2x - 7$ al pasar la variable independiente x del valor $x_1 = 3$ al de $x_2 = 6$.

73. Hallar el incremento de la función lineal $y = -3x + 1$, correspondiente al incremento de la variable independiente $\Delta x = 2$.

74. La función $y = 2{,}5x + 4$ tuvo el incremento $\Delta y = 10$. Hallar el incremento del argumento.

75. Dados la función $y = \frac{x-a}{a^2-b^2}$ y el valor inicial de la variable independiente $x_1 = a - b$, hallar el valor finito x_2 de la variable independiente x para el cual el argumento $\Delta y = \frac{1}{a-b}$.

76. La función $\varphi(x)$ viene dada así: $\varphi(x) = \frac{1}{2}x + 2$ para $-\infty < x \leqslant 2$; $\varphi(x) = 5 - x$ para $2 \leqslant x < +\infty$. Hallar, analítica y gráficamente, las raíces de la ecuación $\varphi(x) = 2x - 4$.

77. Construir la gráfica de la función:
1) $y = |x+1| + |x-1|$; 2) $y = |x+1| - |x-1|$;
3) $y = |x-3| - 2|x+1| + 2|x| - x + 1$.

78*. ¿Para qué valores de x es válida la desigualdad

$$|f(x) + \varphi(x)| < |f(x)| + |\varphi(x)|,$$

si $f(x) = x - 3$ y $\varphi(x) = 4 - x$?

79. ¿Para qué valores de x es válida la desigualdad

$$|f(x) - \varphi(x)| > |f(x)| - |\varphi(x)|,$$

si $f(x) = x$ y $\varphi(x) = x - 2$?

80. La función $f(x)$ está definida así: en cada uno de los intervalos $n \leqslant x < n + 1$, donde n es un número entero positivo, $f(x)$ varía linealmente, siendo $f(n) = -1$, $f\left(n + \frac{1}{2}\right) = 0$. Construir la gráfica de esta función.

Función cuadrática

81. Construir la gráfica e indicar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función:

1) $y = \frac{1}{2}x^2$; 2) $y = x^2 - 1$; 3) $y = |x^2 - 1|$; 4) $y = 1 - x^2$;
5) $y = x^2 - x + 4$; 6) $y = x - x^2$; 7) $y = |x - x^2|$;
8) $y = 2x^2 + 3$; 9) $y = 2x^2 - 6x + 4$; 10) $y = -3x^2 + 6x - 1$;
11) $y = |-3x^2 + 6x - 1|$; 12) $y = -x|x|$.

82. Escribir en forma analítica la función unívoca definida en el intervalo $(-\infty, 6]$, si se sabe que su gráfica consta de los puntos del eje Ox cuyas abscisas son menores que -3, de los puntos de la parábola que es simétrica respecto al eje Oy y que pasa por los puntos $A(-3, 0)$, $B(0, 5)$, y de los puntos del segmento CD cuyos extremos son $C(3, 0)$ y $D(6, 2)$.

83. Hallar el valor máximo de la función:
1) $y = -2x^2 + x - 1$; 2) $y = -x^2 - 3x + 2$;
3) $y = 5 - x^2$; 4) $y = -2x^2 + ax - a^2$; 5) $y = a^2x - b^2x^2$.
84. Hallar el valor mínimo de la función:
1) $y = x^2 + 4x - 2$; 2) $y = 2x^2 - 1{,}5x + 0{,}6$; 3) $y = 1 - 3x + 6x^2$;
4) $y = a^2x^2 + a^4$; 5) $y = (ax + b)(ax - 2b)$.
85. Presentar el número a como suma de dos sumandos tales que su producto sea el mayor posible.
86. Presentar el número a como suma de dos números tales que la suma de sus cuadrados sea la menor posible.
87. Se debe levantar una valla de madera al lado de un muro de piedra para cercar un terreno rectangular. La longitud total de dicha valla es igual a 8 m. ¿Cuál debe ser la longitud de la parte de pared paralela al muro para que la valla abarque la mayor área posible?
88. La suma de los lados de un ángulo dado de un triángulo es igual a 100 cm. ¿Cuánto deben medir los lados para que el área del triángulo sea la mayor posible?
89. ¿Cuál de los cilindros cuyo perímetro dado de la sección axial es igual a $P = 100$ cm tiene la mayor área lateral?
90. ¿Cuál de los conos cuyo perímetro de la sección axial es igual a P, tiene la mayor área lateral?
91. Consideremos un sólido cuya forma es la de un cilindro circular recto y que tiene colocado encima de él un cono (de la misma base). El ángulo del vértice del cono es igual a 60°. El perímetro de la sección axial es igual a 100 cm. ¿Cuál debe ser el radio del cilindro para que su superficie lateral sea la mayor posible?
92. Un triángulo isósceles de base a y altura h lleva inscrito un rectángulo de la manera representada en la fig. 8. ¿Cuál debe ser la altura del rectángulo para que su superficie sea la mayor posible?

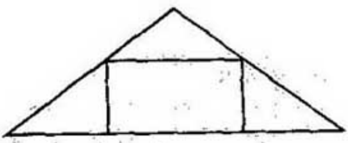

Fig. 8

93. Un cono recto dado lleva inscrito un cilindro de manera que los planos y los centros de las bases circulares del cilindro y del cono coinciden. ¿Cuál debe ser la relación de los radios de las bases del cilindro y del cono para que la superficie lateral del cilindro sea la mayor posible?

94. Sea dado un cono recto circular cuyo radio de base es igual a R y su altura, H. Lleva inscrito un cilindro de manera que los planos y los centros de las bases circulares del cono y del cilindro coinciden. ¿Cuál debe ser el radio del cilindro para que la superficie total del mismo sea la mayor posible? Considerar los casos $H > 2R$ y $H \leqslant 2R$.

95. ¿Cuál debe ser el radio de un círculo para que el sector cuyo perímetro es igual a un número dado P tenga la mayor superficie posible?

96. Una ventana de forma rectangular está rematada en la parte superior por un triángulo equilátero. El perímetro de la ventana es igual a P. ¿Cuál debe ser la base a del rectángulo para que la ventana tenga la mayor superficie posible?

97. Una ventana de forma rectangular está rematada en la parte superior por un semicírculo. ¿Cuál debe ser la base del rectángulo para que la ventana tenga la mayor superficie siendo el perímetro igual a 2 m?

98. De un cartón de forma rectangular de dimensiones $30 \times \times 50$ cm² se deben cortar cuadrados de manera que doblando la hoja a lo largo de las líneas punteadas (véase la fig. 9) se obtenga una

Fig. 9

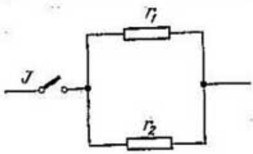

Fig. 10

caja de superficie lateral máxima. Hallar el lado de los cuadrados cortados.

99. Es necesario fabricar un modelo del paralelepípedo recto de base cuadrada con un alambre que mide 120 cm. ¿Cuánto debe medir la cara de la base para que la superficie total del paralelepípedo sea la mayor posible?

100. Se debe cortar un alambre de longitud a en dos partes. Una parte estará destinada para hacer un cuadrado, la otra, para un triángulo equilátero. ¿De qué manera debe ser cortado el alambre para que la suma de las áreas de las figuras obtenidas sea la menor posible?

101. En la recta $y = x$ hallar un punto tal que la suma de los cuadrados de la distancia que media entre éste y los puntos $(-a, 0)$, $(a, 0)$ y $(0, b)$ sea la menor posible.

102. En la recta $y = x + 2$ hallar un punto tal que la suma de los cuadrados de la distancia que media entre éste y las rectas $3x - 4y + 8 = 0$ y $3x - y - 1 = 0$ sea la menor posible.

103. La corriente eléctrica J se distribuye por dos ramas de resistencias r_1 y r_2 (véase la fig. 10). Mostrar que las pérdidas menores de la energía necesaria para calentar el conductor en la unidad de tiempo corresponden a una distribución de las corrientes inversamente proporcional a las resistencias de las ramas. (Partir de la ley: la cantidad de calor desprendida es $Q = 0{,}24\, J^2Rt$.)

104. Trazar la parábola $y = x^2$ y, valiéndose de ella, resolver gráficamente las siguientes ecuaciones:
1) $x^2 - x - 2{,}25 = 0$; 2) $2x^2 - 3x - 5 = 0$; 3) $3{,}1x^2 - 14x + 5{,}8 = 0$;
4) $4x^2 - 12x + 9 = 0$; 5) $3x^2 - 8x + 7 = 0$.

105. La función $\varphi(x)$ viene dada así: $\varphi(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$ para $-\infty < x \leqslant \frac{11}{3}$; $\varphi(x) = 1 + x$ para $\frac{11}{3} \leqslant x < +\infty$. Analítica y gráficamente hallar todas las raíces reales de la ecuación $[\varphi(x)]^2 = 7x + 25$.

106. Señalar el dominio de definición de la función

$$y = \lg(ax^2 + bx + c).$$

107. Hallar $f(x + 1)$, dada la función $f(x - 1) = 2x^2 - 3x + 1$

108*. Mostrar que la función $f(x) = \frac{x^2 + 2x + c}{x^2 + 4x + 3c}$ toma cualquier valor real si $0 < c \leqslant 1$.

Función homográfica

109. Aplicando la ley de Boile y Mariotte, hallar la función que exprese la dependencia entre el volumen del gas y la presión a $t = \text{const}$ si es sabido que a la presión 760 mm Hg el volumen del gas es igual a 2,3 l. Dibujar la gráfica de esta función.

110. La variable x es inversamente proporcional a y; y es inversamente proporcional a z; z, a su vez, es inversamente proporcional a v. ¿Qué dependencia existe entre x y v?

111. La variable x es inversamente proporcional a y; y es directamente proporcional a z, z es directamente proporcional a u, que es a su vez inversamente proporcional a v. ¿Qué dependencia existe entre x y v?

112. Durante la electrólisis la cantidad de sustancia que se desprende en el electrodo es directamente proporcional a la intensidad de corriente; ésta es proporcional a la conductibilidad del electrólito, esta última es proporcional a la concentración del electrólito. Dada cierta cantidad de sustancia, la concentración es inversamente proporcional al volumen del solvente. ¿Qué dependencia existe entre la cantidad de sustancia desprendida en el electrodo y el volumen del solvente?

113. Construir la gráfica de la función homográfica:

1) $y=\frac{x-1}{x-2}$; 2) $y=\frac{2x}{3-x}$; 3) $y=\frac{2x-5}{3x-7,5}$;

4) $y=\frac{x}{1-\frac{1}{2}x}$; 5) $y=\frac{4-3x}{3-2,25x}$.

114. Siguiendo la gráfica hallar los valores máximo y mínimo de la función homográfica en el intervalo indicado:

1) $y=\frac{4}{x}$ [1, 5]; 2) $y=\frac{x}{2x-5}$ [−1, 2];

3) $y=\frac{1-x}{1+x}$ [0, 4].

115. Demostrar: 1) si las abscisas de los cuatro puntos $M_1(x_1;\ y_1)$, $M_2(x_2;\ y_2)$, $M_3(x_3,\ y_3)$, $M_4(x_4;\ y_4)$ de la gráfica de la función

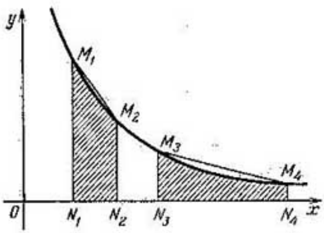

Fig. 11

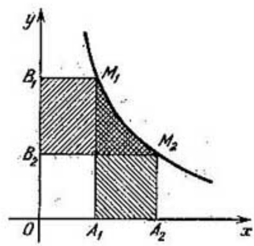

Fig. 12

$y=\frac{k}{x}$ (véase la fig. 11) se hallan en la proporción $\frac{x_1}{x_2}=\frac{x_3}{x_4}$, los trapecios rectilíneos $M_1M_2N_2N_1$ y $M_3M_4N_4N_3$ son equivalentes;

2) si los puntos M_1 y M_2 pertenecen a la gráfica de la función $y=\frac{k}{x}$ (la fig. 12), las áreas de las figuras $A_1M_1M_2A_2$ y $B_1M_1M_2B_2$ son equivalentes entre sí.

116. Construir la gráfica de la función $y=\frac{x^2+1}{x}$ mediante la adición gráfica.

§ 4. Función inversa. Funciones potencial, exponencial y logarítmica

Función inversa

117. Hallar la función inversa a la dada:

1) $y=x$; 2) $y=2x$; 3) $y=1-3x$; 4) $y=x^2+1$;

5) $y=\frac{1}{x}$; 6) $y=\frac{1}{1-x}$; 7) $y=x^2-2x$; 8) $y=\sqrt[3]{x^2+1}$;

9) $y=10^{x+1}$; 10) $y=1+\lg(x+2)$; 11) $y=\log_x 2$;

12) $y=\frac{2^x}{1+2^x}$; 13) $y=\frac{10^x-10^{-x}}{10^x+10^{-x}}+1$; 14) $y=2\operatorname{sen} 3x$;

15) $y=1+2\operatorname{sen}\frac{x-1}{x+1}$; 16) $y=4\arcsen\sqrt{1-x^2}$.

118. Demostrar que la función inversa a la función homográfica $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ (considerando que $ad-bc\neq 0$) es también homográfica.

119. ¿Cuál debe ser la condición para que la función homográfica del ejercicio 118 coincida con su inversa?

120. Mostrar que si $f(x)=\sqrt[n]{a-x^n}$, $x>0$, se tiene $f[f(x)]=x$. Hallar la función inversa a la $f(x)$.

121. ¿Cuál es la característica de la gráfica de la función idéntica a su inversa?

122. La función y de x viene dada por la ecuación $y^2-1+\log_2(x-1)=0$. Hallar el dominio de definición de la función dada y escribir la función inversa a la dada.

123. La función y de x viene dada mediante la ecuación $y^2+\operatorname{sen}^3 x-y+2=0$. Hallar la función inversa a la dada.

Función potencial

124. Construir la gráfica de la función:

1) $y=\frac{1}{3}x^3$; 2) $y=-\frac{1}{2}x^3$; 3) $y=x^3+3x^2$;

4) $y=x^3-x+1$; 5) $y=-x^3+2x-2$; 6) $y=2x^{\frac{3}{2}}$;

7) $y=\frac{1}{2}x^{\frac{5}{3}}$, 8) $y=x^{0,3}$; 9) $y=x^{2,1}$; 10) $y=x^{0,62}$;

11) $y=\frac{1}{2}x^{-0,2}$; 12) $y=5x^{-2,5}$; 13) $y=1-\sqrt{|x|}$.

125. Hallar gráficamente los valores aproximados de las raíces reales de la ecuación $x+3=4\sqrt[3]{x^2}$.

126*. Dibujar la parábola cúbica $y = x^3$ y utilizarla para resolver gráficamente las ecuaciones:

1) $x^3 + x - 4 = 0$; 2) $x^3 - 3x^2 - x + 3 = 0$;

3) $x^3 - 6x^2 + 9x - 4 = 0$; 4) $x^3 + 3x^2 + 6x + 4 = 0$.

127. De acuerdo con la condición dada formar la ecuación y resolverla gráficamente:

1) ¿El cuadrado de qué número es igual al mismo número sumado a su valor inverso?

2) Un globo de madera cuyo radio mide 10 cm y cuya densidad es igual a 0,8 g/cm³, flota sobre la superficie del agua. Hallar la altura del segmento hundido.

3) Un cubo y una pirámide de base cuadrada, ambos de madera, pesan juntos 0,8 kgf. La arista del cubo es igual al lado de la base de la pirámide. La altura de la pirámide mide 45 cm. Hallar la arista del cubo. El peso específico de la madera es igual a 0,8 gf/cm³.

128. Sea dada la función $y = x^n$, $x > 0$. ¿Para qué valores de x esta función tiene valores mayores que los de la función inversa y para qué valores de x tiene valores menores?

Funciones exponencial e hiperbólicas

129. Construir la gráfica de la función:

1) $y = -2^x$; 2) $y = 2^{x+3}$; 3) $y = \frac{1}{3} \cdot 3^x$;

4) $y = 1 - 3^{x-3}$; 5) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{|x|}$; 6) $y = 2^{-x^2}$.

130. Valiéndose de la gráfica de la función $y = 2^x$ y sin recurrir a otros cálculos, construir la gráfica de la función:

1) $y = 2^{x-1}$; 2) $y = \frac{1}{12} \cdot 2^{\frac{x}{2}}$; 3) $y = \frac{1}{3} \cdot 2^{\frac{x-1}{2}} + 1$.

131. La gráfica de la función $y = a^x$ es una línea. Mostrar que la gráfica de la función $y = k \cdot a^x$ ($k > 0$) es la misma línea pero desplazada paralelamente al eje de coordenadas.

132. Mediante la adición gráfica construir la gráfica de la función:

1) $y = x^2 + 2^x$; 2) $y = x^2 - 2^x$.

133. Resolver gráficamente la ecuación $2^x - 2x = 0$.

134. Construir la figura limitada por las líneas $y = 2^x$, $y = \frac{1+x}{x}$ y $x = 3$. Hallar por la gráfica y de manera aproximada las coordenadas de los puntos de intersección de las líneas indicadas.

135. Hallar el mayor valor posible de n para el cual $2^x > x^n$ para todas las $x \geqslant 100$ (n es un entero).

136. Demostrar que $y = \operatorname{sh} x$ e $y = \operatorname{th} x$ son funciones impares, mientras $y = \operatorname{ch} x$ es una función par. ¿Son estas funciones periódicas?

137. Demostrar la validez de las siguientes igualdades:
1) $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$; 2) $\operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x = \operatorname{ch} 2x$;
3) $2 \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{ch} x = \operatorname{sh} 2x$; 4) $\operatorname{sh}(\alpha \pm \beta) = \operatorname{sh} \alpha \cdot \operatorname{ch} \beta \pm \operatorname{sh} \beta \operatorname{ch} \alpha$;
5) $\operatorname{ch}(\alpha \pm \beta) = \operatorname{ch} \alpha \cdot \operatorname{ch} \beta \pm \operatorname{sh} \alpha \cdot \operatorname{sh} \beta$; 6) $1 - \operatorname{th}^2 x = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$;
7) $1 - \operatorname{cth}^2 x = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$.

Función logarítmica

138. Construir la gráfica de la función:
1) $y = -\log_2 x$; 2) $y = \lg \frac{10}{x}$; 3) $y = |\lg x|$;
4) $y = \log_2 |x|$; 5) $y = 1 + \lg(x+2)$; 6) $y = \log_2 |1 - x|$;
7) $y = a^{\log_a x}$; 8) $y = \log_x 2$.

139. Valiéndose de la gráfica de la función $y = \lg x$, construir la gráfica de la función:
1) $y = \frac{1}{2} \lg(x+1)$; 2) $y = 2 \lg\left(\frac{x+1}{2}\right)$.

140. Sea dada la función $y = x + \lg \frac{1}{x}$. Mediante la adición gráfica construir la gráfica de la función dada y por la gráfica hallar el valor mínimo de dicha función en el semiintervalo $(0, 2]$.

141. Mostrar que la gráfica de la función $y = \log_a (x + \sqrt{x^2+1})$ es simétrica respecto al origen de coordenadas. Hallar la función inversa.

142. Demostrar que la ordenada de la gráfica de la función $y = \log_a x$ es igual a su correspondiente de la gráfica de la función $y = \log_{a^n} x$ multiplicada por n.

§ 5. Funciones trigonométricas y funciones trigonométricas inversas

Funciones trigonométricas

143. Indicar la amplitud y el período de la armónica:
1) $y = \operatorname{sen} 3x$; 2) $y = 5 \cos 2x$; 3) $y = 4 \operatorname{sen} \pi x$;
4) $y = 2 \operatorname{sen} \frac{x}{2}$; 5) $y = \operatorname{sen} \frac{3\pi x}{4}$; 6) $y = 3 \operatorname{sen} \frac{5x}{8}$.

144. Indicar la amplitud, el período, la frecuencia y la fase inicial de la armónica:

1) $y=2\operatorname{sen}(3x+5)$; 2) $y=-\cos\frac{x-1}{2}$;

3) $y=\frac{1}{3}\operatorname{sen}2\pi\left(\omega-\frac{1}{6}\right)$; 4) $y=\operatorname{sen}\frac{2t+3}{6\pi}$.

145. Construir la gráfica de la función:

1) $y=-\operatorname{sen}x$; 2) $y=1-\operatorname{sen}x$; 3) $y=1-\cos x$;

4) $y=\operatorname{sen}2x$; 5) $y=\operatorname{sen}\frac{x}{2}$; 6) $y=-2\operatorname{sen}\frac{x}{3}$;

7) $y=\cos 2x$; 8) $y=2\operatorname{sen}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$;

9) $y=2\operatorname{sen}\left(3x+\frac{3\pi}{4}\right)$; 10) $y=\frac{1}{2}\operatorname{sen}(2\pi x-1{,}2)$;

11) $y=2+2\operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{2}+\frac{\pi}{6}\right)$; 12) $y=2\cos\frac{x-\pi}{3}$;

13) $y=|\operatorname{sen}x|$; 14) $y=|\cos x|$; 15) $y=|\operatorname{tg}x|$;

16) $y=|\operatorname{ctg}x|$; 17) $y=\sec x$; 18) $y=\operatorname{cosec}x$.

19) $$y=\begin{cases}\cos x & \text{para} \quad -\pi\leqslant x\leqslant 0,\\ 1 & \text{—"—} \quad 0<x<1,\\ \frac{1}{x} & \text{—"—} \quad 1\leqslant x\leqslant 2.\end{cases}$$

146. Los lados de un triángulo miden 1 cm y 2 cm, respectivamente. Construir la gráfica del área del triángulo como función del ángulo x comprendido entre dichos lados. Hallar el dominio de definición de esta función, y el valor del argumento x para el cual el área del triángulo sea máxima.

147. Un punto efectúa movimiento uniforme a lo largo de una circunferencia de radio R, con velocidad lineal v cm/s, teniendo por centro el origen de coordenadas y en el sentido contrario al de las agujas del reloj. En el momento inicial la abscisa de dicho punto era a. Formar la ecuación de la oscilación armónica de la abscisa del punto.

148. Un punto efectúa movimiento uniforme a lo largo de la circunferencia $x^2+y^2=1$. En el momento t_0 su ordenada era y_0, en el momento t_1, y_1. Hallar la dependencia entre la ordenada del punto y el tiempo, hallar también el período y la fase inicial de la oscilación.

149. La fig. 13 muestra un mecanismo de manivela. El volante es de radio R, la biela es de longitud a. El volante gira uniformemente en el sentido de las agujas del reloj dando n vueltas en un segundo. En el momento $t=0$ en el que la biela y la manivela formaron una misma recta (posición del punto muerto), la cruceta (A) ocupó el punto O. Hallar la dependencia entre el desplazamiento x de la cruceta (A) y el tiempo t.

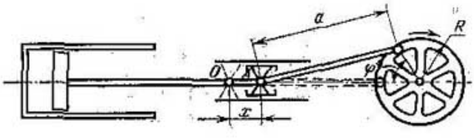

Fig. 13

150. Mediante la adición gráfica construir la gráfica de la función:

1) $y = \operatorname{sen} x + \cos x$; 2) $y = \operatorname{sen} 2\pi x + \operatorname{sen} 3\pi x$;

3) $y = 2 \operatorname{sen} \frac{x}{2} + 3 \operatorname{sen} \frac{x}{3}$; 4) $y = x + \operatorname{sen} x$;

5) $y = x - \operatorname{sen} x$; 6) $y = -2^x + \cos x$.

151. Resolver gráficamente la ecuación:

1) $x = 2 \operatorname{sen} x$; 2) $x = \operatorname{tg} x$; 3) $x - \cos x = 0$;

4) $4 \operatorname{sen} x = 4 - x$; 5) $2^{-x} = \cos x$.

152. Hallar el período de la armónica compuesta:

1) $y = 2 \operatorname{sen} 3x + 3 \operatorname{sen} 2x$; 2) $y = \operatorname{sen} t + \cos 2t$;

3) $y = \operatorname{sen} \frac{\pi t}{3} + \operatorname{sen} \frac{\pi t}{4}$;

4) $y = \operatorname{sen}\left(2\pi t + \frac{\pi}{3}\right) + 2 \operatorname{sen}\left(3\pi t + \frac{\pi}{4}\right) + 3 \operatorname{sen} 5\pi t$.

153. Presentar en forma de una armónica simple:

1) $y = \operatorname{sen} x + \cos x$; 2) $y = \operatorname{sen} x + 2 \operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$.

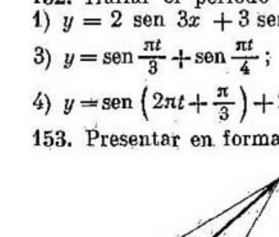

Fig. 14

154. Comprobar el siguiente procedimiento gráfico de la adición de las oscilaciones armónicas. Sean dadas las armónicas

$A_1 \operatorname{sen}(\omega x + \varphi_1)$ y $A_2 \operatorname{sen}(\omega x + \varphi_2)$. Tracemos los vectores $\mathbf{A}_1$ y $\mathbf{A}_2$ cuyos módulos son A_1 y A_2, respectivamente, formando los ángulos φ_1 y φ_2 con el eje horizontal (véase la fig. 14). Efectuando la adición de los vectores $\mathbf{A}_1$ y $\mathbf{A}_2$, obtendremos el vector $\mathbf{A}$ de módulo A inclinado hacia el eje horizontal en un ángulo φ. La A y φ serán la amplitud y la fase inicial de la suma, respectivamente

$$A_1 \operatorname{sen}(\omega x + \varphi_1) + A_2 \operatorname{sen}(\omega x + \varphi_2) = A \operatorname{sen}(\omega x + \varphi).$$

155*. Indicar el período de la función y construir su gráfica:

1) $y=|\operatorname{sen} x|+|\cos x|$; 2) $y=\frac{1}{2}\left(\frac{|\operatorname{sen} x|}{\cos x}+\frac{\operatorname{sen} x}{|\cos x|}\right)$.

156. Hallar el dominio de definición y explicar el aspecto de la gráfica de la función:

1) $y=\lg \operatorname{sen} x$; 2) $y=\sqrt{\lg \operatorname{sen} x}$; 3) $y=\sqrt{\lg \frac{1}{|\operatorname{sen} x|}}$.

Funciones trigonométricas inversas

157. Construir la gráfica de la función:

1) $y=\operatorname{arcctg} x$; 2) $y=2 \arcsen \frac{x}{2}$; 3) $y=1+\operatorname{arctg} 2x$;

4) $y=\frac{\pi}{2}-\arccos 2x$; 5) $y=\operatorname{arcsen} \frac{1-x}{4}$.

158. Un sector circular de ángulo central α se arrolla engendrando un cono. Hallar la dependencia entre el ángulo ω en el vértice de dicho cono y el ángulo α, y construir la gráfica.

159. Un cuadro de altura a cuelga de la pared de modo inclinado, formándose un ángulo diedro φ entre la pared y el cuadro. Un observador que se encuentra frente a la pared, a la distancia l, ve el borde inferior del cuadro por encima de la altura de su vista (la diferencia es igual a b). Hallar la dependencia entre el ángulo γ (formado entre la vista del observador y el cuadro) y el ángulo φ.

160. Indicar la dependencia entre el ángulo φ de la vuelta que da la manivela (véase el ejercicio 149) y el desplazamiento x de la cruceta.

161. Hallar el intervalo en que varía x para el cual sea válida la identidad:

1) $\operatorname{arcsen} x+\arccos x=\frac{\pi}{2}$; 2) $\operatorname{arcsen} \sqrt{x}+\arccos \sqrt{x}=\frac{\pi}{2}$;

3) $\arccos \sqrt{1-x^2}=\operatorname{arcsen} x$; 4) $\arccos \sqrt{1-x^2}=-\operatorname{arcsen} x$;

5) $\operatorname{arctg} x=\operatorname{arcctg} \frac{1}{x}$; 6) $\operatorname{arctg} x=\operatorname{arcctg} \frac{1}{x}-\pi$;

7) $\arccos \frac{1-x^2}{1+x^2}=2 \operatorname{arctg} x$; 8) $\arccos \frac{1-x^2}{1+x^2}=-2 \operatorname{arctg} x$;

9) $\operatorname{arctg} x+\operatorname{arctg}=\operatorname{arctg} \frac{1+x}{1-x}$;

10) $\operatorname{arctg} x+\operatorname{arctg} 1=\pi+\operatorname{arctg} \frac{1+x}{1-x}$.

162. Valiéndose de las identidades del ejercicio 161, hallar el dominio de definición y construir la gráfica de la función:

1) $y=\arccos \sqrt{1-x^2}$; 2) $y=\operatorname{arcsen} \sqrt{1-x}+\operatorname{arcsen} \sqrt{x}$;

3) $y=\arccos \frac{1-x^2}{1+x^2}$; 4) $y=\operatorname{arctg} x-\operatorname{arcctg} \frac{1}{x}$.

163*. Construir la gráfica de la función $y = \operatorname{arcsen}(\operatorname{sen} x)$. Demostrar que la función indicada es periódica y hallar su período.

164. Construir la gráfica de la función $y = \arccos(\cos x)$.

165. Construir la gráfica de la función $y = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x)$.

166. Construir la gráfica de la función:

1) $y = x - \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x)$; 2) $y = x - \operatorname{arcsen}(\operatorname{sen} x)$;
3) $y = x \operatorname{arcsen}(\operatorname{sen} x)$; 4) $y = \arccos(\cos x) - \operatorname{arcsen}(\operatorname{sen} x)$.

§ 6. Problemas de cálculo

167. Trazar la gráfica de la función $y = x^3 + 2x^2 - 4x + 7$ en el intervalo cerrado $[-4, 2]$ tomando los valores de x con intervalo de 0,2. En el eje de ordenadas elegir la escala 20 veces menor que la del eje de las abscisas. Hallar los valores máximo y mínimo de la función en el intervalo cerrado $[-3, 2]$ de acuerdo a la gráfica. ¿En qué punto pasa la función del crecimiento al decrecimiento? Hallar la raíz de la función en el intervalo cerrado $[-4, 2]$. La exactitud del cálculo debe ser 0,1.

168. Al estudiar las leyes de dispersión de la metralla (en la teoría balística del tiro) es necesario construir la gráfica de la función $y = e^{A \cos^2 \alpha}$; $e \approx 2{,}718$. Efectuar esta operación para $A = 2$, dando a α los valores desde 0 hasta 90° con intervalo de 5°. El cálculo debe ser efectuado con exactitud hasta 0,01.

169. Sean dados tres puntos: M_1 (1; 8;) M_2 (5; 6); M_3 (9; 3). Trazar la parábola $y = ax^2 + bx + c$ que atraviese estos tres puntos. Hallar las raíces de la función $ax^2 + bx + c$. La exactitud del cálculo debe ser 0,01.

170. Una lámina de hojalata de 30×30 cm² ha de servir para fabricar una caja de 1600 cm² de capacidad, recortando de ella cuadrados iguales. ¿Cuánto debe medir el lado x de cada cuadrado cortado? La exactitud del cálculo debe ser 0,01.

171. Comprobar lo siguiente: si en la ecuación $x^4 + px^2 + qx + s = 0$ ponemos $x^2 = y$, dicha ecuación será sustituida por el sistema

$$\begin{cases} x^2 = y, \\ (y - y_0)^2 + (x - x_0)^2 = r^2, \end{cases}$$

donde $y_0 = \frac{1-p}{2}$, $x_0 = -\frac{q}{2}$ y $r^2 = y_0^2 + x_0^2 - s$.

Valiéndose de este procedimiento, resolver gráficamente la ecuación $x^4 - 3x^2 - 8x - 29 = 0$. La exactitud del cálculo debe ser 0,1.

172*. Utilizando el procedimiento del ejercicio 171 demostrar lo siguiente: al efectuar un cambio complementario de la variable

$x = x' + \alpha$, las raíces reales de la ecuación de cuarto grado $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ pueden ser halladas gráficamente encontrando los puntos de intersección de una cierta circunferencia con la parábola $y = x^2$.

Valiéndose de este procedimiento resolver gráficamente la ecuación $x^4 + 1{,}2x^3 - 22x^2 - 39x + 31 = 0$. La exactitud del cálculo debe ser 0,1.

173. Hallar gráficamente las raíces de la ecuación e^x sen $x = 1$, $e \approx 2{,}718$, comprendidas entre 0 y 10. Indicar la fórmula general aproximada para los valores de las raíces restantes. La exactitud del cálculo ha de ser 0,01.

174. Resolver gráficamente el sistema:

$$x + y^2 = 1; \qquad 16x^2 + y = 4.$$

La exactitud del cálculo ha de ser 0,01.

175. Construir la gráfica de la función (en el sistema de coordenadas polares) para los valores del ángulo polar φ con el paso igual a $\pi/12$ *).

1) $\rho = a\varphi$ (espiral de Arquímedes); 2) $\rho = a/\varphi$ (espiral hiperbólica); 3) $\rho = e^{a\varphi}$ ($e \approx 2{,}718$) (espiral logarítmica); 4) $\rho = a$ sen 3φ (rosa de tres pétalos); 5) $\rho = a$ cos 2φ (rosa de dos pétalos); 6) $\rho = a\,(1 - \cos\varphi)$ (cardioide).

Efectuar los cálculos con exactitud hasta 0,01. Conviene elegir cualquier constante $a > 0$.

*) Se admite aquí que si $\rho(\varphi) < 0$, en el correspondiente rayo no existe el punto de la gráfica.

Capítulo II

Límite. Continuidad

§ 1. Definiciones principales

Funciones de argumento entero

176. La función de argumento entero toma los valores
$u_1 = 0,9; \quad u_2 = 0,99; \quad u_3 = 0,999; \ldots, \quad u_n = \underbrace{0,999\ldots9}_{n \text{ veces}}; \ldots$

¿A qué es igual $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$? ¿Qué valor debe tener n para que el valor absoluto de la diferencia entre u_n y su límite no sea mayor que 0,0001?

177. La función u_n toma los valores

$$u_1 = 1; \quad u_2 = \frac{1}{4}; \quad u_3 = \frac{1}{9}; \ \ldots; \quad u_n = \frac{1}{n^2}; \ \ldots$$

Hallar $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$. ¿Qué valor debe tener n para que la diferencia entre u_n y su límite sea menor que un número dado positivo ε?

178. Demostrar que $u_n = \frac{n-1}{n+1}$ tiende a 1, al crecer n en forma limitada. ¿A partir de qué valor de n el valor absoluto de la diferencia entre u_n y 1 no es mayor que 10^{-4}?

179. La función v_n toma los valores

$$v_1 = \frac{\cos\frac{\pi}{2}}{1}; \quad v_2 = \frac{\cos\pi}{2}; \quad v_3 = \frac{\cos\frac{3\pi}{2}}{3}; \ \ldots; \ v_n = \frac{\cos\frac{n\pi}{2}}{n}; \ \ldots$$

Hallar $\lim\limits_{n\to\infty} v_n$. ¿Cuál debe ser el valor de n para que el valor absoluto de la diferencia entre v_n y su límite no sea mayor que 0,001? ¿Toma la función v_n el valor de su propio límite?

180. El término general u_n de la sucesión $u_1 = \frac{1}{2}$, $u_2 = \frac{5}{4}$, $u_3 = \frac{7}{8}$, $u_4 = \frac{17}{16}$, ... tiene la forma $\frac{2^n-1}{2^n}$, si n es un número impar, y $\frac{2^n+1}{2^n}$ si n es un número par.

Hallar $\lim_{n\to\infty} u_n$. ¿Cuál debe ser el valor de n para que la diferencia entre u_n y el valor absoluto de su límite no sea mayor que 10^{-4}; que un número dado positivo ε?

181. Demostrar que la sucesión $u_n=\frac{4n^2+1}{3n^2+1}$, al crecer n infinitamente, tiende al límite igual a $\frac{4}{3}$ creciendo de modo monótono. ¿A partir de qué valor de n, la magnitud $\frac{4}{3}-u_n$ no es mayor que un número dado positivo ε?

182. Demostrar que $u_n=\frac{\sqrt{n^2+a^2}}{n}$ tiene por límite 1, al crecer n infinitamente. ¿A partir de qué valor de n la magnitud $|1-u_n|$ no es mayor que un número dado positivo ε?
¿Qué carácter tiene la variable u_n? ¿Es creciente o decreciente?

183. La función v_n toma los valores de coeficientes binomiales:

$$v_1=m, \qquad v_2=\frac{m(m-1)}{1\cdot 2}, \qquad v_3=\frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}, \;\ldots,$$

$$\ldots,\; v_n=\frac{m(m-1)(m-2)\ldots[(m-(n-1)]}{1\cdot 2\cdot 3\ldots n}, \;\ldots,$$

donde m es un entero positivo. Hallar $\lim_{n\to\infty} v_n$.

184. Demostrar que la sucesión $u_n=1+(-1)^n$ no tiene límite cuando n crece infinitamente.

185. Demostrar que al crecer n infinitamente la sucesión $u_n=\frac{2^n+(-2)^n}{2^n}$ no tiene límite, y la sucesión $v_n=\frac{2^n+(-2)^n}{3^n}$ sí lo tiene. ¿A qué es igual éste?

186. ¿Tiene límite la siguiente sucesión:

$$1)\; u_n=n\,\mathrm{sen}\,\frac{n\pi}{2}; \qquad 2)\; u_n=\frac{\mathrm{sen}\,\frac{n\pi}{2}}{\lg n}\;(n>1)?$$

187. Demostrar el teorema: si las sucesiones $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ y $v_1, v_2, \ldots, v_n, \ldots$ tienden al mismo límite común a, la sucesión $u_1, v_1, u_2, v_2, \ldots, u_n, v_n, \ldots$ tiende al mismo límite.

188. Demostrar el teorema: si la sucesión $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ tiende al límite a, cualquier subsucesión suya (por ejemplo, u_1, u_3, $u_5 \ldots$) tiende al mismo límite.

189. La sucesión $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ tiene por límite $a\neq 0$. Demostrar que $\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=1$. ¿Qué se puede decir sobre este límite si $a=0$? (Citar ejemplos.)

Funciones de argumento continuo

190. Sea $y = x^2$. Cuando $x \to 2$, $y \to 4$. ¿Cuál debe ser el valor de δ para que $|x - 2| < \delta$ dé por resultado $|y - 4| < \varepsilon = 0{,}001$?

191. Sea $y = \frac{x^2-1}{x^2+1}$. Para $x \to 2$, tenemos $y \to \frac{3}{5}$. ¿Cuál debe ser el valor de δ para que $|x-2| < \delta$ dé por resultado $\left|y - \frac{3}{5}\right| < 0{,}1$?

192. Sea $y = \frac{x-1}{2(x+1)}$. Para $x \to 3$ tenemos: $y \to \frac{1}{4}$. ¿Cuál debe ser el valor de δ para que $|x-3| < \delta$ dé por resultado $\left|\frac{1}{4} - y\right| < 0{,}01$?

193. Demostrar que sen x tiende a la unidad si $x \to \pi/2$. ¿Qué condiciones debe satisfacer x en el entorno del punto $x = \pi/2$ para que se verifique la desigualdad $1 - \operatorname{sen} x < 0{,}01$?

194. Si x crece infinitamente, la función $y = \frac{1}{x^2+1}$ tiende a cero: $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x^2+1} = 0$. ¿Cuál debe ser el valor de N para que $|x| > N$ dé por resultado $y < \varepsilon$?

195. Si $x \to \infty$, $y = \frac{x^2-1}{x^2+3} \to 1$. ¿Cuál debe ser el valor de N para que $|x| > N$ dé por resultado $|y-1| < \varepsilon$?

§ 2. Magnitudes infinitas. Criterios de existencia del límite

Magnitudes infinitas

196. La función u_n toma los valores

$$u_1 = 3, \quad u_2 = 5, \quad u_3 = 7, \quad \ldots, \quad u_n = 2n + 1, \quad \ldots$$

Demostrar que u_n es una magnitud infinitamente grande cuando $n \to \infty$. ¿A partir de qué valor de n la magnitud u_n se hace mayor que N?

197. Demostrar que el término general u_n de cualquier progresión aritmética es una magnitud infinitamente grande cuando $n \to \infty$. (¿Cuándo es positiva? ¿Negativa?) ¿Es válida esta aserción en el caso de cualquier progresión geométrica?

198. Cuando $x \to 0$ tenemos: $y = \frac{1+2x}{x} \to \infty$. ¿Qué condiciones debe satisfacer x para que se verifique la desigualdad $|y| > 10^4$?

199. Demostrar que la función $y=\frac{x}{x-3}$ es infinitamente grande cuando $x\to 3$. ¿Cuál debe ser el valor de x para que la magnitud $|y|$ sea mayor que 1000?

200. Cuando x tiende a 1, la función $y=\frac{1}{(x-1)^2}$ crece infinitamente. ¿Cuál debe ser el valor de δ para que $|x-1|<\delta$ dé por resultado $\frac{1}{(x-1)^2}>N=10^4$?

201. La función $y=\frac{1}{2^x-1}$ es infinitamente grande para $x\to 0$. ¿Qué desigualdades debe satisfacer x para que $|y|$ sea mayor que 100?

202. Para $x\to\infty$ tenemos: $y=\lg x\to\infty$. ¿Cuál debe ser el valor de M para que $x>M$ dé por resultado $y>N=100$?

203. ¿Cuáles de las principales funciones elementales son acotadas en todo el dominio de su definición?

204. Demostrar que la función $y=\frac{x^2}{1+x^4}$ es acotada en todo el eje numérico.

205. ¿Es acotada la función $y=\frac{x^2}{1+x^5}$ en todo el eje numérico? ¿Sería acotada en el intervalo $(0, \infty)$?

206. ¿Es acotada la función $y=\lg \operatorname{sen} x$ en todo el dominio de su existencia?

La misma pregunta sobre la función $y=\lg\cos x$.

207. 1) Demostrar que las funciones $y=x\operatorname{sen} x$ e $y=x\cos x$ no son acotadas cuando $x\to\infty$ (indicar para cada una de ellas, por lo menos, una sucesión x_n para la cual $y_n\to\infty$).

2) ¿Serán infinitamente grandes estas funciones?

3) Construir sus gráficas.

208. Construir las gráficas de las funciones $f(x)=2^{x\operatorname{sen} x}$ y $f(x)=2^{-x\operatorname{sen} x}$. Para cada una de estas funciones indicar dos sucesiones x_n y x_n' de los valores de x tales, que $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=\infty$, y $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n')=0$.

209. ¿Para qué valores de a la función $y=a^x\operatorname{sen} x$ no es acotada cuando $x\to+\infty$ $(x\to-\infty)$?

210. ¿Será infinitamente grande la función no acotada:

1) $f(x)=\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}$ para $x\to 0$;

2) $f(x)=x\operatorname{arctg} x$ para $x\to\infty$;

3) $f(x)=2^x\operatorname{arcsen}(\operatorname{sen} x)$ para $x\to+\infty$;

4) $f(x)=(2+\operatorname{sen} x)\lg x$ para $x\to+\infty$;

5) $f(x)=(1+\operatorname{sen} x)\lg x$ para $x\to+\infty$?

211. La función u_n toma los valores

$$u_1=2,\ u_2=\frac{3}{4},\ u_3=\frac{4}{9},\ \ldots,\ u_n=\frac{n+1}{n^2},\ \ldots$$

Demostrar que u_n es infinitesimal cuando $n\to\infty$.

212. La función u_n toma los valores

$$u_1=-7,\ u_2=-\frac{1}{2},\ u_3=\frac{1}{27},\ u_4=\frac{1}{8},\ \ldots$$
$$\ldots,\ u_n=\frac{n^2-8}{n^3},\ \ldots$$

Demostrar que u_n es infinitesimal cuando $n\to\infty$.

213. Demostrar que $y=\frac{x}{x+1}\to 0$ cuando $x\to 0$. ¿Qué condiciones debe satisfacer x para que se verifique la desigualdad $|y|<10^{-4}$?

214. Mostrar que la función $y=\sqrt{x+1}-\sqrt{x}$ tiende a cero cuando $x\to\infty$. ¿Cuál debe ser el valor de N para que $y<\varepsilon$ cuando $x>N$?

215. Demostrar que si la función $f(x)$ tiene por límite a para $x\to\infty$, la función $f(x)$ es susceptible de ser representada en forma de la suma $f(x)=a+\varphi(x)$, donde $\varphi(x)$ es infinitesimal para $x\to\infty$.

Presentar en forma de suma las siguientes funciones:

1) $y=\frac{x^3}{x^3-1}$; 2) $y=\frac{x^2}{2x^2+1}$; 3) $y=\frac{1-x^2}{1+x^2}$.

Criterios de existencia del límite

216*. La función u_n toma los valores

$$u_1=\frac{1}{4},\ u_2=\frac{1}{4}+\frac{1}{10},\ \ldots,\ u_n=\frac{1}{3+1}+\frac{1}{3^2+1}+\ldots+\frac{1}{3^n+1},\ \ldots$$

Demostrar que u_n tiende a cierto límite cuando $n\to\infty$.

217. La función u_n toma los valores

$$u_1=\frac{1}{2},\ u_2=\frac{1}{2}+\frac{1}{2\cdot 4},\ u_3=\frac{1}{2}+\frac{1}{2\cdot 4}+\frac{1}{2\cdot 4\cdot 6},\ \ldots$$
$$\ldots,\ u_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{2\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{2\cdot 4\ldots(2n)},\ \ldots$$

Demostrar que u_n tiende a cierto límite cuando $n\to\infty$.

218. Demostrar el teorema:

Si la diferencia entre dos funciones es infinitesimal cuando la variable independiente varía de manera exactamente igual, siendo una de estas funciones creciente y la otra decreciente, las dos tienden a un mismo límite.

219. Sean dados dos números: u_0 y v_0 ($u_0 < v_0$). Los términos de las sucesiones u_n y v_n son dados por las fórmulas:

$$u_1 = \frac{u_0 + v_0}{2}, \quad v_1 = \frac{u_0 + 2v_0}{3}; \quad u_2 = \frac{u_1 + v_1}{2}, \quad v_2 = \frac{u_1 + 2v_1}{3};$$

en general,

$$u_n = \frac{u_{n-1} + v_{n-1}}{2}, \qquad v_n = \frac{u_{n-1} + 2v_{n-1}}{3}.$$

Partiendo del teorema expuesto en el ejercicio anterior, demostrar que las dos sucesiones u_n y v_n tienden a un mismo límite comprendido entre u_0 y v_0.

220. Dada la sucesión de números u_n:

$$u_1 = \sqrt{6}, \quad u_2 = \sqrt{6 + u_1}, \ \ldots, \quad u_n = \sqrt{6 + u_{n-1}}, \ \ldots$$

Demostrar que esta sucesión tiene límite. Hallarlo.

§ 3. Funciones continuas

221. La función y está definida de la manera siguiente:

$$\begin{array}{ll} y = 0 & \text{para } x < 0; \\ y = x & \text{para } 0 \leqslant x < 1; \\ y = -x^2 + 4x - 2 & \text{para } 1 \leqslant x < 3; \\ y = 4 - x & \text{para } x \geqslant 3. \end{array}$$

¿Es esta función continua?

222. Los radios de las bases de tres cilindros superpuestos miden 3, 2 y 1 m, respectivamente. La altura de cada uno de los tres cilindros es igual a 5 m. Expresar el área de la sección transversal del cuerpo engendrado como función de la distancia que media entre la sección y la base inferior del cilindro que ocupa la parte baja del cuerpo. ¿Será esta función continua? Construir su gráfica.

223. Sea

$$f(x) = \begin{cases} x + 1, & \text{si } x \leqslant 1; \\ 3 - ax^2, & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

¿Cómo debe ser elegido el número a para que la función $f(x)$ sea continua? (Construir su gráfica.)

224. Sea

$$f(x) = \begin{cases} -2 \operatorname{sen} x, & \text{si } \quad x \leqslant -\frac{\pi}{2}; \\ A \operatorname{sen} x + B, & \text{si } -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}; \\ \cos x, & \text{si } \quad x \geqslant \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Elegir los números A y B de tal modo que la función $f(x)$ sea continua. Construir su gráfica.

225. ¿En qué puntos sufren discontinuidades las funciones $y = \frac{1}{x-2}$ e $y = \frac{1}{(x+2)^2}$? Construir las gráficas de las dos. Explicar la diferencia en el comportamiento de estas funciones cerca de los puntos de discontinuidad.

226. La función $f(x) = \frac{x^2-1}{x^3-1}$ no está definida para $x = 1$. ¿Cuál debe ser el valor de $f(1)$ para que la función completada con este valor llegue a ser continua para $x = 1$?

227. ¿Qué géneros de discontinuidad sufren las funciones $y = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$ e $y = \frac{\cos x}{x}$ para $x=0$? Mostrar el carácter de las gráficas de estas funciones en el entorno del punto $x = 0$.

228. Decir si es continua la función dada del modo siguiente: $y = \frac{|x|}{x}$ para $x \neq 0$, $y = 0$ para $x = 0$. Construir la gráfica de esta función.

229. ¿Cuántos puntos de discontinuidad (y de qué género) tiene la función $y = \frac{1}{\lg|x|}$? Construir su gráfica.

230. La función $y = \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$ no está definida en el punto $x = 0$. ¿Es posible completar la función $f(x)$ en el punto $x = 0$ de tal modo que llegue a ser continua en este punto? Construir su gráfica.

231. Decir si es continua la función definida de la manera siguiente:

$$f(x) = \operatorname{sen} \frac{\pi}{2x} \quad \text{para} \quad x \neq 0, \ f(0) = 1.$$

Construir la gráfica de esta función.

232. Construir la gráfica de la función $f(x) = x \operatorname{sen} \frac{\pi}{x}$. ¿Qué valor debe tener la función $f(0)$ para que la función $f(x)$ sea continua por todas partes?

233. Demostrar que la función $y = \frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}$ tiene discontinuidad de primer género en el punto $x = 0$. Construir, de modo esquemático, la gráfica de esta función en el entorno del punto $x = 0$.

234. Analizar el carácter de la discontinuidad de la función $y = 2^{-2^{\frac{1}{1-x}}}$ en el punto $x = 1$. ¿Se puede definir y, cuando $x = 1$, de tal modo que la función llegue a ser continua para $x = 1$?

235. Analizar el carácter de discontinuidad de la función $y=\dfrac{2^{\frac{1}{x}}-1}{2^{\frac{1}{x}}+1}$ en el punto $x=0$.

236. La función $f(x)$ está definida del modo siguiente: $f(x)=(x+1)\,2^{-\left(\frac{1}{|x|}+\frac{1}{x}\right)}$ para $x\neq 0$ y $f(0)=0$. Demostrar que en el intervalo $-2\leqslant x\leqslant 2$ la función $f(x)$ toma todos los valores, sin excepción, comprendidos entre $f(-2)$ y $f(2)$, y, sin embargo, es discontinua (¿en qué punto precisamente?). Construir su gráfica.

237. Decir si es continua la función $y=\dfrac{1}{1+2^{\operatorname{tg} x}}$. Esclarecer el carácter de su gráfica.

238. La función está definida del modo siguiente: si x es un número racional, $f(x)=0$; si x es un número irracional, $f(x)=x$. ¿Para qué valor de x es continua esta función?

239. Decir si es continua la función y construir su gráfica.

$$1)\ y=x-[x];\quad 2)\ y=\frac{1}{x-[x]};\quad 3)\ y=(-1)^{[x]}.$$

[La función $[x]$ es igual al número entero máximo no mayor que x (véase el ejercicio 59).]

240. Valiéndose de las propiedades de las funciones continuas comprobar que la ecuación $x^5-3x=1$ tiene, por lo menos, una raíz comprendida entre 1 y 2.

241*. Mostrar que: a) el polinomio de grado impar tiene, por lo menos, una raíz real; b) el polinomio de grado par tiene, por lo menos, dos raíces reales, si toma, al menos, un valor cuyo signo sea contrario del que tiene el coeficiente de su término de grado más elevado.

242. Mostrar que la ecuación $x\cdot 2^x=1$ tiene, por lo menos, una raíz positiva no mayor que 1.

243. Mostrar que la ecuación $x=a\operatorname{sen}x+b$, donde $0<a<1$, $b>0$ tiene, por lo menos, una raíz positiva siendo no mayor que $b+a$.

244*. Mostrar que la ecuación $\dfrac{a_1}{x-\lambda_1}+\dfrac{a_2}{x-\lambda_2}+\dfrac{a_3}{x-\lambda_3}=0$,

donde $a_1>0$, $a_2>0$, $a_3>0$ y $\lambda_1<\lambda_2<\lambda_3$, tiene dos raíces reales comprendidas en los intervalos (λ_1, λ_2) y (λ_2, λ_3).

§ 4. Operación de hallar los límites. Comparación de las magnitudes infinitesimales

Funciones de argumento entero

En los ejercicios 245—267 hallar los límites.

245. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+1}{n}$

246. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{2n^2}$

247. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)^3-(n-1)^3}{(n+1)^2+(n-1)^2}$.

248. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^3-100n^2+1}{100n^2+15n}$

249. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1000n^3+3n^2}{0{,}001n^4-100n^3+1}$.

250. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)^4-(n-1)^4}{(n+1)^4+(n-1)^4}$.

251. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(2n+1)^4-(n-1)^4}{(2n+1)^4+(n-1)^4}$.

252. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n^3+2n-1}}{n+2}$.

253. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n^2+n}}{n+1}$.

254. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(\sqrt{n^2+1}+n)^2}{\sqrt[3]{n^6+1}}$

255. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^3-2n^2+1}+\sqrt[3]{n^4+1}}{\sqrt[4]{n^6+6n^5+2}-\sqrt[5]{n^7+3n^3+1}}$.

256. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt[4]{n^5+2}-\sqrt[3]{n^2+1}}{\sqrt[5]{n^4+2}-\sqrt{n^3+1}}$.

257. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!-n!}$.

258. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+2)!+(n+1)!}{(n+3)!}$.

259. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+2)!+(n+1)!}{(n+2)!-(n+1)!}$.

260. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^n}}{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\ldots+\frac{1}{3^n}}$.

261. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}(1+2+3+\ldots+n)$.

262. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1+2+3+\ldots+n}{n+2}-\frac{n}{2}\right)$.

263. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1-2+3-4+\ldots-2n}{n^2+1}\right)$.

264*. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{(n-1)\,n}\right)$.

265. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}\right)$.

266. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n-1}{2^n+1}$.

267. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^{\frac{1}{n}}-1}{2^{\frac{1}{n}}+1}$.

Función de argumento continuo

En los ejercicios 268—304 hallar los límites.

268. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2+5}{x^2-3}$.

269. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{x^3-3x+1}{x-4}+1\right)$

270. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x}{1-x}$.

271. $\lim\limits_{x\to\sqrt{3}}\frac{x^2-3}{x^4+x^2+1}$.

272. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-2x+1}{x^3-x}$.

273. $\lim\limits_{x\to -2}\frac{x^3+3x^2+2x}{x^2-x-6}$.

274. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{(x-1)\sqrt{2-x}}{x^2-1}$. $\frac{1}{2}$

275. $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\frac{8x^3-1}{6x^2-5x+1}$. 6

276. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3+x-2}{x^3-x^2-x+1}$. I

277. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3}\right)$. -1

278. $\lim\limits_{x\to 2}\left[\frac{1}{x(x-2)^2}-\frac{1}{x^2-3x+2}\right]$. ∞

279. $\lim\limits_{x\to 1}\left[\frac{x+2}{x^2-5x+4}+\frac{x-4}{3(x^2-3x+2)}\right]$.

280. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^m-1}{x^n-1}$ (m y n son números enteros).

281. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3+x}{x^4-3x^2+1}$.

282. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^4-5x}{x^2-3x+1}$.

283. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-1}{2x^2+1}$.

284. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1+x-3x^3}{1+x^2+3x^3}$.

285. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{x^2+1}-x\right)$.

286. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{2x^2-1}-\frac{x^2}{2x+1}\right)$.

287. $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\frac{3x^2}{2x+1}-\frac{(2x-1)(3x^2+x+2)}{4x^2}\right]$.

288. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(x+1)^{10}+(x+2)^{10}+\ldots+(x+100)^{10}}{x^{10}+10^{10}}$.

289. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3+x}-x}$.

290. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt[3]{x^2+1}}{\sqrt[4]{x^4+1}-\sqrt[5]{x^4+1}}$.

291. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[5]{x^7+3}+\sqrt[4]{2x^3-1}}{\sqrt[8]{x^8+x^7+1}-x}$.

292. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt[3]{x^4+3}-\sqrt[5]{x^3+4}}{\sqrt[3]{x^7+1}}$.

293. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$.

294. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x^2}$.

295. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+16}-4}$.

296. $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}$.

297. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$.

298. $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}$.

299. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{x^2}$.

300. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}{x}$.

301. $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\sqrt{x-b}-\sqrt{a-b}}{x^2-a^2}$ $(a>b)$.

302. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[n]{x}-1}{\sqrt[m]{x}-1}$ (n y m son números enteros).

303*. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{1+x^2}-\sqrt[4]{1-2x}}{x+x^2}$.

304. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[3]{7+x^3}-\sqrt{3+x^2}}{x-1}$.

305. ¿De qué manera varían las raíces de la ecuación cuadrada $ax^2+bx+c=0$ cuando b y c conservan sus valores constantes $(b\neq 0)$ y la magnitud a tiende a cero?

En los ejercicios 306—378 hallar los límites.

306. $\lim\limits_{x\to\infty} (\sqrt{x+a}-\sqrt{x})$.

307. $\lim\limits_{x\to\infty} (\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1})$.

308. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} (\sqrt{x^2+1}-x)$ *).

309. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} x(\sqrt{x^2+1}-x)$.

310. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} (\sqrt{(x+a)(x+b)}-x)$.

311. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} (\sqrt{x^2-2x-1}-\sqrt{x^2-7x+3})$.

312. $\lim\limits_{x\to\infty} (\sqrt[3]{(x+1)^2}-\sqrt[3]{(x-1)^2}$.

313. $\lim\limits_{x\to\infty} x^{\frac{3}{2}} (\sqrt{x^3+1}-\sqrt{x^3-1})$.

---

314. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 3x}{x}$.

315. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} kx}{x}$.

316. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} \alpha x}{\operatorname{sen} \beta x}$.

317. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} 2x}{\operatorname{sen} 5x}$.

318. $\lim\limits_{\alpha\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} (\alpha^n)}{(\operatorname{sen} \alpha)^m}$ (n y m son números enteros positivos).

---

* En los ejemplos en que se presenta $x\to\pm\infty$ deben ser considerados separadamente los casos de $x\to+\infty$ y $x\to-\infty$.

319. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2\arcsen x}{3x}$.

320. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x-\arcsen x}{2x+\operatorname{arctg} x}$.

321. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2}$.

322. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos^3 x}{x \operatorname{sen} 2x}$.

323. $\lim\limits_{\alpha\to 0} \dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt[3]{(1-\cos\alpha)^2}}$.

324. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1+\operatorname{sen} x-\cos x}{1-\operatorname{sen} x-\cos x}$.

325. $\lim\limits_{\alpha\to 0} \dfrac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{sen}\alpha}{\alpha^3}$.

326. $\lim\limits_{\alpha\to 0} \dfrac{(1-\cos\alpha)^2}{\operatorname{tg}^3\alpha-\operatorname{sen}^3\alpha}$.

327. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{\operatorname{sen} x}-\dfrac{1}{\operatorname{tg} x}\right)$.

328. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{1-\operatorname{sen} x}{\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^2}$.

329. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\cos x}{\sqrt[3]{(1-\operatorname{sen} x)^2}}$.

330. $\lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{\operatorname{sen} 3x}{\operatorname{sen} 2x}$.

331. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)\operatorname{tg} x$.

332. $\lim\limits_{\alpha\to \pi} \dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{1-\frac{\alpha^2}{\pi^2}}$.

333. $\lim\limits_{z\to 1} (1-z)\operatorname{tg}\dfrac{\pi z}{2}$.

334. $\lim\limits_{y\to a} \left(\operatorname{sen}\dfrac{y-a}{2}\cdot\operatorname{tg}\dfrac{\pi y}{2a}\right)$.

335. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\cos x-\operatorname{sen} x}{\cos 2x}$.

336. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{6}} \dfrac{\operatorname{sen}\left(x-\frac{\pi}{6}\right)}{\frac{\sqrt{3}}{2}-\cos x}$.

337. $\lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{1-\operatorname{sen}\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}\left(\cos\frac{x}{4}-\operatorname{sen}\frac{x}{4}\right)}$.

338. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \left(2x\operatorname{tg} x-\dfrac{\pi}{\cos x}\right)$.

339. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos(a+x)-\cos(a-x)}{x}$.

340. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos\alpha x-\cos\beta x}{x^2}$.

341. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(a+x)-\operatorname{sen}(a-x)}{\operatorname{tg}(a+x)-\operatorname{tg}(a-x)}$.

342. $\lim\limits_{\alpha\to \beta} \dfrac{\operatorname{sen}^2\alpha-\operatorname{sen}^2\beta}{\alpha^2-\beta^2}$.

343. $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(a+2h)-2\operatorname{sen}(a+h)+\operatorname{sen} a}{h^2}$.

344. $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\operatorname{tg}(a+2h)-2\operatorname{tg}(a+h)+\operatorname{tg} a}{h^2}$.

345. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos x}}{\operatorname{sen}^2 x}$.

346. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+\operatorname{sen} x}-\sqrt{1-\operatorname{sen} x}}{\operatorname{tg} x}$.

347. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x\operatorname{sen} x}-\sqrt{\cos 2x}}{\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$.

348. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x\sqrt{\cos 2x}}{x^2}$.

349. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{1-\operatorname{arctg} 3x}-\sqrt[3]{1-\operatorname{arcsen} 3x}}{\sqrt{1-\operatorname{arcsen} 2x}-\sqrt{1+\operatorname{arctg} 2x}}$.

350*. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{\sqrt{\pi}-\sqrt{\arccos x}}{\sqrt{x+1}}$.

---

351. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x}{1+x}\right)^x$.

352. $\lim\limits_{t\to\infty} \left(1-\dfrac{1}{t}\right)^t$.

353. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{\frac{x+1}{x}}$.

354. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1+\dfrac{k}{x}\right)^{mx}$.

355. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x+1}{x-2}\right)^{2x-1}$.

356. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{3x-4}{3x+2}\right)^{\frac{x+1}{3}}$.

357. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{x^2}$.

358. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \left(\dfrac{x+1}{2x-1}\right)^x$.

359. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \left(\dfrac{2x+1}{x-1}\right)^x$.

360. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)^x$.

361. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x^2}$.

362. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x^2-2x+1}{x^2-4x+2}\right)^x$.

363. $\lim\limits_{x\to 0} (1+\operatorname{sen} x)^{\operatorname{cosec} x}$.

364. $\lim\limits_{x\to 0} (1+\operatorname{tg}^2\sqrt{x})^{\frac{1}{2x}}$.

365. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+kx)}{x}$.

366. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(a+x)-\ln a}{x}$.

367. $\lim\limits_{x\to\infty} \{x[\ln(x+a)-\ln x]\}$.

368. $\lim\limits_{x\to e} \dfrac{\ln x-1}{x-e}$.

369. $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{a^h-1}{h}$.

370. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{2x}-1}{3x}$.

371. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{e^x-e}{x-1}$.

372*. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{x^2}-\cos x}{x^2}$.

373. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x-e^{-x}}{\operatorname{sen} x}$.

374. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{\operatorname{sen} 2x}-e^{\operatorname{sen} x}}{x}$.

375. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{ax}-e^{bx}}{x}$.

376. $\lim\limits_{x\to\infty} x\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)$.

377. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} (\operatorname{ch} x-\operatorname{sh} x)$.

378. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \operatorname{th} x$.

Diversos límites

En los ejercicios 379—401 hallar los límites.

379. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{(ax+1)^n}{x^n+A}$. Considerar separadamente los casos en que n es: 1) un número entero positivo, 2) un número entero negativo, 3) cero.

380. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} x\left(\sqrt{x^2+\sqrt{x^4+1}}-x\sqrt{2}\right)$.

381. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{a^x}{a^x+1}$ $(a>0)$.

382. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{a^x-a^{-x}}{a^x+a^{-x}}$ $(a>0)$.

383. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x}$.

384. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x}$.

385. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x+\operatorname{sen} x}{x+\cos x}$.

386. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\operatorname{arcsen} x}{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}}$.

387. $\lim\limits_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen}(a+3h)-3\operatorname{sen}(a+2h)+3\operatorname{sen}(a+h)-\operatorname{sen} a}{h^3}$.

388. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg}^2 x\left(\sqrt{2\operatorname{sen}^2 x+3\operatorname{sen} x+4}-\sqrt{\operatorname{sen}^2 x+6\operatorname{sen} x+2}\right)$.

389. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos(1-\cos x)}{x^4}$.

390*. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\cos\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{4}\ \ldots\ \cos\frac{x}{2^n}\right)$.

391. $\lim\limits_{x\to\infty} x^2\left(1-\cos\frac{1}{x}\right)$.

392. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\cos\sqrt{x+1}-\cos\sqrt{x}\right)$.

393*. $\lim\limits_{x\to\infty} x\left(\operatorname{arctg}\frac{x+1}{x+2}-\frac{\pi}{4}\right)$.

394. $\lim\limits_{x\to\infty} x\left(\operatorname{arctg}\frac{x+1}{x+2}-\operatorname{arctg}\frac{x}{x+2}\right)$.

395*. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{arcsen} x-\operatorname{arctg} x}{x^3}$.

396. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1+\frac{1}{x^n}\right)^x$ $(n>0)$.

397*. $\lim\limits_{x\to 0} (\cos x)^{\frac{1}{\operatorname{sen} x}}$.

398. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln\cos x}{x^2}$.

399. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)^{\frac{\operatorname{sen} x}{x-\operatorname{sen} x}}$.

400. $\lim\limits_{x\to 0} (\cos x+\operatorname{sen} x)^{\frac{1}{x}}$.

491. $\lim\limits_{x\to 0} (\cos x+a\operatorname{sen} bx)^{\frac{1}{x}}$.

Comparación de magnitudes infinitesimales

402. La magnitud infinitesimal u_n toma los valores

$$u_1=1,\quad u_2=\frac{1}{2},\quad u_3=\frac{1}{3},\ \ldots,\ u_n=\frac{1}{n},\ \ldots,$$

y la magnitud infinitesimal v_n respectivamente

$$v_1=1,\quad v_2=\frac{1}{2!},\quad v_3=\frac{1}{3!},\ \ldots,\ v_n=\frac{1}{n!},\ \ldots$$

Comparar u_n y v_n. ¿Cuál de las dos es de orden infinitesimal superior?

403. La función u_n, toma los valores

$$u_1=0,\quad u_2=\frac{3}{8},\quad u_3=\frac{8}{27},\ \ldots,\ u_n=\frac{n^2-1}{n^3},\ \ldots,$$

y la función v_n, respectivamente

$$v_1=2,\quad v_2=\frac{5}{8},\quad v_3=\frac{10}{27},\ \ldots,\ v_n=\frac{n^2+1}{n^3},\ \ldots$$

Comparar estas dos magnitudes infinitesimales.

404. La magnitud infinitesimal u_n toma los valores

$$u_1=0,\quad u_2=\frac{1}{4},\quad u_3=\frac{2}{9},\ \ldots,\ u_n=\frac{n-1}{n^2},\ \ldots,$$

y la magnitud infinitesimal v_n, respectivamente

$$v_1=3,\quad v_2=\frac{5}{4},\quad v_3=\frac{7}{9},\ \ldots,\ v_n=\frac{2n+1}{n^2},\ \ldots$$

Comprobar que u_n y v_n son infinitesimales del mismo orden, pero no equivalentes.

405. Las funciones $y=\frac{1-x}{1+x}$ e $y=1-\sqrt{x}$ son infinitesimales cuando $x\to 1$. ¿Cuál de las dos es de orden infinitesimal superior?

406. Dada la función $y=x^3$, mostrar que Δy y Δx cuando $\Delta x\to 0$ y $\Delta x\neq 0$, son infinitesimales del mismo orden.

Comprobar que la magnitud Δy es infinitesimal de orden superior que Δx cuando $x=0$.

¿Para qué valor de x son equivalentes los incrementos Δy y Δx?

407. Comprobar que las magnitudes infinitesimales $1-x$ y $1-\sqrt[3]{x}$ son del mismo orden infinitesimal cuando $x\to 1$. ¿Son equivalentes?

408. Sea $x\to 0$. Entonces $\sqrt{a+x^3}-\sqrt{a}$ $(a>0)$ es una magnitud infinitesimal. Determinar su orden respecto a x.

409. Definir el orden, respecto a x, de la función infinitesimal para $x\to 0$:

1) $x^3+1000x^2$; 2) $\sqrt[3]{x^2}-\sqrt{x}$; 3) $\frac{x(x+1)}{1+\sqrt{x}}$; 4) $\frac{7x^{10}}{x^3+1}$.

410. Demostrar que los incrementos de las funciones $u = a\sqrt{x}$ y $v = bx^2$ para $x > 0$ y para el incremento general $\Delta x \to 0$ son del mismo orden infinitesimal. ¿Para qué valor de x son equivalentes (a y b son distintas de cero)?

411. Mostrar que cuando $x \to 1$ las magnitudes infinitesimales $1 - x$ y $a(1 - \sqrt[k]{x})$, donde $a \neq 0$ y k es un número entero positivo, son del mismo orden infinitesimal. ¿Para qué valor de a son equivalentes?

412. Demostrar que las funciones $\sec x - \operatorname{tg} x$ y $\pi - 2x$ son infinitesimales del mismo orden cuando $x \to \pi/2$. ¿Son equivalentes?

413. Demostrar que las magnitudes infinitesimales $e^{2x} - e^x$ y $\operatorname{sen} 2x - \operatorname{sen} x$ son equivalentes cuando $x \to 0$.

414. Definir el orden de la función infinitesimal respecto a x cuando $x \to 0$:

$$1)\ \sqrt[3]{1+\sqrt[3]{x}}-1;\quad 2)\ \sqrt{1+2x}-1-\sqrt{x};\quad 3)\ e^{\sqrt{x}}-1;$$

$$4)\ e^{\operatorname{sen} x}-1;\quad 5)\ \ln(1+\sqrt{x \operatorname{sen} x});\quad 6)\ \sqrt{1+x^2}\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2};$$

$$7)\ e^x-\cos x;\quad 8)\ e^{x^2}-\cos x;\quad 9)\ \cos x-\sqrt[3]{\cos x};$$

$$10)\ \operatorname{sen}(\sqrt{1+x}-1);\quad 11)\ \ln(1+x^2)-2\sqrt[3]{(e^x-1)^2};$$

$$12)\ \operatorname{arcsen}(\sqrt{4+x^2}-2).$$

Algunos problemas de geometría

415. Consideremos un triángulo equilátero de lado a. Sus tres alturas sirven para engendrar un nuevo triángulo equilátero y así sucesivamente n veces. Hallar el límite de la suma de las áreas de todos los triángulos cuando $n \to \infty$.

416. Un círculo de radio R lleva inscrito un cuadrado; éste, lleva inscrito un círculo el cual, a su vez, tiene inscrito un cuadrado, y así sucesivamente n veces. Hallar el límite de la suma de las áreas de todos los círculos y el de la suma de las áreas de todos los cuadrados cuando $n \to \infty$.

417. Un triángulo isósceles rectángulo cuya base está dividida en $2n$ partes iguales lleva inscrita una figura escalonada (véase la fig. 15). Demostrar que la diferencia entre el área del triángulo y la figura escalonada es infinitesimal cuando n crece infinitamente.

418. Un triángulo isósceles rectángulo cuyo cateto es igual a a, tiene dividida su hipotenusa en n partes iguales. De los puntos de división están trazadas rectas paralelas a los catetos resultando una línea quebrada, $AKLMNOPQRTB$ (véase la fig. 16), cuya longitud es igual a $2a$ para cualquier n. De ahí que el límite de su longitud es igual a $2a$. Pero, por otra parte, la línea quebrada va aproximándose infinitamente a la hipotenusa del triángulo cuando n crece infinitamente. Por consiguiente, la longitud de la hipotenusa es igual a la suma de las longitudes de los catetos. Este razonamiento encierra un error. Hallarlo.

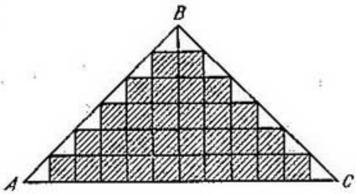

Fig. 15

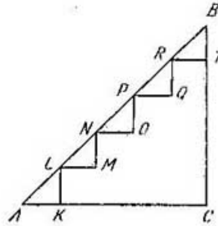

Fig. 16

419. El segmento AB cuya longitud es a, está dividido en partes iguales por n puntos, desde los cuales se han trazado rayos en ángulos

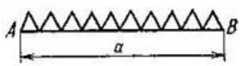

Fig. 17

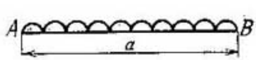

Fig. 18

$\frac{\pi}{2n}$ (véase la fig. 17). Hallar el límite de la longitud de dicha línea quebrada cuando n crece infinitamente. Comparar con el resultado del ejercicio anterior.

420. El segmento AB cuya longitud es a está dividido en n partes iguales. Los pequeños segmentos resultantes sirven de cuerdas y subtienden arcos de circunferencia, cada uno de los cuales es igual a π/n radián (véase la fig. 18). Hallar el límite de la longitud de la línea resultante cuando $n \to \infty$. ¿Cómo cambiaría el resultado si las cuerdas subtendiesen una semicircunferencia?

421. Una circunferencia cuyo radio es R está dividida por n puntos M_1, M_2, . . ., M_n en partes iguales. Cada uno de los referidos puntos sirve para trazar desde él un arco de circunferencia (cuyo radio es de r) hasta que se corte con otros arcos trazados desde los puntos vecinos (véase la fig. 19). Hallar el límite de la longitud de la línea cerrada resultante cuando n crece infinitamente.

422. Dos círculos de radios R y r respectivamente ($R > r$), tocan el eje OY en el origen de coordenadas y están colocados a la dere-

cha del eje (véase la fig. 20). ¿De qué orden, respecto a x, son el segmento infinitesimal MM' y el ángulo infinitesimal α cuando $x \to 0$?

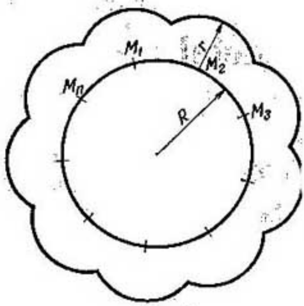

Fig. 19

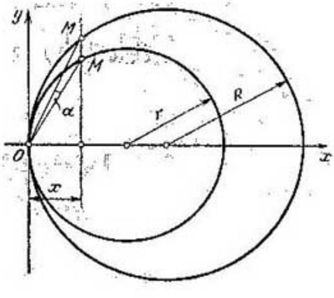

Fig. 20

423. El segmento lineal OP une el centro de una circunferencia con el punto P, que se halla fuera de aquélla. De éste trazamos una tangente PT a la circunferencia. Del punto T bajamos una perpendicular, TN, sobre la recta OP. El punto de intersección de la recta OP con la circunferencia es A. Demostrar que los segmentos AP y AN son infinitesimales equivalentes cuando $P \to A$.

424. En los puntos extremos y medio del arco AB de una circunferencia se han trazado las tangentes y los puntos A y B se han unido por una cuerda. Demostrar que la razón de las áreas de dos triángulos resultantes tiende a 4, disminuyendo infinitamente el arco AB.

Problemas de cálculo

425. Partiendo de la equivalencia de las funciones $\sqrt{1+x}-1$ y $\frac{1}{2}x$, cuando $x \to 0$, calcular aproximadamente: 1) $\sqrt{105}$; 2) $\sqrt{912}$; 3) $\sqrt{260}$; 4) $\sqrt{1632}$; 5) $\sqrt{0{,}31}$; 6) $\sqrt{0{,}021}$.

426. Mostrar que las funciones $\sqrt[n]{1+x}-1$ y x/n son infinitesimales equivalentes cuando $x \to 0$. Valerse de ello para calcular aproximadamente las raíces: 1) $\sqrt[3]{1047}$; 2) $\sqrt[3]{8144}$; 3) $\sqrt[5]{1{,}1}$; 4) $\sqrt[5]{1080}$. Hallar el valor de las referidas raíces en la tabla logarítmica. Comparar los resultados.

427. Valiéndose de la equivalencia de $\ln(1+x)$ y x cuando $x \to 0$, calcular aproximadamente los logaritmos naturales (neperianos) de los siguientes números: 1,01; 1,02; 1,1; 1,2. Hallar los logaritmos decimales de los mismos números y compararlos con los datos presentados en la tabla.

Capítulo III

Derivada y diferencial. Cálculo diferencial.

§ 1. Derivada. Velocidad de variación de la función

Algunos problemas de física

428. Dada la ecuación del movimiento rectilíneo del punto:

$$s = 5t + 6,$$

hallar la velocidad media del movimiento: a) en los primeros 6 segundos, b) en el intervalo de tiempo transcurrido entre el final del tercer segundo hasta el final del sexto segundo.

429. El punto M va alejándose del punto inmóvil A de modo que la distancia AM aumenta siendo proporcional al cuadrado de tiempo. Al transcurrir 2 min desde que comenzó el movimiento, la distancia AM era igual a 12 m. Hallar la velocidad media del movimiento: a) en los primeros 5 min; b) en el intervalo de tiempo desde $t = 4$ min hasta $t = 7$ min; c) en el intervalo de tiempo desde $t = t_1$ hasta $t = t_2$.

430. Dada la ecuación del movimiento rectilíneo:

$$s = t^3 + \frac{3}{t},$$

hallar la velocidad media del movimiento en el intervalo de tiempo desde $t = 4$ hasta $t = 4 + \Delta t$, poniendo $\Delta t = 2$; 1; 0,1; 0,03.

431. Un cuerpo efectúa la caída libre de acuerdo con la ley $s = \frac{gt^2}{2}$, donde g ($\approx 9{,}80$ m/s^2) es la aceleración de la gravedad. Hallar la velocidad media del movimiento en el intervalo de tiempo desde $t = 5$ s hasta $(t + \Delta t)$s, poniendo $\Delta t = 1$s; 0,1s; 0,05 s; 0,001s; hallar la velocidad del cuerpo en caída libre al final del quinto y del décimo segundos. Obtener la fórmula de la velocidad del cuerpo en caída libre para cualquier momento de tiempo t.

432. Consideremos una barra delgada de estructura heterogénea AB cuya longitud $L = 20$ cm. La masa de un segmento AM aumenta proporcionalmente al cuadrado de la distancia entre el punto M

y el punto A, siendo la masa del segmento $AM = 2$ cm igual a 8 g. Hallar: a) la densidad media lineal del segmento $AM = 2$ cm de la barra; b) de toda la barra; c) la densidad de la barra en el punto M.

433. La masa (en g) de una barra delgada de estructura heterogénea AB, que mide 30 cm, está distribuida de acuerdo con la ley $m = 3\,l^2 + 5\,l$, donde l es la longitud de un segmento de la barra medida a partir del punto A. Hallar: 1) la densidad media lineal de la barra; 2) la densidad lineal: a) en el punto que dista $l = 5$ cm del punto A; b) en el mismo punto A; c) en el extremo de la barra;

434. La fórmula $Q = t + 0{,}00002\ t^2 + 0{,}0000003\ t^3$ establece la cantidad de calor Q (en calorías) necesaria para que la temperatura de 1 g de agua pase de 0 a t°C. Calcular la capacidad calorífica del agua para $t = 30°$, $t = 100°$.

435*. La velocidad angular de la rotación uniforme es definida como la razón del ángulo de giro respecto al correspondiente intervalo de tiempo. Dar la definición de la velocidad angular de la rotación no uniforme.

436. Si la desintegración radiactiva se efectuase uniformemente, deberíamos comprender bajo la velocidad de desintegración la cantidad de sustancia desintegrada en la unidad de tiempo. Sin embargo, en realidad dicho proceso se verifica de modo no uniforme. Dar la definición de la velocidad de desintegración radiactiva.

437. La intensidad de la corriente continua es definida como la cantidad de electricidad que pasa por la sección transversal del conductor en la unidad de tiempo. Dar la definición de la intensidad de la corriente alterna.

438. Se llama coeficiente térmico de dilatación lineal de una barra al incremento de una unidad de su longitud al aumentar la temperatura en 1° C, suponiendo la expansión térmica uniforme. Pero, en realidad, el proceso se efectúa de modo no uniforme. Sea $l = f(t)$, donde l es la longitud de la barra, t, la temperatura. Dar la definición del coeficiente de dilatación lineal.

439. Se llama coeficiente de tracción del muelle al incremento de unidad de la longitud del muelle bajo la acción de una fuerza unitaria ejercida sobre cada centímetro cuadrado de la sección transversal del mismo. La tracción se supone proporcional al esfuerzo ejercido (ley de Hooke). Dar la definición del coeficiente de tracción k para el caso de desviación de la ley de Hooke. (Sean l la longitud del muelle, S, el área de la sección transversal, P, la fuerza de tracción, y $l = \varphi(P)$.)

Función derivada

440. Hallar el incremento de la función $y = x^3$ en el punto $x_1 = 2$, poniendo el incremento Δx de la variable independiente igual a: 1) 2; 2) 1; 3) 0,5; 4) 0,1.

441. Hallar la razón $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ para las siguientes funciones:

1) $y=2x^3-x^2+1$ para $x=1$; $\Delta x=0,1$;

2) $y=\frac{1}{x}$ para $x=2$; $\Delta x=0,01$;

3) $y=\sqrt{x}$ para $x=4$; $\Delta x=0,4$.

Mostrar que cuando $\Delta x \to 0$, el límite de la referida razón en el primer caso es igual a 4, en el segundo, $-\frac{1}{4}$, en el tercero, $\frac{1}{4}$.

442. Dada la función $y = x^2$, hallar los valores aproximados de la derivada en el punto $x = 3$, poniendo sucesivamente Δx igual a: a) 0,5; b) 0,1; c) 0,01; d) 0,001.

443. $f(x)=x^2$. Hallar $f'(5)$; $f'(-2)$; $f'\left(-\frac{3}{2}\right)$.

444. $f(x)=x^3$. Hallar $f'(1)$; $f'(0)$; $f'(-\sqrt{2})$; $f'\left(\frac{1}{3}\right)$.

445. $f(x) = x^2$. ¿En qué punto $f(x) = f'(x)$?

446. Comprobar la siguiente aserción: para la función $f(x) = x^2$ es válida la relación $f'(a+b) = f'(a) + f'(b)$.

¿Es válida esta identidad para la función $f(x) = x^3$?

447. Hallar la derivada de la función $y = \operatorname{sen} x$ para $x = 0$.

448. Hallar la derivada de la función $y = \lg x$ para $x = 1$.

449. Hallar la derivada de la función $y = 10^x$ para $x = 0$.

450. Es sabido que la función $f(0)=0$ y que existe el límite de la expresión $\frac{f(x)}{x}$ para $x \to 0$. Demostrar que este límite es igual a $f'(0)$.

451. Demostrar el siguiente teorema: si $f(x)$ y $\varphi(x)$ son iguales a cero, cuando $x = 0$ $[f(0) = 0,\ \varphi(0) = 0]$ y tienen las derivadas, para $x = 0$, siendo $\varphi'(0) \neq 0$, se tiene

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\frac{f'(0)}{\varphi'(0)}.$$

452. Demostrar lo siguiente: si $f(x)$ tiene la derivada cuando $x = a$, se tiene

$$\lim_{x\to a}\frac{xf(a)-af(x)}{x-a}=f(a)-af'(a).$$

453. Demostrar que la derivada de una función par es una función impar, mientras que la derivada de una función impar es una función par.

Interpretación geométrica de la derivada

454. Hallar el coeficiente angular de la tangente a la parábola $y = x^2$: 1) en el origen de coordenadas; 2) en el punto (3; 9); 3) en el punto (—2; 4), 4) en los puntos de intersección de la tangente con la recta $y = 3x - 2$.

455. ¿En qué puntos es igual a 3 el coeficiente angular de la tangente a la parábola cúbica $y = x^3$?

456. ¿En qué punto la tangente a la parábola $y = x^3$ 1) es paralela al eje Ox; 2) forma un ángulo de 45° con el eje Ox?

457. Una tangente a la parábola cúbica $y = x^3$ ¿puede formar un ángulo obtuso con el eje Ox?

458. ¿Qué ángulos forman al cortarse la parábola $y = x^2$ y la recta $3x - y - 2 = 0$?

459. ¿Qué ángulos forman al cortarse las parábolas $y = x^2$ e $y^2 = x$?

460. ¿Qué ángulo forman al cortarse la hipérbola $y = 1/x$ y la parábola $y = \sqrt{x}$?

461. Escribir la ecuación de la tangente y de la normal a la curva $y = x^3$ en el punto cuya abscisa es 2. Hallar la subtangente y la subnormal.

462. ¿Para qué valor de la variable independiente son paralelas las tangentes a las curvas $y = x^2$ e $y = x^3$?

463. ¿En qué punto la tangente a la parábola $y = x^2$ 1) es paralela a la recta $y = 4x - 5$; 2) es perpendicular a la recta $2x - 6y + 5 = 0$; 3) forma un ángulo de 45° con la recta $3x - y + 1 = 0$?

464. Demostrar que la subtangente correspondiente a cualquier punto de la parábola $y = ax^2$ es igual a la mitad de la abscisa del punto de tangencia. Valiéndose de esta circunstancia, formular el método para trazar la tangente a la parábola en el punto dado.

465. Demostrar que la normal a la parábola en cualquier punto que pertenezca a ésta desempeña la función de bisectriz del ángulo formado entre el radio focal del punto y la recta paralela al eje de la parábola y que pasa por el punto dado.

§ 2. Diferenciación de las funciones

Funciones exponenciales

En los ejercicios de este párrafo x, y, z, t, u, v, s son variables independientes, a, b, c, d, m, n, p, q son constantes.

466. Derivar la función:

1) $3x^2-5x+1$; 2) $x^4-\frac{1}{3}x^3+2{,}5x^2-0{,}3x+0{,}1$;

3) ax^2+bx+c; 4) $\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{2}$; 5) $2\sqrt{x}-\frac{1}{x}+\sqrt[4]{3}$;

6) $0{,}8\sqrt[4]{y}-\frac{y^3}{0{,}3}+\frac{1}{5y^2}$; 7) $\frac{x}{n}+\frac{n}{x}+\frac{x^2}{m^2}+\frac{m^2}{x^2}$;

8) $\frac{mx^2}{\sqrt{x}}+\frac{nx\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}-\frac{p\sqrt{x}}{x}$; 9) $\frac{mz^2+nz+4p}{p+q}$;

10) $0{,}1t^{-\frac{2}{3}}-\frac{5{,}2}{t^{1,4}}+\frac{2{,}5}{\sqrt[5]{t}}$; 11) $(x-0{,}5)^2$; 12) $\sqrt{x}\,(x^3-\sqrt{x}+1)$;

13) $(v+1)^2(v-1)$; 14) $0{,}5-3(a-x)^2$;

15) $\frac{ax^3+bx^2+c}{(a+b)\,x}$; 16) $\left(\frac{mu+n}{p}\right)^3$.

467. $f(x)=3x-2\sqrt{x}$. **Hallar:** $f(1)$; $f'(1)$; $f(4)$; $f'(4)$; $f(a^2)$; $f'(a^2)$.

468. $f(t)=\frac{t^2-5t-1}{t^3}$. Hallar: $f(-1)$; $f'(-1)$; $f'(2)$; $f'\left(\frac{1}{a}\right)$.

469. $f(z)=\frac{2z^3-3z+\sqrt{z}-1}{z}$. Hallar: $f'\left(\frac{1}{4}\right)$.

470. $f(x)=4-5x+2x^3-x^5$. Mostrar que

$$f'(a)=f'(-a).$$

En los ejercicios 471—489 derivar las funciones que se indican.

471. 1) $y=(x^2-3x+3)(x^2+2x-1)$;

2) $y=(x^3-3x+2)(x^4+x^2-1)$;

3) $y=(\sqrt{x}+1)\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-1\right)$;

4) $y=\left(\frac{2}{\sqrt{x}}-\sqrt{3}\right)\left(4x\sqrt[3]{x}+\frac{\sqrt[3]{x^2}}{3x}\right)$;

5) $y=(\sqrt[3]{x}+2x)(1+\sqrt[3]{x^2}+3x)$;

6) $y=(x^2-1)(x^2-4)(x^2-9)$;

7) $y=(1+\sqrt{x})(1+\sqrt{2x})(1+\sqrt{3x})$.

472. $y=\frac{x+1}{x-1}$. **473.** $y=\frac{x}{x^2+1}$.

474. $s=\frac{3t^2+1}{t-1}$. **475.** $u=\frac{v^3-2v}{v^2+v+1}$.

476. $y=\frac{ax+b}{cx+d}$. **477.** $z=\frac{x^2+1}{3(x^2-1)}+(x^2-1)(1-x)$.

478. $u=\frac{v^5}{v^3-2}$. **479.** $y=\frac{1-x^3}{1+x^3}$.

480. $y=\frac{2}{x^3-1}$. 481. $u=\frac{v^2-v+1}{a^2-3}$.

482. $y=\frac{1-x^3}{\sqrt{\pi}}$. 483. $z=\frac{1}{t^2+t+1}$.

484. $s=\frac{1}{t^2-3t+6}$. 485. $y=\frac{2x^4}{b^2-x^2}$.

486. $y=\frac{x^2+x-1}{x^3+1}$. 487. $y=\frac{3}{(1-x^2)(1-2x^3)}$.

488. $y=\frac{ax+bx^2}{am+bm^2}$. 489. $y=\frac{a^2b^2c^2}{(x-a)(x-b)(x-c)}$.

490. $f(x)=(x^2+x+1)(x^2-x+1)$; hallar $f'(0)$ y $f'(1)$.

491. $F(x)=(x-1)(x-2)(x-3)$; hallar $F'(0)$; $F'(1)$ y $F'(2)$

492. $F(x)=\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x^2+1}$; hallar $F'(0)$ y $F'(-1)$.

493. $s(t)=\frac{3}{5-t}+\frac{t^2}{5}$; hallar $s'(0)$ y $s'(2)$.

494. $y(x)=(1+x^3)\left(5-\frac{1}{x^2}\right)$; hallar $y'(1)$ y $y'(a)$.

495. $\rho(\varphi)=\frac{\varphi}{1-\varphi^2}$; hallar $\rho'(2)$ y $\rho'(0)$.

496. $\varphi(z)=\frac{a-z}{1+z}$; hallar $\varphi'(1)$.

497. $z(t)=\left(\sqrt{t^3}+1\right)t$; hallar $z'(0)$.

En los ejercicios 498—513 derivar las funciones que se indican

498. 1) $(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)$; 2) $(x^2+1)^4$; 3) $(1-x)^{20}$; 4) $(1+2x)^{30}$; 5) $(1-x^2)^{10}$; 6) $(5x^3+x^2-4)^5$; 7) $(x^3-x)^6$; 8) $\left(7x^2-\frac{4}{x}+6\right)^6$; 9) $s=\left(t^3-\frac{1}{t^3}+3\right)^4$; 10) $y=\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2$; 11) $y=\left(\frac{1+x^2}{1+x}\right)^5$; 12) $y=(2x^3+3x^2+6x+1)^4$.

499. $v=\frac{(s+4)^2}{s+3}$. 500. $s=\frac{t^3}{(1-t)^2}$.

501. $y=\frac{1+\sqrt{x}}{1+\sqrt{2x}}$. 502. $y=\frac{1-\sqrt[3]{2x}}{1+\sqrt[3]{2x}}$.

503. $y=\sqrt{1-x^2}$. 504. $y=\left(1-2x^{\frac{1}{2}}\right)^4$.

505. $u=\left(\frac{v}{1-v}\right)^m$. 506. $y=\frac{2}{(x^2-x+1)^2}$.

507. $y=\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$. 508. $y=\sqrt[3]{\frac{1}{1+x^2}}$.

509. $y=\frac{1}{\sqrt{1-x^4-x^8}}$. 510. $y=\frac{1+x}{\sqrt{1-x}}$.

511. $y=\frac{x^2}{\sqrt{x^2+a^2}}$. **512.** $u=\frac{1}{v-\sqrt{a^2+v^2}}$.

513. $y=\frac{1}{\sqrt[3]{2x-1}}+\frac{5}{\sqrt[4]{(x^2+2)^3}}$.

514. $u(v)=(v^2+v+2)^{\frac{3}{2}}$; hallar $u'(1)$.

515. $y(x)=\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$; hallar $y'(2)$.

516. $y(x)=\sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}}$; hallar $y'(0)$.

Funciones trigonométricas

En los ejercicios 517—546 derivar las funciones que se indican.

517. $y=\operatorname{sen}x+\cos x$.

518. $y=\frac{x}{1-\cos x}$. **519.** $y=\frac{\operatorname{tg}x}{x}$.

520. $\rho=\varphi\operatorname{sen}\varphi+\cos\varphi$.

521. $z=\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\alpha}+\frac{\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}$. **522.** $s=\frac{\operatorname{sen}t}{1+\cos t}$.

523. $y=\frac{x}{\operatorname{sen}x+\cos x}$. **524.** $y=\frac{x\operatorname{sen}x}{1+\operatorname{tg}x}$.

525. $y=\cos^2 x$. **526.** $y=\frac{1}{4}\operatorname{tg}^4 x$.

527. $y=\cos x-\frac{1}{3}\cos^3 x$. **528.** $y=3\operatorname{sen}^2 x-\operatorname{sen}^3 x$.

529. $y=\frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x-\operatorname{tg}x+x$. **530.** $y=x\sec^2 x-\operatorname{tg}x$.

531. $y=\sec^2 x+\operatorname{cosec}^2 x$. **532.** $y=\operatorname{sen}3x$.

533. $y=a\cos\frac{x}{3}$. **534.** $y=3\operatorname{sen}(3x+5)$.

535. $y=\operatorname{tg}\frac{x+1}{2}$. **536.** $y=\sqrt{1+2\operatorname{tg}x}$.

537. $y=\operatorname{sen}\frac{1}{x}$. **538.** $y=\operatorname{sen}(\operatorname{sen}x)$.

539. $y=\cos^3 4x$. **540.** $y=\sqrt{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}$.

541. $y=\operatorname{sen}\sqrt{1+x^2}$. **542.** $y=\operatorname{ctg}\sqrt[3]{1+x^2}$.

543. $y=(1+\operatorname{sen}^2 x)^4$. **544.** $y=\sqrt{1+\operatorname{tg}\left(x+\frac{1}{x}\right)}$.

545. $y=\cos^2\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$ **546.** $y=\operatorname{sen}^2(\cos 3x)$.

547. Deducir las fórmulas:

$$(\operatorname{sen}^n x \cos nx)' = n \operatorname{sen}^{n-1} x \cos (n+1) x;$$
$$(\operatorname{sen}^n x \operatorname{sen} nx)' = n \operatorname{sen}^{n-1} x \operatorname{sen} (n+1) x;$$
$$(\cos^n x \operatorname{sen} nx)' = n \cos^{n-1} x \cos (n+1) x;$$
$$(\cos^n x \cos nx)' = -n \cos^{n-1} x \operatorname{sen} (n+1) x.$$

Funciones trigonométricas inversas

En los ejercicios 548—572 derivar las funciones que se indican.

548. $y = x \operatorname{arcsen} x$.

549. $y = \dfrac{\operatorname{arcsen} x}{\arccos x}$.

550. $y = (\operatorname{arcsen} x)^2$.

551. $y = x \operatorname{arcsen} x + \sqrt{x - 1^2}$.

552. $y = \dfrac{1}{\operatorname{arcsen} x}$.

553. $y = x \operatorname{sen} x \operatorname{arctg} x$.

554. $y = \dfrac{\arccos x}{x}$.

555. $y = \sqrt{x} \cdot \operatorname{arctg} x$.

556. $y = (\arccos x - \operatorname{arcsen} x)^n$.

557. $y = \operatorname{arcsec} x$.

558. $y = \dfrac{x}{1+x^2} - \operatorname{arctg} x$.

559. $y = \dfrac{\operatorname{arcsen} x}{\sqrt{1-x^2}}$.

560. $y = \dfrac{x^2}{\operatorname{arctg} x}$.

561. $y = \operatorname{arcsen} (x-1)$.

562. $y = \arccos \dfrac{2x-1}{\sqrt{3}}$.

563. $y = \operatorname{arctg} x^2$.

564. $y = \operatorname{arcsen} \dfrac{2}{x}$.

565. $y = \operatorname{arcsen} (\operatorname{sen} x)$.

566. $y = \operatorname{arctg}^2 \dfrac{1}{x}$.

567. $y = \sqrt{1 - (\arccos x)^2}$.

568. $y = \operatorname{arcsen} \sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$.

569. $y = \dfrac{1}{2} \sqrt[4]{\operatorname{arcsen} \sqrt{x^2 + 2x}}$.

570. $y = \operatorname{arcsen} \dfrac{\operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} x}{1 - \cos \alpha \operatorname{sen} x}$.

571. $y = \arccos \dfrac{b + a \cos x}{a + b \cos x}$.

572. $y = \operatorname{arctg} (x - \sqrt{1+x^2})$.

Funciones logarítmicas

En los ejercicios 573—597 derivar las funciones que se indican.

573. $y = x^2 \log_3 x$.

574. $y = \ln^2 x$.

575. $y = x \lg x$.

576. $y = \sqrt{\ln x}$.

577. $y = \dfrac{x-1}{\log_2 x}$.

578. $y = x \operatorname{sen} x \ln x$.

579. $y=\frac{1}{\ln x}$. 580. $y=\frac{\ln x}{x^n}$.
581. $y=\frac{1-\ln x}{1+\ln x}$. 582. $y=\frac{\ln x}{1+x^2}$.
583. $y=x^n \ln x$. 584. $y=\sqrt{1+\ln^2 x}$.
585. $y=\ln(1-2x)$. 586. $y=\ln(x^2-4x)$.
587. $y=\ln \operatorname{sen} x$. 588. $y=\log_3(x^2-1)$.
589. $y=\ln \operatorname{tg} x$. 590. $y=\ln \arccos 2x$.
591. $y=\ln^4 \operatorname{sen} x$. 592. $y=\operatorname{arctg}[\ln(ax+b)]$.
593. $y=(1+\ln \operatorname{sen} x)^n$. 594. $y=\log_2[\log_3(\log_5 x)]$.
595. $y=\ln \operatorname{arctg}\sqrt{1+x^2}$. 596. $y=\operatorname{arcsen}^2 \ln(a^3+x^3)]$.
597. $y=\sqrt[3]{\ln \operatorname{sen}\frac{x+3}{4}}$.

Funciones exponenciales

En los ejercicios 598—633 derivar las funciones que se indican.

598. $y=2^x$. 599. $y=10^x$. 600. $y=\frac{1}{3^x}$.
601. $y=\frac{x}{4^x}$. 602. $y=x\cdot 10^x$. 603. $y=xe^x$.
604. $y=\frac{x}{e^x}$. 605. $y=\frac{x^3+2x}{e^x}$. 606. $y=e^x\cos x$.
607. $y=\frac{e^x}{\operatorname{sen} x}$. 608. $y=\frac{\cos x}{e^x}$. 609. $y=2^{\frac{x}{\ln x}}$.
610. $y=x^3-3^x$. 611. $y=\sqrt{1+e^x}$.
612. $y=(x^2-2x+3)e^x$. 613. $y=\frac{1+e^x}{1-e^x}$.
614. $y=\frac{1-10^x}{1+10^x}$. 615. $y=\frac{e^x}{1+x^2}$.
616. $y=xe^x(\cos x+\operatorname{sen} x)$. 617. $y=e^{-x}$.
618. $y=10^{2x-3}$. 619. $y=e^{\sqrt{x+1}}$.
620. $y=\operatorname{sen}(2^x)$. 621. $y=3^{\operatorname{sen} x}$.
622. $y=a^{\operatorname{sen}^3 x}$. 623. $y=e^{\operatorname{arcsen} 2x}$.
624. $y=2^{3^x}$. 625. $y=e^{\sqrt{\ln x}}$.
626. $y=\operatorname{sen}(e^{x^2+3x-2})$. 627. $y=10^{1-\operatorname{sen}^4 3x}$.
628. $y=e^{\sqrt{\ln(ax^2+bx+c)}}$. 629. $y=\ln \operatorname{sen}\sqrt[3]{\operatorname{arctg} e^{3x}}$.
630. $y=ae^{-b^2x^2}$. 631. $y=x^2e^{-\frac{x^2}{a^2}}$.
632. $y=Ae^{-k^2x}\operatorname{sen}(\omega x+\alpha)$. 633. $y=a^x x^a$.

Funciones hiperbólicas

En los ejercicios 634—649 derivar las funciones que se indican.

634. $y = \operatorname{sh}^3 x$. 635. $y = \ln \operatorname{ch} x$.
636. $y = \operatorname{arctg} (\operatorname{th} x)$. 637. $y = \operatorname{th} (1 - x^2)$.
638. $y = \operatorname{sh}^2 x + \operatorname{ch}^2 x$. 639. $y = \operatorname{ch} (\operatorname{sh} x)$.
640. $y = \sqrt{\operatorname{ch} x}$. 641. $y = e^{\operatorname{ch}^2 x}$.
642. $y = \operatorname{th} (\ln x)$. 643. $y = x \operatorname{sh} x - \operatorname{ch} x$.
644. $y = \sqrt[3]{(1 + \operatorname{th}^2 x)^3}$. 645. $y = \frac{1}{2} \operatorname{th} \frac{x}{2} - \frac{1}{6} \operatorname{th}^3 \frac{x}{2}$.
646. $y = \sqrt[4]{\frac{1 + \operatorname{th} x}{1 - \operatorname{th} x}}$.
647. $y = \frac{1}{2} \operatorname{th} x + \frac{\sqrt{2}}{8} \ln \frac{1 + \sqrt{2} \operatorname{th} x}{1 - \sqrt{2} \operatorname{th} x}$.
648. $y = \frac{1}{x} \operatorname{ch} 2x + \sqrt{x} \operatorname{sh} 2x$. 649. $y = x^2 e^{3x} \operatorname{cosech} x$.

Derivación logarítmica

En los ejercicios 650—666 derivar las funciones que se indican aplicando la regla de la derivación logarítmica.

650. $y = x^{x^2}$. 651. $y = x^{x^x}$.
652. $y = (\operatorname{sen} x^{\cos x})$. 653. $y = (\ln x)^x$.
654. $y = (x + 1)^{2/x}$. 655. $y = x^3 e^{x^2} \operatorname{sen} 2x$.
656. $y = \frac{(x-2)^2 \sqrt[3]{x+1}}{(x-5)^3}$. 657. $y = x^{\ln x}$.
658. $y = \frac{(x+1)^3 \sqrt[4]{x-2}}{\sqrt[5]{(x-3)^2}}$. 659. $y = \sqrt{x \operatorname{sen} x \sqrt{1 - e^x}}$.
660. $y = \sqrt{\frac{1 - \operatorname{arcsen} x}{1 + \operatorname{arcsen} x}}$. 661. $y = x^{\frac{1}{x}}$.
662. $y = x^{\operatorname{sen} x}$. 663. $y = \left(\frac{x}{1+x}\right)^x$.
664. $y = 2x^{\sqrt{x}}$. 665. $y = (x^2 + 1)^{\operatorname{sen} x}$.
666. $y = \sqrt[3]{\frac{x(x^2+1)}{(x^2-1)^2}}$.

Funciones diversas

En los ejercicios 667—770 derivar las funciones que se indican.

667. $y = (1 + \sqrt[3]{x})^3$. 668. $y = a \operatorname{tg} \left(\frac{x}{k} + b\right)$.
669. $y = \sqrt{1 + \sqrt{2px}}$. 670. $y = \operatorname{arctg} (x^2 - 3x + 2)$.

671. $y = \lg(x - \cos x)$.

672. $y = 3\cos^2 x - \cos^3 x$.

673. $y = 5\operatorname{tg}\frac{x}{5} + \operatorname{tg}\frac{\pi}{8}$.

674. $y = \frac{1}{\sqrt[3]{x + \sqrt{x}}}$.

675. $y = \operatorname{sen}\frac{x}{2}\operatorname{sen} 2x$.

676. $y = \operatorname{sen} x \cdot e^{\cos x}$

677. $y = y^5\sqrt[3]{x^6 - 8}$

678. $y = e^{-x^2}\ln x$.

679. $y = \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{10}$.

680. $y = \operatorname{arctg}\frac{x+1}{x-1}$.

681. $y = e^{2x+3}\left(x^2 - x + \frac{1}{2}\right)$.

682. $y = \frac{2\operatorname{sen}^2 x}{\cos 2x}$.

683. $y = \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{3}}{1-x^2}$.

684. $y = \frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2} + \operatorname{ctg}\frac{x}{2}}{x}$.

685. $y = \operatorname{sen}^2\frac{x}{3}\operatorname{ctg}\frac{x}{2}$.

686. $y = \frac{\sqrt[9]{4x^5+2}}{3x^4}$.

687. $y = \ln\left(x + \sqrt{a^2 + x^2}\right)$.

688. $y = x\operatorname{arctg}\sqrt{x}$.

689. $y = \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg}^4 x}$.

690. $y = \cos 2x \ln x$.

691. $y = \frac{2}{3}\operatorname{arctg} x + \frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{1-x^2}$.

692. $y = \operatorname{arcsen}(n \operatorname{sen} x)$.

693. $y = \operatorname{arcsen}\sqrt{\operatorname{sen} x}$.

694. $y = \frac{1}{18}\operatorname{sen}^6 3x - \frac{1}{24}\operatorname{sen}^8 3x$.

695. $y = x - \sqrt{1-x^2}\operatorname{arcsen} x$.

696. $y = \cos\frac{\operatorname{arcsen} x}{2}$.

697. $y = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$.

698. $\arccos\sqrt{1-3x}$.

699. $y = \operatorname{sen}^2\left(\frac{1-\ln x}{x}\right)$.

700. $y = \log_3(x^2 - \operatorname{sen} x)$.

701. $y = \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$.

702. $y = \ln\frac{x + \sqrt{1-x^2}}{x}$.

703. $y = x\operatorname{arcsen}(\ln x)$.

704. $y = \operatorname{tg}\frac{1-e^x}{1+e^x}$.

705. $y = \cos x\sqrt{1 + \operatorname{sen}^2 x}$.

706. $y = 0{,}4\left(\cos\frac{2x+1}{2} - \operatorname{sen} 0{,}8x\right)^2$.

707. $y = x \cdot 10^{\sqrt{x}}$.

708. $y = \frac{1}{\operatorname{tg}^2 2x}$.

709. $y = \ln\operatorname{arctg}\frac{1}{1+x}$.

710. $y = \ln\frac{1}{x + \sqrt{x^2-1}}$.

711. $y = \sqrt[3]{1 + x\sqrt{x+3}}$.

712. $y = x^2\sqrt{1 + \sqrt{x}}$.

713. $y = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{sen}^2 x}}$.

714. $y = x^3\operatorname{arctg} x^3$.

715. $y=\frac{\ln \operatorname{sen} x}{\ln \cos x}$.

716. $y=\operatorname{arcsen} x+\sqrt{1-x^2}$.

717. $y=\frac{\operatorname{arcsen} 4x}{1-4x}$.

718. $y=e^{\frac{1}{\ln x}}$.

719. $y=\ln \frac{1-e^x}{e^x}$

720. $y=10^{x \operatorname{tg} x}$.

721. $y=\operatorname{sen}^2 x \cdot \operatorname{sen} x^2$.

722. $y=\frac{2\cos x}{\sqrt{\cos 2x}}$.

723. $y=x\sqrt{\frac{1-x}{1+x^2}}$.

724. $y=\frac{1}{4}\ln\frac{1+x}{1-x}-\frac{1}{2}\operatorname{arctg} x$.

725. $y=2^{\frac{x}{\ln x}}$,

726. $y=\sqrt{(a-x)(x-b)}-(a-b)\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{a-x}{x-b}}$.

727. $y=\frac{\operatorname{sen} 3x}{2\operatorname{sen}^2 x\cos x}$.

728. $y=e^{\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}$.

729. $y=\sqrt{a^2-x^2}-a\arccos\frac{x}{a}$.

730. $y=\sqrt{x^2+1}-\ln\left(\frac{1}{x}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)$.

731. $y=\frac{\operatorname{sen}^2 x}{1+\operatorname{ctg} x}+\frac{\cos^2 x}{1+\operatorname{tg} x}$.

732. $y=\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)-\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$.

733. $y=e^{ax}(a\operatorname{sen} x-\cos x)$.

734. $y=xe^{1-\cos x}$.

735. $y=\frac{1}{\operatorname{arctg} e^{-2x}}$.

736. $y=e^x(\operatorname{sen} 3x-3\cos 3x)$.

737. $y=3x^3\operatorname{arcsen} x+(x^2+2)\sqrt{1-x^2}$.

738. $y=\frac{1}{\sqrt{1+e^{-\sqrt{x}}}}$.

739. $y=2\operatorname{arcsen}\frac{x-2}{\sqrt{6}}-\sqrt{2+4x-x^2}$.

740. $y=\ln(e^x\cos x+e^{-x}\operatorname{sen} x)$.

741. $y=\frac{1+x\operatorname{arctg} x}{\sqrt{1+x^2}}$.

742. $y=\frac{1}{\cos(x-\cos x)}$.

743. $y=e^x\operatorname{sen} x\cos^3 x$.

744. $y=\sqrt[11]{9+6\sqrt[5]{x^9}}$.

745. $y=x-\ln\left(2e^x+1+\sqrt{e^{2x}+4e^x+1}\right)$.

746. $y=e^{\operatorname{arctg}\sqrt{1+\ln(2x+3)}}$.

747. $y=\frac{e^{x^2}}{e^x+e^{-x}}$.

748. $y=\ln\operatorname{tg}\frac{x}{2}-\operatorname{ctg} x\ln(1+\operatorname{sen} x)-x$.

749. $y=2\ln\left(2x-3\sqrt{1-4x^2}\right)-6\arcsen 2x$.

750. $y=\frac{3x^2-1}{3x^3}+\ln\sqrt{1+x^2}+\operatorname{arctg} x$.

751. $y=\frac{1}{2}(3-x)\sqrt{1-2x-x^2}+2\arcsen\frac{x+1}{\sqrt{2}}$.

752. $y=\ln\left(x\operatorname{sen} x\sqrt{1-x^2}\right)$. 753. $y=x\sqrt{1+x^2}\operatorname{sen} x$.

754. $y=\frac{\sqrt{x+2}\,(3-x)^4}{(x+1)^5}$. 755. $y=\sqrt[5]{(1+xe^{\sqrt{x}})^3}$.

756. $y=\frac{1}{\sqrt{x}}e^{x^2-\operatorname{arctg} x+\frac{1}{2}\ln x+1}$.

757. $y=\frac{\operatorname{sen} x}{4\cos^4 x}+\frac{3\operatorname{sen} x}{8\cos^2 x}+\frac{3}{8}\ln\frac{1+\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1-\operatorname{tg}\frac{x}{2}}$.

758. $y=\frac{xe^x\operatorname{arctg} x}{\ln^5 x}$. 759. $y=\frac{(1-x^2)\,e^{3x-1}\cos x}{(\arccos x)^3}$.

760. $y=x\sqrt{(x^2+a^2)^3}+\frac{3a^2x}{2}\sqrt{x^2+a^2}+\frac{3a^4}{2}\ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)$.

761. $y=x(\arcsen x)^2-2x+2\sqrt{1-x^2}\arcsen x$.

762. $y=\ln\cos\operatorname{arctg}\frac{e^x-e^{-x}}{2}$.

763. $y=\frac{1}{m\sqrt{ab}}\operatorname{arctg}\left(e^{mx}\sqrt{\frac{a}{b}}\right)$.

764. $y=\frac{1}{3}\ln\frac{x+1}{\sqrt{x^2-x+1}}\ln\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}$.

765. $y=\ln\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}+2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$.

766. $y=(\operatorname{tg} 2x)^{\operatorname{ctg}\frac{x}{2}}$. 767. $y=\sqrt[3]{\frac{x-5}{\sqrt[5]{x^2+4}}}$.

768. $y=\ln\sqrt[4]{\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}}+\frac{1}{2\sqrt{3}}\left(\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)$.

769. $y=\arccos\frac{x^{2n}-1}{x^{2n}+1}$.

770. $y=-\frac{x}{1+8x^3}+\frac{1}{12}\ln\frac{(1+2x)^2}{1-2x+4x^2}+\frac{\sqrt{3}}{6}\operatorname{arctg}\frac{4x-1}{\sqrt{3}}$.

771. Demostrar que la función $y=\ln\frac{1}{1+x}$ satisface la relación $xy'+1=e^y$.

772. Demostrar que la función

$$y=\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}x\sqrt{x^2+1}+\ln\sqrt{x+\sqrt{x^2+1}}$$

satisface la relación $2y=xy'+\ln y'$.

773. Demostrar que la función $y=\frac{\operatorname{arcsen} x}{\sqrt{1-x^2}}$ satisface la relación $(1-x^2)\,y'-xy=1$.

774*. Calcular las sumas

a) $1+2x+3x^2+\ldots+nx^{n-1}$;

b) $2+2\cdot 3x+3\cdot 4x^2+\ldots+n(n-1)x^{n-2}$.

Funciones inversas

775. Supongamos que la regla para derivar la función potencial fue establecida sólo para un exponente entero positivo. Deducir la fórmula para derivar la raíz, aplicando la regla para derivar la función inversa.

776. $x=e^{\operatorname{arcsen} y}$; hallar la expresión para $\frac{dy}{dx}$ mediante y, mediante x.

777. $t=2-3s+s^3$; expresar $\frac{ds}{dt}$ mediante s.

778. $u=\frac{1}{2}\ln\frac{1+v}{1-v}$; comprobar la relación $\frac{du}{dv}\cdot\frac{dv}{du}=1$.

779. Teniendo en cuenta que las funciones $\operatorname{arcsen}\sqrt{x}$ y $\operatorname{sen}^2 x$ son recíprocamente inversas y que $(\operatorname{sen}^2 x)'=\operatorname{sen} 2x$, hallar $(\operatorname{arcsen}\sqrt{x})'$.

780. Designemos la función, inversa a la función potencial exponencial $y=x^x$, por el símbolo $\alpha(x)$, es decir, supongamos que de $y=x^x$ se deduce $x=\alpha(y)$. Hallar la fórmula para la derivada de la función $y=\alpha(x)$.

781. Las funciones que son inversas a las funciones hipebólicas son designadas por los símbolos $\operatorname{Arsh} x$, $\operatorname{Arch} x$, $\operatorname{Arth} x$. Hallar las derivadas de estas funciones.

782. $s=te^{-t}$; hallar $\frac{dt}{ds}$.

783. $y=\frac{1-x^4}{1+x^4}$. Expresar $\frac{dx}{dy}$ mediante x, mediante y. Mostrar que es válida la relación $\frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{dy}=1$.

784. $x=y^3-4y+1$. Hallar $\frac{dy}{dx}$.

785. $t=\operatorname{arcsen} 2^s$. Hallar la expresión para $\frac{ds}{dt}$ mediante s, mediante t.

786. Comprobar la validez de la relación $\frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{dy}=1$, si x e y se relacionan por medio de la dependencia:

1) $y = x^2 + ax + b$; 2) $y = x^{-n}$;

3) $y = \ln(x^2 - 1)$.

Funciones dadas en forma implícita

787. Aplicando la derivación mostrar que las derivadas de los dos miembros de la igualdad $\operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x$ son idénticamente iguales entre sí.

788. Aplicando la derivación mostrar que las derivadas de los dos miembros de la igualdad

$$\frac{2\operatorname{sen}^2 x-1}{\cos x}+\frac{\cos x\,(2\operatorname{sen} x+1)}{1+\operatorname{sen} x}=\operatorname{tg} x$$

son idénticamente iguales entre sí.

789. ¿A qué es igual el coeficiente angular de la tangente a la elipse $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{4}=1$ en el punto $(1, \sqrt{2})$?

790. ¿A qué es igual el coeficiente angular de la tangente a la hipérbola $xy = a$ $(a = 0)$ en el punto $(a, 1)$?

791. ¿A qué es igual el coeficiente angular de la tangente a la circunferencia $(x-1)^2 + (y+3)^2 = 17$ en el punto $(2, 1)$?

En los ejercicios 792—812 hallar las derivadas de las funciones y dadas en forma implícita.

792. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. **793.** $x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{1}{2}}$.

794. $x^3 + y^3 - 3axy = 0$. **795.** $y^2 \cos x = a^2 \operatorname{sen} 3x$.

796. $y^3 - 3y + 2ax = 0$. **797.** $y^2 - 2xy + b^2 = 0$.

798. $x^4 + y^4 = x^2y^2$. **799.** $x^3 + ax^2y + bxy^2 + y^3 = 0$.

800. $\operatorname{sen}(xy) + \cos(xy) = \operatorname{tg}(x+y)$. **801.** $2^x + 2^y = 2^{x+y}$.

802. $2y \ln y = x$. **803.** $x - y = \operatorname{arcsen} x - \operatorname{arcsen} y$.

804. $x^y = y^x$. **805.** $y = \cos(x+y)$.

806. $\cos(xy) = x$. **807.** $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$.

808. $y = 1 + xe^y$.

809. $x \operatorname{sen} y - \cos y + \cos 2y = 0$.

810. $\operatorname{tg}\frac{y}{2}=\sqrt{\frac{1-k}{1+k}}\operatorname{tg}\frac{x}{2}$.

811. $y \operatorname{sen} x - \cos(x-y) = 0$.

812. $y = x + \operatorname{arctg} y$.

813. Mostrar que la función y definida por la ecuación $xy - \ln y = 1$, satisface también la relación

$$y^2+(xy-1)\frac{dy}{dx}=0.$$

Aplicaciones de la derivada

814. En la parábola $y = x^2$ se han marcado dos puntos cuyas abscisas son $x_1 = 1$, $x_2 = 3$. Por éstos puntos pasa la secante. ¿En qué punto de la parábola la tangente a ésta es paralela a la secante trazada?

815. Una cuerda está trazada de manera que pasa por el foco de la parábola y es perpendicular al eje de ésta. Por los puntos de intersección de la cuerda y la parábola pasan tangentes. Demostrar que éstas se cortan en ángulo recto.

816. Escribir la ecuación de la tangente y de la normal a la hipérbola $y = 1/x$ en el punto cuya abscisa es $x = -1/2$. Hallar la subtangente y la subnormal.

817. Mostrar que el segmento de la tangente a la hipérbola $y = \frac{a}{x}$ comprendido entre los ejes de coordenadas está dividido en dos partes iguales por el punto de contacto.

818. Mostrar que respecto a la hipérbola $xy = a$ el área del triángulo formado por cualquier tangente y los ejes de coordenadas es igual al cuadrado del semieje de la hipérbola.

819. Un punto móvil se desplaza sobre una recta de modo que su distancia s del punto inicial al cabo de t s es igual a $s = \frac{1}{4}t^4 - 4t^3 + 16t^2$.

a) ¿En qué momentos se encontró en el punto inicial el punto referido? b) ¿En qué momentos fue igual a cero su velocidad?

820. Un cuerpo cuya masa es de 3 kg efectúa movimiento rectilíneo de acuedro con la ley

$$s = 1 + t + t^2,$$

s viene expresada en centímetros, t, en segundos. Determinar la energía cinética $\left(\frac{mv^2}{2}\right)$ del cuerpo al cabo de 5 s al iniciar el movimiento.

821. El ángulo α de giro de una polea en función del tiempo t viene expresado por la función $\alpha = t^2 + 3t - 5$. Hallar la velocidad angular para $t = 5$ s.

822. Una rueda gira de modo que el ángulo de giro es proporcional al cuadrado de tiempo. La primera vuelta ha sido realizada en 8 s. Hallar la velocidad angular ω al cabo de 32 s al comenzar el movimiento.

823. El ángulo θ, que se forma al dar una vuelta una rueda, al cabo de t segundos, es igual a $\theta = at^2 - bt + c$, donde a, b, c son constantes positivas. Hallar la velocidad angular ω de la rotación de la rueda. ¿En qué momento es igual a cero la velocidad angular?

824. La cantidad de electricidad que pasa por un conductor a partir del momento de tiempo $t = 0$, se calcula con la fórmula siguiente

$$Q = 2t^2 + 3t + 1 \text{ (culombios).}$$

Hallar la intensidad de corriente al final del quinto segundo.

825. En la línea $y = x^2 (x - 2)^2$ hallar los puntos en los cuales las tangentes sean paralelas al eje de abscisas.

826. Mostrar que la línea $y = x^5 + 5x - 12$ en todos sus puntos está inclinada hacia el eje Ox, formándose entre ellos un ángulo agudo

827. ¿En qué puntos de la línea $y = x^3 + x - 2$ la tangente a ella es paralela a la recta $y = 4x - 1$?

828. Formar las ecuaciones de las tangentes a la línea $y = x - \frac{1}{x}$ en los puntos de su intersección con el eje de abscisas.

829. Formar la ecuación de la tangente a la línea $y = x^3 + 3x^2 - 5$, perpendicular a la recta $2x - 6y + 1 = 0$.

En los ejercicios 830—833 formar las ecuaciones de la tangente y de la normal a las líneas que se indican.

830. $y = \operatorname{sen} x$ en el punto $M(x_0, y_0)$.

831. $y = \ln x$ en el punto $M(x_0, y_0)$.

832. $y = \frac{8a^3}{4a^2 + x^2}$ en el punto cuya abscisa es $x = 2a$.

833. $y^2 = \frac{x^3}{2a - x}$ (cisoide) en el punto $M(x_0, y_0)$.

834. Mostrar que la subtangente a una parábola de n-ésimo orden $y = x^n$ es igual a $\frac{1}{n}$ parte de la abscisa del punto de contacto.

Indicar el modo de construir la tangente a la línea $y = x^n$.

835. Hallar las subtangentes y las subnormales a la línea $y = x^3$, $y^2 = x^3$, $xy^2 = 1$. Indicar el modo de construir las tangentes a las líneas indicadas.

836. Formar las ecuaciones de la tangente y de la normal a la parábola $x^2 = 4\,ay$ en su punto (x_0, y_0). Mostrar que la tangente en el punto cuya abscisa es $x_0 = 2am$ tiene la siguiente ecuación $x = \frac{y}{m} + am$.

837. La cuerda de la parábola $y = x^2 - 2x + 5$ une los puntos cuyas abscisas son $x_1 = 1$, $x_2 = 3$. Formar la ecuación de la tangente a la parábola paralela a la cuerda.

838. Formar la ecuación de la normal a la línea $y = \frac{x^2 - 3x + 6}{x^2}$ en el punto cuya abscisa es $x = 3$.

839. Formar la ecuación de la normal a la línea $y = -\sqrt{x} + 2$ en el punto de su intersección con la bisectriz del primer ángulo coordenado.

840. Formar la ecuación de la normal a la parábola $y = x^2 - 6x + 6$ perpendicular a la recta que une el origen de coordenadas con el vértice de la parábola.

841. Mostrar que las normales a la línea $y = x^2 - x + 1$, trazadas en los puntos cuyas abscisas son $x_1 = 0$, $x_2 = -1$, $x_3 = 5/2$ se cortan en un solo punto.

842. En los puntos de intersección de la recta $x - y + 1 = 0$ y la parábola $y = x^2 - 4x + 5$ están trazadas las normales a la parábola.

Hallar el área del triángulo engendrado por las normales y la cuerda que subtiende los referidos puntos de intersección.

843. Mostrar que las tangentes a la hipérbola $y = \frac{x-4}{x-2}$ en los puntos de su intersección con los ejes de coordenadas son paralelas entre sí.

844. Trazar la tangente a la hipérbola $y = \frac{x+9}{x+5}$ de modo que atraviese el origen de coordenadas.

845. En la línea $y = \frac{1}{1+x^2}$ hallar el punto en el cual la tangente sea paralela al eje de abscisas.

846. Hallar la ecuación de la tangente a la línea

$$x^2 (x + y) = a^2 (x - y)$$

en el origen de coordenadas.

847. Demostrar que las tangentes a la línea $y = \frac{1+3x^2}{3+x^2}$ trazadas en los puntos en los cuales $y = 1$, se cortan en el origen de coordenadas.

848. Trazar la normal a la línea $y = x \ln x$ que sea paralela a la recta $2x - 2y + 3 = 0$.

849. Hallar la distancia que media entre el origen de coordenadas y la normal a la línea $y = e^{2x} + x^2$, trazada en el punto $x = 0$.

850. Construir la gráfica de la función $y = \operatorname{sen}(2x - \pi/3)$ y hallar el punto de intersección de las tangentes a la gráfica, trazadas en los puntos cuyas abscisas son $x_1 = 0$ y $x_2 = 5\pi/12$.

851. Mostrar que la subtangente a la línea $y = ae^{bx}$ (donde a y b son constantes) tiene longitud constante en todos los puntos.

852. Mostrar que la subnormal a la línea $y = x \ln (cx)$ (donde c es cualquier constante) en cualquier punto de la línea referida es la cuarta proporcional a la abscisa, a la ordenada y a la suma de la abscisa y de la ordenada del punto referido.

853. Mostrar que cualquier tangente a la línea

$$y = \frac{1}{2}\sqrt{x - 4x^2}.$$

se corta con el eje de ordenadas en un punto equidistante entre el punto de contacto y el origen de coordenadas.

854. Mostrar que la tangente a la elipse $\frac{x^2}{a_2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ en el punto $M(x_0, y_0)$ tiene la siguiente ecuación $\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}=1$.

855. Mostrar que la tangente a la hipérbola $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ en el punto $M(x_0, y_0)$ tiene la siguiente ecuación $\frac{xx_0}{a^2}-\frac{yy_0}{b^2}=1$.

856. Demostrar que la normal a la elipse en cualquier punto que le pertenezca divide en dos el ángulo entre los radios focales de este

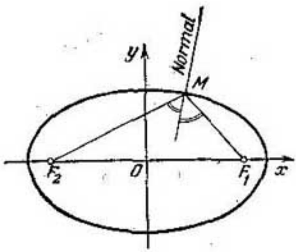

Fig. 21

punto (véase la fig. 21). Deducir el procedimiento para construir la tangente y la normal a la elipse.

857. Formar las ecuaciones de las tangentes a la hipérbola $\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{7}=1$ que sean perpendiculares a la recta $2x+4y-3=0$.

858. Una recta pasa por el origen de coordenadas y es paralela a la tangente trazada a una curva en un punto cualquiera M de la misma. Hallar el lugar geométrico P de los puntos de intersección de la recta referida con una recta que sea paralela al eje de ordenadas y que pase por el punto M.

Hallar tales lugares geométricos para a) la parábola $y^2=2px$, b) la logarítmica $y=\log_b x$, c) la circunferencia $x^2+y^2=a^2$, d) la tractriz

$$y=\sqrt{a^2-x^2}-a\ln\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x}.$$

En los ejercicios 859—864 hallar los ángulos que se forman al cortarse las líneas que se indican.

859. 1) $y=\frac{x+1}{x+2}$ e $y=\frac{x^2+4x+8}{16}$.

2) $y=(x-2)^2$ e $y=4x-x^2+4$.

860. 1) $x^2+y^2=8$ e $y^2=2x$.

2) $x^2+y^2-4x=1$ y $x^2+y^2+2y=9$.

861. $x^2-y^2=5$ y $\frac{x^2}{18}+\frac{y^2}{8}=1$.

862. $x^2+y^2=8ax$ e $y^2=\frac{x^3}{2a-x}$.

863. $x^2=4ay$ e $y=\frac{8a^3}{x^2+4a^2}$.

864. $y=\operatorname{sen} x$ e $y=\cos x$ $(0\leqslant x\leqslant \pi)$.

865. Formar la ecuación de la tangente y de la normal a la línea

$$\left(\frac{x}{a}\right)^n+\left(\frac{y}{b}\right)^n=2$$

en el punto cuya abscisa es a.

866. Demostrar que la suma de los segmentos formados en los ejes de coordenadas por la tangente a la curva $x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{1}{2}}$ es igual a a para todos sus puntos.

867. Mostrar que el segmento de la tangente a la astroide $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ limitado por los ejes de coordenadas tiene longitud constante e igual a a.

868. Demostrar que el segmento de la tangente a la tractriz

$$y=\frac{a}{2}\ln\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{a-\sqrt{a^2-x^2}}-\sqrt{a^2-x^2}$$

limitado por los ejes de ordenadas y el punto de contacto, tiene longitud constante.

869. Mostrar que para cualquier punto M (x_0, y_0) de la hipérbola equilátera $x^2-y^2=a^2$ el segmento de la normal desde el punto M hasta el punto de intersección con el eje de abscisas es igual al radio polar del punto M.

870. Mostrar que el segmento cortado en el eje de abscisas por la tangente en un punto cualquiera de la curva $\frac{a}{x^2}+\frac{b}{y^2}=1$, es proporcional al cubo de la abscisa del punto de contacto.

871. Demostrar que la ordenada de cualquier punto de la línea $2x^2y^2-x^4=c$ (donde c es una constante) es una media proporcional entre la abscisa y la diferencia entre la abscisa y la subnormal trazada a la línea en el mismo punto.

872. Dadas las elipses $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ cuyo eje $2a$ es común, mientras que los ejes $2b$ son diferentes (véase la fig. 22), demostrar que las

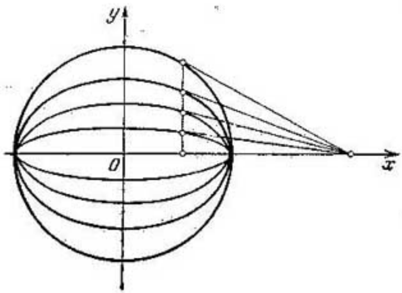

Fig. 22

tangentes trazadas en los puntos cuyas abscisas son las mismas, se cortan en un mismo punto que pertenece al eje de abscisas. Valiéndose de ello, señalar un procedimiento sencillo para construir la tangente a la elipse.

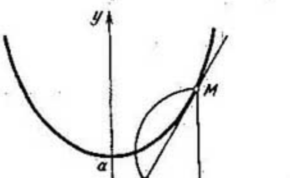

Fig. 23

873. Mostrar que la línea $y=e^{kx}$ sen mx toca cada una de las líneas $y=e^{kx}$, $y=-e^{kx}$ en todos los puntos que son comunes para ellas.

874. Para construir la tangente a la catenaria $y=a\,\mathrm{ch}\,\frac{x}{2}$ se procede de la manera siguiente: en la ordenada MN del punto M, que sirve de diámetro, se traza una semicircunferencia (véase la fig. 23) y se marca la cuerda $NP=a$; la recta MP será la tangente buscada. Demostrarlo.

Derivación gráfica

875. Al pasar la corriente eléctrica por el devanado del electroimán de un motor ha sido medida la temperatura, lo cual ha dado los siguientes resultados:

Tiempo t (en min)	0	5	10	15	20	25
Temperatura θ °C	20	26	32,5	41	46	49
Tiempo t (en min)	30	35	40	45	50	55
Temperaturt θ °C	52,5	54,5	56,5	58	59,5	61

Construir una gráfica aproximada de la dependencia continua de la temperatura en función del tiempo. Después de haber efectuado la derivación gráfica, construir la gráfica que muestre a qué velocidad varía la temperatura en función del tiempo.

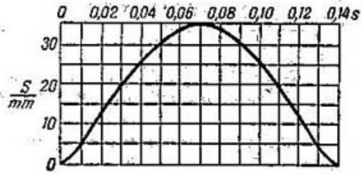

Fig. 24

876. La fig. 24 presenta la curva de la subida que efectúa la válvula de admisión del cilindro de una máquina de vapor (de baja presión). Construir la curva de velocidad aplicando la derivación gráfica.

§ 3. Diferencial. Diferenciabilidad de la función

Diferencial

877. Hallar el incremento de la función $y = x^2$ correspondiente al incremento Δx de la variable independiente. Calcular Δy, si $x = 1$ y $\Delta x = 0{,}1$; $0{,}01$; ¿Cuál será el error (absoluto y relativo) del valor de Δy, si se limita al término que contiene sólo el primer grado de Δx?

878. Hallar el incremento Δv del volumen v de una esfera al aumentar el radio $R = 2$ en ΔR. Calcular Δv, si $\Delta R = 0{,}5$; $0{,}1$; $0{,}01$. ¿Cuál será el error en el valor de Δv, si se limita al término que contiene sólo el primer grado de ΔR?

879. Dada la función $y = x^3 + 2x$, hallar el valor del incremento y de su parte lineal principal que corresponden a la variación de x desde $x = 2$ hasta $x = 2{,}1$.

880. ¿Qué incremento recibe la función $y = 3x^2 - x$ al pasar el valor de la variable independiente de $x = 1$ a $x = 1{,}02$? ¿Cuál es el valor de la parte lineal principal correspondiente? Hallar la razón entre los valores segundo y primero.

881. Dados la función $y = f(x)$ y el incremento $\Delta x = 0{,}2$ en un punto x, hallar la derivada en el punto x, tomando en consideración que la parte principal correspondiente del incremento de la función resultó igual a $0{,}8$.

882. Sea dada la función $f(x) = x^2$. Es sabido que en un punto al incremento de la variable independiente $\Delta x = 0{,}2$ le corresponde la parte principal del incremento de la función $df(x) = -0{,}8$. Hallar el valor inicial de la variable independiente.

883. Hallar el incremento y la diferencial de la función $y = x^2 - x$ para $x = 10$ y $\Delta x = 0{,}1$. Calcular los errores absoluto y relativo que se obtienen al sustituir el incremento por la diferencial. Trazar la gráfica.

884. Hallar el incremento y la diferencial de la función $y = \sqrt{x}$ para $x = 4$ y $\Delta x = 0{,}41$. Calcular los errores absoluto y relativo. Trazar la gráfica.

885. $y = x^3 - x$. Para $x = 2$ calcular Δy y dy, dando a Δx los valores $\Delta x = 1$; $\Delta x = 0{,}1$; $\Delta x = 0{,}01$. Hallar los valores correspondientes del error relativo

$$\delta = \frac{|\Delta y - dy|}{|\Delta y|}.$$

886. Para la función $y = 2^x$, cuando $x = 2$ y $\Delta x = 0{,}4$, hallar gráficamente (trazando la gráfica en papel milimetrado a gran escala) el incremento y la diferencial y calcular los errores absoluto y relativo al sustituir el incremento por la diferencial.

887. El lado de un cuadrado mide 8 cm. ¿En cuánto aumentará su área si cada lado se prolonga en: a) 1 cm; b) 0,5 cm; c) 0,1 cm? Hallar la parte lineal principal del incremento del área del cuadrado y valorar el error relativo (en tanto por ciento) al sustituir el incremento por su parte principal.

888. Es sabido que al aumentar cada lado de un cuadrado en 0,3 cm la parte lineal principal del incremento del área constituye 2,4 cm². Hallar la parte lineal principal del incremento del área que corresponde al incremento de cada lado en: a) 0,6 cm; b) 0,75 cm; c) 1,2 cm.

889. Hallar la diferencial de la función:

1) $0{,}25\sqrt{x}$; 2) $\frac{\sqrt[3]{x}}{0{,}2}$; 3) $\frac{1}{0{,}5x^2}$; 4) $\frac{1}{4x^4}$; 5) $\frac{1}{2\sqrt{x}}$;

6) $\frac{1}{n\sqrt[3]{x}}$; 7) $\frac{\sqrt{x}}{a+b}$; 8) $\frac{p}{q^x}$; 9) $\frac{m-n}{x^{0,2}}$; 10) $\frac{m+n}{\sqrt{x}}$.

11) $(x^2+4x+1)(x^2-\sqrt{x})$; 12) $\frac{x^3+1}{x^3-1}$; 13) $\frac{1}{1-t^2}$;

14) $(1+x-x^2)^3$; 15) $\operatorname{tg}^2 x$; 16) $5^{\ln \operatorname{tg} x}$; 17) $2^{-\frac{1}{\cos x}}$;

18) $\ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{x}{4}\right)$; 19) $\frac{\cos x}{1-x^2}$; 20) $\sqrt{\operatorname{arcsen} x}+(\operatorname{arctg} x)^2$;

21) $3 \operatorname{arcsen} x-4 \operatorname{arctg} x+\frac{1}{2} \arccos x-\frac{7}{2} \operatorname{arctg} x$;

22) $3^{-\frac{1}{x^2}}+3x^3-4\sqrt{x}$.

890. Calcular el valor de la diferencial de la función: 1) $y=\frac{1}{(\operatorname{tg} x+1)^2}$ al variar la variable independiente desde $x=\frac{\pi}{6}$ hasta $x=\frac{61\pi}{360}$; 2) $y=\cos^2\varphi$ al variar φ desde 60° hasta 60°30′; 3) $y=\operatorname{sen} 2\varphi$ al variar φ desde $\frac{\pi}{6}$ hasta $\frac{61\pi}{360}$; 4) $y=\operatorname{sen} 3\varphi$ al variar φ desde $\frac{\pi}{6}$ hasta $\frac{61\pi}{360}$; 5) $y=\operatorname{sen}\frac{\theta}{3}$ al variar θ desde $\frac{\pi}{6}$ hasta $\frac{61\pi}{360}$.

891. Hallar el valor aproximado del incremento de la función $y=\operatorname{sen} x$ al variar x desde 30° hasta 30°1′. ¿A qué es igual sen 30°1′?

892. Hallar el valor aproximado del incremento de la función $y=\operatorname{tg} x$ al variar x desde 45° hasta 45°10′.

893. Hallar el valor aproximado del incremento de la función $y=\frac{1+\cos x}{1-\cos x}$ al variar x desde $\frac{\pi}{3}$ hasta $\frac{\pi}{3}+\frac{1}{100}$.

894. $\rho=k\sqrt{\cos 2\varphi}$, hallar $d\rho$.

895. $y=3^{\frac{1}{x}}+2^{\frac{1}{2x}}+6^{\sqrt{x}}$. Calcular dy para $x=1$ y $dx=0{,}2$.

896. Calcular aproximadamente sen 60°3′, sen 60°18′. Comparar los resultados obtenidos con los datos tabulares.

897. Comprobar que la función $y=\frac{1+\ln x}{x-x\ln x}$ satisface la relación $2x^2\,dy=(x^2y^2+1)\,dx$.

898. Comprobar que la función y definida por la ecuación $\operatorname{arctg}\frac{y}{x}=\ln\sqrt{x^2+y^2}$, satisface la relación $x\,(dy-dx)=y\,(dy+dx)$.

899. $f(x)=e^{0,1x(1-x)}$. Calcular aproximadamente $f(1{,}05)$.

900. Calcular arctg 1,02; arctg 0,97.

901. Calcular aproximadamente $\sqrt{\frac{(2{,}037)^2-3}{(2{,}037)^2+5}}$.

902. Calcular aproximadamente arcsen 0,4983.

903. Si la longitud de un hilo pesado (cable, cadena) (véase la fig. 25) es igual a $2s$, el medio tramo es l, y la flecha es igual a f, se tiene la igualdad aproximada

$$s=l\left(1+\frac{2}{3}\frac{f^2}{l^2}\right).$$

a) Calcular qué cambio sufre la longitud del hilo al variar su flecha en la magnitud df.

b) Tomando en consideración la variación ds que sufre la longitud del hilo (por ejemplo, al alterarse la temperatura o la carga), decir qué cambio se opera en la flecha debido a ello.

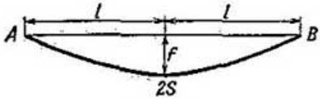

Fig. 25

904. Cuando se calcula un ángulo por su tangente y por su seno con ayuda de tablas logarítmicas, se cometen errores. Hacer un paralelo entre éstos, es decir, comparar la exactitud de los resultados obtenidos para el ángulo x con las fórmulas $\lg \operatorname{sen} x = y$ y $\lg \operatorname{tg} x = z$ si y y z son dadas con errores iguales.

905. Al efectuar cálculos técnicos se recurre, muy a menudo, a la reducción de π y $\sqrt{g}$ (g es la aceleración de la gravedad) en el caso en que uno de estos números está en el numerador y el otro, en el denominador. ¿Cuál es el error relativo que se comete?

906. Expresar la diferencial de la función compuesta por medio de la variable independiente y su diferencial:

1) $y=\sqrt[3]{x^2+5x}$; $x=t^3+2t+1$; 2) $s=\cos^2 z$, $z=\frac{t^2-1}{4}$;

3) $z=\operatorname{arctg} v$, $v=\frac{1}{\operatorname{tg} s}$; 4) $v=3^{-\frac{1}{x}}$, $x=\ln \operatorname{tg} s$;

5) $s=e^z$, $z=\frac{1}{2}\ln t$, $t=2u^2-3u+1$;

6) $y=\ln \operatorname{tg}\frac{u}{2}$, $u=\operatorname{arcsen} v$, $v=\cos 2s$.

Diferenciabilidad de las funciones

907. La función $y=|x|$ es continua para cualquier x. Comprobar que no es derivable cuando $x=0$.

908. Efectuando un análisis, decir si la función $y=|x^3|$ para $x=0$ es continua y derivable.

909. La función $f(x)$ está definida de la manera siguiente: $f(x)=1+x$ para $x\leqslant 0$; $f(x)=x$ para $0<x<1$; $f(x)=2-x$

para $1 \leqslant x \leqslant 2$ y $f(x) = 3x - x^2$ para $x > 2$. Averiguar si la función $f(x)$ es continua y aclarar la existencia y la continuidad de $f'(x)$.

910. La función $y = |\operatorname{sen} x|$ es continua para cualquier x. Mostrar que no es derivable cuando $x = 0$. ¿Existen otros valores de la variable independiente para los cuales la función no sea derivable?

911. Averiguar si la función $y = e^{-|x|}$ es continua y derivable para $x = 0$.

912. $f(x) = x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x}$ para $x \neq 0$, $f(0) = 0$. ¿Es derivable la función $f(x)$ cuando $x = 0$?

913. $f(x) = \frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x}}$ para $x \neq 0$, $f(0) = 0$. ¿Es derivable y continua la función $f(x)$ cuando $x = 0$?

914. Dada la función $f(x) = 1 + \sqrt[3]{(x-1)^2}$, mostrar que la parte lineal principal del incremento de la función no es susceptible de ser despejada cuando $x = 1$ y, por lo tanto, la función $f(x)$ no tiene derivada para $x = 1$. Dar la intepretación geométrica del resultado.

915. $f(x) = x \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$ para $x \neq 0$, $f(0) = 0$. ¿Es continua la función $f(x)$ cuando $x = 0$? ¿Es variable? Dar la interpretación geométrica del resultado.

916. $f(x) = \frac{x}{1 + e^{\frac{1}{x}}}$ para $x \neq 0$ y $f(0) = 0$. ¿Es continua la función $f(x)$ cuando $x = 0$? ¿Es derivable?

§ 4. La derivada como velocidad de variación (otros ejemplos)

Velocidad relativa

917. Un punto se mueve sobre la espiral de Arquímedes $\rho = a\varphi$. Hallar la velocidad de la variación del radio polar ρ respecto al ángulo polar φ.

918. Un punto se mueve sobre la espiral logarítmica $\rho = e^{a\varphi}$. Hallar la velocidad de la variación del radio polar si se sabe que gira con velocidad angular ω.

919. Un punto se mueve sobre la cicunferencia $\rho = 2r \cos\varphi$. Hallar la velocidad de la variación de la abscisa y la ordenada del punto si el radio polar gira con velocidad angular ω. En este caso el eje polar desempeña la función del de las abscisas, y el polo ha de ser considerado como el origen del sistema de coordenadas cartesianas.

920. Un círculo de radio R rueda, sin deslizarse, sobre una recta. El centro del círculo se mueve con velocidad constante v. Hallar la velocidad de la variación de la abscisa x y la ordenada y para un punto que pertenece al límite del círculo.

921. La presión barométrica p sufre alteraciones al variar la altura h de acuerdo con la función $\ln \frac{p}{p_0} = ch$, donde p_0 es la presión normal y c es una constante. A la altura de 5540 m la presión alcanza la mitad de la normal. Hallar la velocidad de la variación de la presión barométrica en función de la altura.

922. Entre y y x existe la relación $y^2 = 12x$. El argumento x crece uniformemente a una velocidad de 2 unidades por segundo. ¿A qué velocidad aumenta y cuando $x = 3$?

923. La ordenada del punto que describe la circunferencia $x^2 + y^2 = 25$ decrece con una velocidad de 1,5 cm/s. ¿A qué velocidad varía la abscisa del punto cuando la ordenada llega a ser igual a 4 cm?

924. ¿En qué punto de la elipse $16x^2 + 9y^2 = 400$ la ordenada decrece con la misma velocidad con que crece la abscisa?

925. El lado de un cuadrado aumenta con velocidad v. ¿Cuál es la velocidad de la variación del perímetro y del área del mismo en el momento en que su lado llega a ser igual a a?

926. El radio de un círculo cambia con velocidad v. ¿Cuál es la velocidad de la variación de la longitud de su circunferencia y del área en el momento en que su radio llega a ser igual a r?

927. El radio de una esfera cambia con velocidad v. ¿Con qué velocidad varía su volumen y su superficie?

928. ¿Para qué valor del ángulo su seno varía dos veces más lento que el argumento?

929. ¿Para qué valor del ángulo son iguales las velocidades de la variación de su seno y de su tangente?

930. La velocidad del crecimiento del seno aumentó en n veces. ¿Cuántas veces aumentó la velocidad del crecimiento de la tangente?

931. Supongamos que el volumen del tronco de un árbol es proporcional al cubo de su diámetro y que éste crece de año en año uniformemente. Mostrar que la velocidad del crecimiento del volumen, siendo el diámetro igual a 90 cm, es 25 veces mayor que la del crecimiento para el caso del diámetro igual a 18 cm.

Funciones dadas en forma paramétrica

932. Probar si un punto dado por las coordenadas cartesianas está en la línea cuya ecuación se da en forma paramétrica: a) ¿Está el punto (5; 1) sobre la circunferencia $x = 2 + 5 \cos t$, $y = -3 + 5 \operatorname{sen} t$? b) ¿Está el punto $(2, \sqrt{3})$ sobre la circunferencia $x = 2 \cos t$, $y = 2 \operatorname{sen} t$?

933. Construir las gráficas de las funciones dadas en forma paramétrica:

a) $x = 3 \cos t$, $y = 4 \operatorname{sen} t$; b) $x = t^2 - 2t$, $y = t^2 + 2t$;

c) $x = \cos t$, $y = t + 2 \operatorname{sen} t$; d) $x = 2^{t-1}$, $y = \frac{1}{4}(t^3 + 1)$.

934. De las ecuaciones que dan la función en forma paramétrica eliminar el parámetro:

1) $x = 3t$, $y = 6t - t^2$; 2) $x = \cos t$, $y = \operatorname{sen} 2t$;
3) $x = t^3 + 1$, $y = t^2$; 4) $x = \varphi - \operatorname{sen} \varphi$, $y = 1 - \cos\varphi$;
5) $x = \operatorname{tg} t$, $y = \operatorname{sen} 2t + 2 \cos 2t$.

935. Hallar el valor del parámetro que corresponde a las coordenadas dadas del punto sobre la línea cuya ecuación se da en forma paramétrica:

1) $x = 3 (2 \cos t - \cos 2t)$, $y = 3 (2 \operatorname{sen} t - \operatorname{sen} 2t)$; $(-9, 0)$;
2) $x = t^2 + 2t$, $y = t^3 + t$; $(3, 2)$;
3) $x = 2 \operatorname{tg} t$, $y = 2 \operatorname{sen}^2 t + \operatorname{sen} 2t$; $(2, 2)$;
4) $x = t^2 - 1$, $y = t^3 - t$; $(0, 0)$.

En los ejercicios 936—945 hallar las derivadas de y respecto a x.

936. $x = a \cos \varphi$, $\quad y = b \operatorname{sen} \varphi$.

937. $x = a \cos^3 \varphi$, $\quad y = b \operatorname{sen}^3 \varphi$.

938. $x = a (\varphi - \operatorname{sen} \varphi)$, $\quad y = a (1 - \cos \varphi)$.

939. $x = 1 - t^2$, $\quad y = t - t^3$.

940. $x = \frac{t+1}{t}$, $\quad y = \frac{t-1}{t}$.

941. $x = \ln (1 + t^2)$, $\quad y = t - \operatorname{arctg} t$.

942. $x = \varphi (1 - \operatorname{sen} \varphi)$, $\quad y = \varphi \cos \varphi$.

943. $x = \frac{1+t^3}{t^2-1}$, $\quad y = \frac{1}{t^2-1}$.

944. $x = e^t \operatorname{sen} t$, $\quad y = e^t \cos t$.

945. $x = \frac{3at}{1+t^3}$, $\quad y = \frac{3at^2}{1+t^3}$.

En los ejercicios 946—949 hallar los coeficientes angulares de las tangentes a las líneas que se indican.

946. $x = 3 \cos t$, $y = 4 \operatorname{sen} t$ en el punto $(3\sqrt{2}/2, 2\sqrt{2})$.

947. $x = t - t^4$, $y = t^2 - t^3$ en el punto $(0,0)$.

948. $x = t^3 + 1$, $y = t^2 + t + 1$ en el punto $(1,1)$.

949. $x = 2 \cos t$, $y = \operatorname{sen} t$ en el punto $(1, -\sqrt{3}/2)$.

950. Para la línea dada paramétricamente mostrar la relación entre el parámetro t y el ánuglo α que forma la tangente a la línea con el eje de abscisas.

1) $\begin{cases} x=\cos t+t\operatorname{sen} t-\dfrac{t^2}{2}\cos t, \\ y=\operatorname{sen} t-t\cos t-\dfrac{t^2}{2}\operatorname{sen} t; \end{cases}$

2) $x = a\cos^3 t,\ y = a\operatorname{sen}^3 t;$

3) $x=a\cos t\sqrt{2\cos 2t},\ y=a\operatorname{sen} t\sqrt{2\cos 2t}.$

951. Comprobar que la función dada en forma paramétrica mediante las ecuaciones $x = 2t + 3t^2$, $y = t^2 + 2t^3$ satisface la relación $y = y'^2 + 2y'^3$ $\left(\text{la prima denota la derivación con respecto a } x,\right.$ $\left.\text{esto es, } y' = \dfrac{dy}{dx}\right)$.

952. Comprobar que la función dada en forma paramétrica mediante las ecuaciones $x=\dfrac{1+t}{t^3}$, $y=\dfrac{3}{2t^2}+\dfrac{2}{t}$ satisface la relación $xy'^3=1+y'$ $\left(y'=\dfrac{dy}{dx}\right)$.

953. Comprobar que la función dada en forma paramétrica mediante las ecuaciones $x = \operatorname{ch} 2t$, $y = \operatorname{sh} 2t$ satisface la relación $yy' - x = 0$ $\left(y' = \dfrac{dy}{dx}\right)$.

954. Comprobar que la función dada en forma paramétrica mediante las ecuaciones

$$x=\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}-\ln\frac{1+\sqrt{1+t^2}}{t},\quad y=\frac{t}{\sqrt{1+t^2}},$$

satisface la relación $y\sqrt{1+y'^2}=y'$ $\left(y'=\dfrac{dy}{dx}\right)$.

955. Comprobar que la función dada en forma paramétrica mediante las ecuaciones $x=\dfrac{1+\ln t}{t^2}$, $y=\dfrac{3+2\ln t}{t}$ satisface la relación $yy'=2xy'^2+1$ $\left(y'=\dfrac{dy}{dx}\right)$.

956. Hallar los ángulos que se forman al cortarse las líneas:

1) $y=x^2$ y $\begin{cases} x=\dfrac{5}{3}\cos t, \\ y=\dfrac{5}{4}\operatorname{sen} t; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x=a\cos\varphi \\ y=a\operatorname{sen}\varphi \end{cases}$ y $\begin{cases} x=\dfrac{at^2}{1+t^2} \\ y=\dfrac{at\sqrt{3}}{1+t^2} \end{cases}$

957. Mostrar que cualquiera que sea la posición del círculo generador de una cicloide, la tangente y la normal en el punto correspondiente de la cicloide pasan por su punto superior e inferior, respectivamente.

958. Hallar las longitudes de la tangente, la normal, la subtangente y la subnormal a la cardioide

$$x = a(2\cos t - \cos 2t),\quad y = a(2\,\mathrm{sen}\,t - \mathrm{sen}\,2t)$$

en un punto cualquiera de ésta.

959. Hallar las longitudes de la tangente, la normal, la subtangente, la subnormal a la astroide

$$x = a\,\mathrm{sen}^3 t,\qquad y = a\cos^3 t$$

en un punto cualquiera de ésta.

960. Demostrar que la tangente a la circunferencia $x^2 + y^2 = a^2$ es, al mismo tiempo, la normal a la evolvente de la circunferencia

$$x = a(\cos t + t\,\mathrm{sen}\,t),\qquad y = a(\mathrm{sen}\,t - t\cos t).$$

961. Hallar las longitudes de la tangente, la normal, la subtangente y la subnormal a la evolvente de la circunferencia (véanse las ecuaciones de ésta en el ejercicio anterior).

962. Demostrar que el segmento de la normal a la curva

$$x = 2a\,\mathrm{sen}\,t + a\,\mathrm{sen}\,t\cos^2 t,\qquad y = -a\cos^3 t,$$

limitado por los ejes de coordenadas, es igual a $2a$.

En los ejercicios 963—966 formar las ecuaciones de la tangente y la normal a las líneas que se indican en los puntos citados.

963. $x = 2e^t$; $\quad y = e^{-t}\quad$ para $t = 0$.

964. $x = \mathrm{sen}\,t$, $\quad y = \cos 2t\quad$ para $t = \pi/6$

965. $x = 2\ln \mathrm{ctg}\,t + 1$, $\quad y = \mathrm{tg}\,t + \mathrm{cgt}\,t\quad$ para $t = \pi/4$.

966. 1) $x = \dfrac{3at}{1+t^2}$, $\quad y = \dfrac{3at^2}{1+t^2}\quad$ para $t = 2$;

2) $\begin{cases} x = t(t\cos t - 2\,\mathrm{sen}\,t), \\ y = t(t\,\mathrm{sen}\,t + 2\cos t), \end{cases}$ para $t = \dfrac{\pi}{4}$;

3) $x = \mathrm{sen}\,t$, $y = a^t\quad$ para $t = 0$.

967. Mostrar que en dos puntos de la cardioide (véase el ejercicio 958), los cuales corresponden a los valores del parámetro t que se diferencian en $\dfrac{2}{3}\pi$, las tangentes son paralelas.

968. Demostrar que si las líneas OT y ON son las perpendiculares bajadas desde el origen de coordenadas hasta la tangente y la normal a la astroide en cualquiera de sus puntos (véase el ejercicio 959), se tiene

$$4\cdot OT^2 + ON^2 = a^2.$$

969. Hallar la longitud de la perpendicular bajada desde el origen de coordenadas hasta la tangente a la línea

$$2x = a\,(3\cos t + \cos 3t),\ 2y = a\,(3\operatorname{sen} t + \operatorname{sen} 3t).$$

Mostrar que $4\rho^2 = 3p^2 + 4a^2$, donde ρ es el radio polar del punto dado y p es la longitud de dicha perpendicular.

Velocidad de la variación del radio polar

970. Dada la circunferencia $\rho = 2\,r\operatorname{sen}\varphi$, hallar el angulo θ formado por el radio polar y la tangente, y el ángulo α que forman entre sí el eje polar y la tangente.

971. Demostrar que para la parábola $\rho = a\sec^2\frac{\varphi}{2}$ la suma de los ángulos formados por la tangente con el radio polar y el eje polar, es igual a dos ángulos rectos. Valiéndose de esta propiedad construir la tangente a la parábola.

972. Dada la línea $\rho = a\operatorname{sen}^3\frac{\varphi}{3}$ (concoide), mostrar que $\alpha = 4\theta$ (las designaciones son las que se dan en el ejercicio 970).

973. Mostrar que dos parábolas $\rho = a\sec^2\frac{\varphi}{2}$ y $\rho = b\operatorname{cosec}^2\frac{\varphi}{2}$ se cortan formando un ángulo recto.

974. Hallar el valor de la tangente del ángulo formado entre el eje polar y la tangente a la línea $\rho = a\sec^2\varphi$ en los puntos en que $\rho = 2a$.

975. Hallar la tangente del ángulo formado entre el eje polar y la línea tangente en el origen de coordenadas: 1) a la línea $\rho = \operatorname{sen}^3\varphi$ 2) a la línea $\rho = \operatorname{sen} 3\varphi$.

976. Mostrar que dos cardioides $\rho = a\,(1 + \cos\varphi)$ y $\rho = a\,(1 - \cos\varphi)$ se cortan formando un ángulo recto.

977. La ecuación de la línea en las coordenadas polares es dada en forma paramétrica: $\rho = f_1(t)$, $\varphi = f_2(t)$. Expresar la tangente del ángulo θ formado entre la línea tangente y el radio polar, como función de t.

978. Una línea viene dada mediante las ecuaciones $\rho = at^3$, $\varphi = bt^2$. Hallar el ángulo entre el radio polar y la tangente.

979. Dada la elipse $x = a\cos t$; $y = b\operatorname{sen} t$, expresar el radio polar ρ y el ángulo polar φ como función del parámetro t. Valiéndose de la forma así obtenida para dar la elipse, calcular el ángulo formado entre la tangente y el radio polar.

Se llama *subtangente polar* a la proyección del segmento de la tangente desde el punto de contacto hasta su intersección con la perpendicular levantada al radio polar en el polo, sobre dicha perpendicular. De análoga manera se define la *subnormal polar*. Tomando esto en consideración, resolver los problemas de los ejercicios 980—984.

980. Deducir la fórmula para la subtangente polar y la subnormal polar de la línea $\rho = f(\varphi)$.

981. Mostrar que la longitud de la subtangente polar de la espiral hiperbólica $\rho = \frac{a}{\varphi}$ es constante.

982. Mostrar que la longitud de la subnormal polar de la espiral de Arquímedes $\rho = a\varphi$ es constante.

983. Hallar la longitud de la subnormal polar de la espiral logarítmica $\rho = a^{\varphi}$.

984. Hallar la longitud de la subnormal polar de la espiral logarítmica $\rho = a^{\varphi}$.

Velocidad de la variación de la longitud

En los ejercicios 985—999 s designa la longitud del arco de la línea correspondiente.

985. La recta $y = ax + b$; $\frac{ds}{dx} = ?$

986. La circunferencia $x^2 + y^2 = r^2$; $\frac{ds}{dx} = ?$

987. La elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$; $\frac{ds}{dy} = ?$

988. La parábola $y^2 = 2px$; $ds = ?$

989. La parábola semicúbica $y^2 = ax^3$; $\frac{ds}{dy} = ?$

990. La sinusoide $y = \operatorname{sen} x$; $ds = ?$

991. La catenaria $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ $(y = \operatorname{ch} x)$; $\frac{ds}{dx} = ?$

992. La circunferencia $x = r \cos t$, $y = r \operatorname{sen} t$; $\frac{ds}{dt} = ?$

993. La cicloide $x = a(t - \operatorname{sen} t)$, $y = a(1 - \cos t)$; $\frac{ds}{dt} = ?$

994. La astroide $x = a \cos^3 t$, $y = a \operatorname{sen}^3 t$; $ds = ?$

995. La espiral de Arquímedes $x = at \operatorname{sen} t$, $y = at \cos t$; $ds = ?$

996. La cardioide $\begin{cases} x = a(2\cos t - \cos 2t), \\ y = a(2 \operatorname{sen} t - \operatorname{sen} 2t); \end{cases}$ $ds = ?$

997. La tractriz

$$x = a\left(\cos t + \ln \operatorname{tg} \frac{t}{2}\right), \quad y = a \operatorname{sen} t; \quad ds = ?$$

998. La evolvente de la circunferencia

$$x = a(\cos t + t \operatorname{sen} t), y = a(\operatorname{sen} t - t\cos t); \frac{ds}{dt} = ?$$

999. La hipérbola $x = a \operatorname{ch} t$, $y = a \operatorname{sh} t$; $ds = ?$

Velocidad del movimiento

1000. Una escala, que mide 10 m de longitud, tiene apoyado su extremo superior contra una pared vertical. Su extremo inferior se halla apoyado en el suelo y se desliza apartándose de la pared a 2 m por minuto. ¿A qué velocidad va descendiendo el extremo superior de la escala cuando el inferior dista 6 m de la pared? ¿Cuál es la dirección del vector de la velocidad?

1001. Un tren y un globo aerostático parten de un mismo punto simultáneamente. El tren se traslada a una velocidad uniforme de 50 km por hora. El globo sube (también uniformemente) a 10 km por hora. ¿A qué velocidad se aparta el uno del otro? ¿Cuál es la dirección del vector de la velocidad?

1002. Un hombre de 1,7 m de estatura se aleja, a 6,34 km por hora, de una fuente luminosa que se encuentra a 3 m de altura. ¿A qué velocidad se traslada la sombra que proyecta su cabeza?

1003. Un caballo corre a 20 km por hora a lo largo de una circunferencia en cuyo centro se halla un farol. En el punto inicial de la carrera del caballo está situada una cerca que sigue la dirección de la tangente a la circunferencia referida. ¿A qué velocidad se desplaza la sombra del caballo a lo largo de la cerca en el momento en que éste ha recorrido 1/8 de la circunferencia?

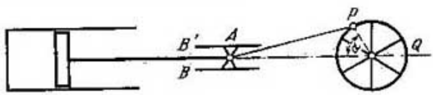

Fig. 26

1004. La fig. 26 muestra, de manera esquemática, el mecanismo de manivela de una máquina de vapor: A es la cruceta, BB' son las correderas de la cruceta, AP es la biela, P es el gorrón de manivela,

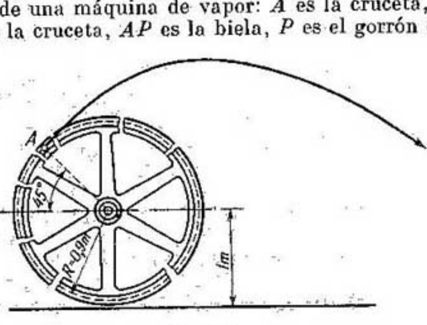

Fig. 27

Q es el volante. El volante, de radio R, gira uniformemente con velocidad angular ω. La longitud de la biela es igual a l. ¿Cuál es la velocidad que tiene la cruceta al desplazarse, en el momento en que el volante ha girado un ángulo α?

1005. Un volante que había dado 80 vueltas por minuto quedó roto. El radio del mismo mide 0,9 m. Su centro se halla levantado por sobre el suelo, la distancia entre ambos, en línea vertical, mide 1 m. ¿Cuál es la velocidad a que efectuará su caída hacia el suelo el pedazo roto (designado por la letra A en la fig. 27)?

§ 5. Derivación sucesiva

Funciones dadas en forma explícita

1006. $y = x^2 - 3x + 2$; $y'' = ?$
1007. $y = 1 - x^2 - x^4$; $y''' = ?$
1008. $f(x) = (x + 10)^6$; $f'''(2) = ?$
1009. $f(x) = x^6 - 4x^3 + 4$; $f^{\text{IV}}(1) = ?$
1010. $y = (x^2 + 1)^3$; $y'' = ?$ **1011.** $y = \cos^2 x$; $y''' = ?$
1012. $f(x) = e^{2x-1}$; $f''(0) = ?$ **1013.** $f(x) = \operatorname{arctg} x$; $f''(1) = ?$
1014. $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$; $f^{\text{V}}(x) = ?$

1015. $y = x^3 \ln x$; $y^{\text{IV}} = ?$ **1016.** $f(x) = \dfrac{a}{x^n}$; $y''(x) = ?$

1017. $\rho = a \operatorname{sen} 2\varphi$; $\dfrac{d^4\rho}{d\varphi^4} = ?$ **1018.** $y = \dfrac{1-x}{1+x}$; $y^{(n)} = ?$

En los ejercicios 1019—1028 hallar las segundas derivadas de las funciones

1019. $y = xe^{x^2}$.

1020. $y = \dfrac{1}{1+x^3}$.

1021. $y = (1 + x^2) \operatorname{arctg} x$.

1022. $y = \sqrt{a^2 - x^2}$.

1023. $y = \ln (x + \sqrt{1 + x^2})$.

1024. $y = \dfrac{1}{a + \sqrt{x}}$.

1025. $y = e^{\sqrt{x}}$.

1026. $y = \sqrt{1 - x^2} \arcsen x$.

1027. $y = \arcsen (a \operatorname{sen} x)$. **1028.** $y = x^x$.

En los ejercicios 1029—1040 hallar las expresiones comunes para las derivadas de n-ésimo orden de las funciones:

1029. $y = e^{ax}$.

1030. $y = e^{-x}$.

1031. $y = \operatorname{sen} ax + \cos bx$

1032. $y = \operatorname{sen}^2 x$.

1033. $y = xe^x$.

1034. $y = x \ln x$.

1035. $y=\frac{1}{ax+b}$. **1036.** $y=\ln(ax+b)$.

1037. $y=\log_a x$. **1038.** $y=\frac{x}{x^2-1}$.

1039. $y=\frac{1}{x^2-3x+2}$. **1040.** $y=\operatorname{sen}^4 x+\cos^4 x$.

1041. Demostrar que la función $y=(x^2-1)^n$ satisface la relación

$$(x^2-1)y^{(n+2)}+2xy^{(n+1)}-n(n+1)y^{(n)}=0.$$

1042. Demostrar que la función $y=e^x \operatorname{sen} x$ satisface la relación $y''-2y'+2y=0$, mientras la función $y=e^{-x}\operatorname{sen} x$ satisface la relación $y''+2y'+2y=0$.

1043. Demostrar que la función $y=\frac{x-3}{x+4}$ satisface la relación $2y'^2=(y-1)\ y''$.

1044. Demostrar que la función $y=\sqrt{2x-x^2}$ satisface la relación $y^3y''+1=0$.

1045. Demostrar que la función $y=e^{4x}+2e^{-x}$ satisface la relación $y'''-13y'-12y=0$.

1046. Demostrar que la función $y=e^{\sqrt{x}}+e^{-\sqrt{x}}$ satisface la relación $xy''+\frac{1}{2}y'-\frac{1}{4}y=0$.

1047. Demostrar que la función $y=\cos e^x+\operatorname{sen} e^x$ satisface la relación $y''-y'+ye^{2x}=0$.

1048. Demostrar que la función

$$y=A\ \operatorname{sen}(\omega t+\omega_0)+B\cos(\omega t+\omega_0)$$

(A, B, ω, ω_0 son constantes) satisface la relación

$$\frac{d^2y}{dt^2}+\omega^2y=0.$$

1049. Demostrar que la función

$$a_1e^{nx}+a_2e^{-nx}+a_3\cos nx+a_4\operatorname{sen} nx$$

(a_1, a_2, a_3, a_4, n son constantes) satisface la relación $\frac{d^4y}{dx^4}=n^4y$.

1050. Demostrar que la función $y=\operatorname{sen}(n \arcsin x)$ satisface la relación $(1-x^2)\ y''-xy'+n^2y=0$.

1051. Demostrar que la función $e^{\alpha \operatorname{arcsen} x}$ satisface la relación $(1-x^2)\ y''-xy'-\alpha^2y=0$.

1052. Demostrar que la función $y=(x+\sqrt{x^2+1})^k$ satisface la relación $(1+x^2)y''+xy'-k^2y=0$.

1053. Demostrar que la expresión $S=\frac{y'''}{y'}-\frac{3}{2}\left(\frac{y''}{y'}\right)^2$ no varía si sustituimos y por $\frac{1}{y}$; esto es, si ponemos $y=\frac{1}{y_1}$, se tiene $\frac{y_1'''}{y_1'}-\frac{3}{2}\left(\frac{y_1''}{y_1'}\right)^2=S$.

1054. Sea dado $y=f(x)$. Expresar $\frac{d^2x}{dy^2}$ mediante $\frac{dy}{dx}$ y $\frac{d^2y}{dx^2}$.

Mostrar que la fórmula $R=\frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}$ es susceptible de ser reducida a la forma

$$R^{\frac{2}{3}}=\frac{1}{\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^{\frac{2}{3}}}+\frac{1}{\left(\frac{d^2y}{dy^2}\right)^{\frac{2}{3}}}.$$

1055. Sea dado $F(x)=f(x)\cdot\varphi(x)$ siendo $f'(x)\varphi'(x)=C$. Demostrar que

$$\frac{F''}{F}=\frac{f''}{f}+\frac{\varphi''}{\varphi}+\frac{2C}{f\cdot\varphi} \text{ y } \frac{F'''}{F}=\frac{f'''}{f}+\frac{\varphi'''}{\varphi}.$$

Funciones dadas en forma implícita

1056. $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$; $\frac{d^2y}{dx^2}=?$

1057. $x^2+y^2=r^2$; $\frac{d^3y}{dx^3}=?$ **1058.** $y=\operatorname{tg}(x+y)$; $\frac{d^3y}{dx^3}=?$

1059. $s=1+te^s$; $\frac{d^2s}{dt^2}=?$ **1060.** $y^3+x^3-3axy=0$; $y''=?$

1061. $y=\operatorname{sen}(x+y)$; $y''=?$ **1062.** $e^{x+y}=xy$; $y''=?$

1063. Deducir la fórmula para la segunda derivada de la función inversa a la dada $y=f(x)$.

1064. $e^y+xy=e$; hallar $y''(x)$ para $x=0$.

1065. $y^2=2px$; hallar la expresión $k=\frac{y''}{\sqrt{(1+y'^2)^3}}$.

1066. Comprobar que de $y^2+x^2=R^2$ se deduce $k=\frac{1}{R}$, donde $k=\frac{|y''|}{\sqrt{(1+y'^2)^3}}$.

1067. Demostrar que si

$$ax^2+2bxy+cy^2+2gx+2fy+h=0,$$

se tiene

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{ax+by+g}{bx+cy+f} \quad \text{y} \quad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{A}{(bx+cy+f)^3}$$

donde A es una constante que no depende de x e y.

1068. Demostrar que si $(a+bx)e^{\frac{y}{x}}=x$, se tiene

$$x^3\frac{d^2y}{dx^2}=\left(x\frac{dy}{dx}-y\right)^2.$$

Funciones dadas en forma paramétrica

1069. $x=at^2,\quad y=bt^3;\quad \frac{d^2x}{dy^2}=?$

1070. $x=a\cos t,\quad y=a\operatorname{sen} t;\quad \frac{d^2y}{dx^2}=?$

1071. $x=a\cos t,\quad y=b\operatorname{sen} t;\quad \frac{d^3y}{dx^3}=?$

1072. $x=a(\varphi-\operatorname{sen}\varphi),\ y=a(1-\cos\varphi);\quad \frac{d^2y}{dx^2}=?$

1073. 1) $x=a\cos^3 t,\quad y=a\operatorname{sen}^3 t;\quad \frac{d^3y}{dx^3}=?$

2) $x=a\cos^2 t,\quad y=a\operatorname{sen}^2 t;\quad \frac{d^2y}{dx^2}=?$

1074. 1) $x=\ln t,\quad y=t^2-1;\quad \frac{d^2y}{dx^2}=?$

2) $x=\operatorname{arcsen} t,\quad y=\ln(1-t^2);\quad \frac{d^2y}{dx^2}=?$

1075. $x=at\cos t,\ y=at\operatorname{sen} t;\quad \frac{d^2y}{dx^2}=?$

1076. Demostrar que la función $y=f(x)$ dada mediante las ecuaciones paramétricas $y=e^t\cos t$, $x=e^t\operatorname{sen} t$, satisface la relación $y''(x+y)^2=2(xy'-y)$.

1077. Demostrar que la función $y=f(x)$ dada paramétricamente mediante las ecuaciones $y=3t-t^3$, $x=3t^2$ satisface la relación

$$36y''(y-\sqrt{3x})=x+3.$$

1078. Demostrar que la función dada paramétricamente mediante las ecuaciones

$$x=\operatorname{sen} t,\ y=\operatorname{sen} kt,$$

satisface la relación

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}-x\frac{dy}{dx}+k^2y=0.$$

1079. Demostrar que si

$$x=f(t)\cos t-f'(t)\operatorname{sen} t,\ y=f(t)\operatorname{sen} t+f'(t)\cos t$$

se tiene

$$ds^2=dx^2+dy^2=[f(t)+f''(t)]^2\,dt^2.$$

Aceleración del movimiento

1080. Un punto efectúa movimiento rectilíneo, siendo $s=\frac{4}{3}t^3-t+5$. Hallar la aceleración a al finalizar el 2° segundo (s está expresada en metros; t, en segundos).

1081. Un movimiento rectilíneo se efectúa de acuerdo con la fórmula $s=t^2-4t+1$.

Hallar la velocidad y la aceleración del movimiento.

1082. Un punto efectúa movimiento rectilíneo, siendo $s=\frac{2}{9}\times\operatorname{sen}\frac{\pi t}{2}+s_0$. Hallar la aceleración al finalizar el primer segundo (s está expresada en cm, t, en s).

1083. Un punto efectúa el movimiento rectilíneo, siendo $s=\sqrt{t}$. Demostrar que el movimiento del punto es retardado y que la aceleración a es proporcional al cubo de la velocidad v.

1084. Una viga pesada, que mide 13 m, se hace descender hacia el suelo de la manera siguiente (véase la fig. 28): su extremo inferior está sujeto a una vagoneta, mientras que el superior se mantiene fijo con un cable devanado en un cabrestante. El cable va desenrollándose a 2 m por minuto. ¿Qué aceleración experimenta la vagoneta cuando se aparta rodando, en el momento en que dista 5 m del punto O?

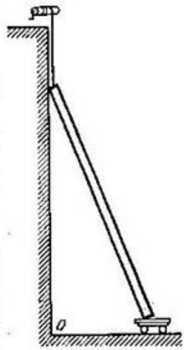

Fig. 28

1085. La cubierta de una barcaza se encuentra 4 m más abajo de la altura del muelle. Tirando de la barcaza, la hacen acercarse para que se ponga al lado del muelle, mediante un cable el cual va devanándose en un cabrestante a 2 m por segundo. ¿Qué aceleración experimenta la barcaza al moverse, en el momento en que dista 8 m del muelle (en línea horizontal)?

1086. Un punto efectúa movimiento rectilíneo de manera que su velocidad varía proporcionalmente a la raíz cuadrada del trayecto recorrido. Mostrar que el movimiento se efectúa al actuar una fuerza constante sobre el punto indicado.

1087. Se tiene un punto material sobre el cual actúa una fuerza inversamente proporcional a la velocidad del movimiento del punto. Demostrar que la energía cinética del punto es la función lineal del tiempo.

Fórmula de Leibniz

1088. Aplicar la fórmula de Leibniz para calcular la derivada:
1) $[(x^2+1)\operatorname{sen} x]^{(20)}$;
2) $(e^x \operatorname{sen} x)^{(n)}$; 3) $(x^3 \operatorname{sen} \alpha x)^{(n)}$.

1089. Mostrar que si $y = (1 - x)^{-\alpha}e^{-\alpha x}$, se tiene

$$(1-x)\frac{dy}{dx}=\alpha xy.$$

Aplicando la fórmula de Leibniz mostrar que

$$(1-x)\,y^{(n+1)}-(n+\alpha x)\,y^{(n)}-n\alpha y^{(n-1)}=0.$$

1090. La función $y=e^{\alpha \operatorname{arcsen} x}$ satisface la relación $(1-x^2)\,y''-xy'-\alpha^2y=0$ (véase el ejercicio 1051). Aplicando la fórmula de Leibniz y derivando esta igualdad n veces, mostrar que

$$(1-x^2)\,y^{(n+2)}-(2n+1)\,xy^{(n+1)}-(n^2+\alpha^2)\,y^{(n)}=0.$$

1091. Mostrar que

$$(e^{ax}\cos bx)^{(n)}=r^ne^{ax}\cos(bx+n\varphi),\ \text{donde}\ r=\sqrt{a^2+b^2},\ \operatorname{tg}\varphi=\frac{b}{a}.$$

Aplicando la fórmula de Leibniz, llegar a las siguientes fórmulas:

$$r^n\cos n\varphi=a^n-C_n^2a^{n-2}b^2+C_n^4a^{n-4}b^4-\ \ldots,$$
$$r^n\operatorname{sen} n\varphi=C_n^1a^{n-1}b-C_n^3a^{n-3}b^3+C_n^5a^{n-5}b^5-\ \ldots$$

1092. Demostrar que $(x^{n-1}e^{\frac{1}{x}})^{(n)}=(-1)^n\dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{x^{n+1}}$.

1093. Mostrar que la función $y = \operatorname{arcsen} x$ satisface la relación $(1 - x^2)y'' = xy'$. Aplicando a ambos miembros de esta ecuación la fórmula de Leibniz, hallar $y^{(n)}(0)$ $(n \geqslant 2)$.

1094. Aplicando la fórmula de Leibniz n veces, mostrar que la función $y = \cos(m \operatorname{arcsen} x)$ satisface la relación

$$(1-x^2)y^{(n+2)}-(2n+1)\,xy^{(n+1)}+(m^2-n^2)\,y^{(n)}=0.$$

1095. Si $y = (\operatorname{arcsen} x)^2$, se tiene

$$(1-x^2)y^{(n+1)}-(2n-1)\,xy^{(n)}-(n-1)^2\,y^{(n-1)}=0.$$

Hallar $y'(0)$, $y''(0)$, $\ldots$, $y^{(n)}(0)$.

Diferenciales de ordenes superiores

1096. $y=\sqrt[3]{x^2}$; $d^2y=?$ **1097.** $y=x^m$; $d^3y=?$

1098. $y=(x+1)^3(x-1)^2$; $d^2y=?$

1099. $y=4^{-x^2}$; $d^2y=?$

1100. $y=\operatorname{arctg}\left(\frac{b}{a}\operatorname{tg}x\right)$; $d^2y=?$ **1101.** $y=\sqrt{\ln^2 x-4}$; $d^2y=?$

1102. $y=\operatorname{sen}^2 x$; $d^3y=?$ **1103.** $\rho^2\cos^3\varphi-a^2\operatorname{sen}^3\varphi=0$; $d^2\rho=?$

1104. $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$; $d^2y=?$

1105. $y=\ln\frac{1-x^2}{1+x^2}$; $x=\operatorname{tg}t$; expresar d^2y mediante: 1) x y dx, 2) t y dt.

1106. $y=\operatorname{sen}z$; $z=a^x$; $x=t^3$; expresar d^2y mediante: 1) z y dz, 2) x y dx; 3) t y dt.

Capítulo IV

Análisis de las funciones y de sus gráficas

§ 1. Comportamiento de la función

1107. Mostrar que el punto $x = 0$ es el punto del mínimo de la función

$$y = 3x^4 - 4x^3 + 12x^2 + 1.$$

1108. Partiendo de la definición de la función creciente y decreciente y de los puntos del máximo y del mínimo, mostrar que la función $y = x^3 - 3x + 2$ crece en el punto $x_1 = 2$, decrece en el punto $x_2 = 0$, alcanza su máximo en el punto $x_3 = -1$ y su mínimo en el punto $x_4 = 1$.

1109. Igual que en el ejercicio 1108, mostrar que la función $y = \cos 2x$ crece en el punto $x_1 = \frac{3\pi}{4}$, decrece en el punto $x_2 = \frac{\pi}{6}$, alcanza su máximo en el punto $x_3 = 0$ y su mínimo en el punto $x_4 = \frac{\pi}{2}$.

1110. Sin recurrir al concepto de la derivada, analizar el comportamiento de la función dada en el punto $x = 0$:

1) $y = 1 - x^4$; 2) $y = x^5 - x^3$; 3) $y = \sqrt[3]{x}$; 4) $y = \sqrt[3]{x^2}$;

5) $y = 1 - \sqrt[5]{x^4}$; 6) $y = |\operatorname{tg} x|$; 7) $y = |\ln(x+1)|$;

8) $y = e^{-|x|}$; 9) $y = \sqrt{x^3 + x^2}$.

1111. Mostrar que la función $y = \ln(x^2 + 2x - 3)$ crece en el punto $x_1 = 2$, decrece en el punto $x_2 = -4$ y no tiene puntos estacionarios.

1112. Esclarecer el comportamiento de la función $y = \operatorname{sen} x + \cos x$ en los puntos $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = -\frac{\pi}{3}$ y $x_4 = 2$.

1113. Esclarecer el comportamiento de la función $y = x - \ln x$ en los puntos $x_1 = 1/2$, $x_2 = 2$, $x_3 = e$ y $x_4 = 1$ y mostrar que si la función dada crece en el punto $x = a > 0$, en cambio, decrece en el punto $1/a$.

1114. Esclarecer el comportamiento de la función

$$y = x \operatorname{arctg} x$$

en los puntos $x_1 = 1$, $x_2 = -1$, $x_3 = 0$.

1115. Esclarecer el comportamiento de la función

$$y = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen} x}{x} & \text{para } x \neq 0, \\ 1 & \text{para } x = 0 \end{cases}$$

en los puntos $x_1 = 1/2$, $x_2 = -1/2$ y $x_3 = 0$.

§ 2. Aplicación de la primera derivada

Teoremas de Rolle y Lagrange

1116. Verificar la validez del teorema de Rolle para la función $y = x^3 + 4x^2 - 7x - 10$ en el intervalo $[-1, 2]$.

1117. Verificar la validez del teorema de Rolle para la función $y = \ln \operatorname{sen} x$ en el intervalo $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right]$.

1118. Verificar la validez del teorema de Rolle para la función $y = 4^{\operatorname{sen} x}$ en el intervalo $[0, \pi]$.

1119. Verificar la validez del teorema de Rolle para la función $y = \sqrt[3]{x^2 - 3x + 2}$ en el intervalo $[1, 2]$.

1120. La función $y = \frac{2 - x^2}{x^4}$ toma valores iguales en los extremos del intervalo $[-1, 1]$. Mostrar que la derivada de dicha función no se reduce a cero en parte alguna del intervalo $[-1, 1]$, y explicar esta desviación del teorema de Rolle.

1121. La función $y = |x|$ toma valores iguales en los extremos del intervalo $[-a, a]$. Mostrar que la derivada de dicha función no se reduce a cero en parte alguna del intervalo $[-a, a]$, y explicar esta desviación del teorema de Rolle.

1122. Demostrar el siguiente teorema: si la ecuación

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x = 0$$

tiene la raíz positiva $x = x_0$, la ecuación

$$n a_0 x^{n-1} + (n-1) a_1 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} = 0$$

también la tiene, siendo esta raíz menor que x_0.

1123. Sea dada la función $f(x) = 1 + x^m (x-1)^n$, donde m y n son números enteros positivos. Sin calcular la derivada, mostrar que la ecuación $f'(x) = 0$ tiene, por lo menos, una raíz en el intervalo $(0, 1)$.

1124. Mostrar que la ecuación $x^3 - 3x + c = 0$ no puede tener dos raíces distintas en el intervalo $(0, 1)$.

1125. Sin calcular la derivada de la función

$$f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)(x-4),$$

esclarecer cuántas raíces reales tiene la ecuación $f'(x) = 0$ e indicar en qué intervalos están.

1126. Mostrar que la función $f(x) = x^n + px + q$ no puede tener más de dos raíces reales siendo n par, y más de tres siendo n impar.

1127. Escribir la fórmula de Lagrange para la función $y = \operatorname{sen} 3x$ en el intervalo $[x_1, x_2]$.

1128. Escribir la fórmula de Lagrange para la función $y = x \times (1 - \ln x)$ en el intervalo $[a, b]$.

1129. Escribir la fórmula de Lagrange para la función $y = \operatorname{arcsen} 2x$ en el intervalo $[x_0, x_0 + \Delta x]$.

1130. Verificar la validez del teorema de Lagrange para la función $y = x^n$ en el intervalo $[0, a]$; $n > 0$, $a > 0$.

1131. Verificar la validez del teorema de Lagrange para la función $y = \ln x$ en el intervalo $[1, e]$.

1132. Mediante la fórmula de Lagrange demostrar las desigualdades

$$\frac{a-b}{a} \leqslant \ln\frac{a}{b} \leqslant \frac{a-b}{b},$$

siendo $0 < b \leqslant a$.

1133. Mediante la fórmula de Lagrange demostrar las desigualdades

$$\frac{\alpha-\beta}{\cos^2\beta} \leqslant \operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta \leqslant \frac{\alpha-\beta}{\cos^2\alpha} \quad \text{siendo } 0 < \beta \leqslant \alpha < \frac{\pi}{2}.$$

1134. Para $a > b$ demostrar mediante la fórmula de Lagrange la validez de las desigualdades

$$nb^{n-1}(a-b) < a^n - b^n < na^{n-1}(a-b),$$

si $n > 1$, y las desigualdades opuestas, si $n < 1$.

1135. Analicemos la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen}\frac{1}{x} & \text{para } x \neq 0, \\ 0 & \text{para } x = 0. \end{cases}$$

Es derivable para cualquier valor de x. Escribamos para ella la fórmula de Lagrange en el intervalo $[0, x]$:

$$f(x) - f(0) = xf'(\xi) \qquad (0 < \xi < x).$$

Obtendremos:

$$x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x} = x\left(2\xi \operatorname{sen} \frac{1}{\xi} - \cos \frac{1}{\xi}\right),$$

de donde $\cos \frac{1}{\xi} = 2\xi \operatorname{sen} \frac{1}{\xi} - x \operatorname{sen} \frac{1}{x}$. Hacemos ahora que x tienda a cero, en este caso ξ también tenderá a cero, y de este modo llegamos a: $\lim\limits_{\xi \to 0} \cos \frac{1}{\xi} = 0$.

Explicar este resultado paradójico.

1136. Aplicando la fórmula

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right) \Delta x,$$

a la función $f(x) = \operatorname{arctg} x$ en el intervalo $[1; 1,1]$, hallar el valor aproximado de arctg 1,1.

En los ejercicios 1137—1141 aplicando la fórmula

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right) \Delta x,$$

calcular los valores aproximados de las expresiones que se indican.

1137. arcsen 0,54

1138. lg 11. Comparar con los datos tabulares.

1139. $\ln(x + \sqrt{1 + x^2})$ para $x = 0,2$.

1140. lg 7, sabiendo que lg 2 = 0,3010 y lg 3 = 0,4771. Comparar el resultado con los datos tabulares.

1141. lg 61. Comparar el resultado con los datos tabulares.

1142. Confirmar que aplicando la fórmula

$$f(b) = f(a) + (b - a) f'\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

para calcular el logaritmo de $N + 0,01\,N$, es decir, poniendo

$$\lg(N + 0,01N) = \lg N + \frac{0,43429}{N + \frac{0,01}{2} N} 0,01N = \lg N + \frac{0,43429}{100,5}$$

cometemos un error menor que 0,00001, es decir, obtenemos cinco cifras exactas después de la coma si es que lg N viene dado con cinco cifras exactas.

Comportamiento de las funciones en el intervalo

1143. Mostrar que la función $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1$ decrece en el intervalo $(-2, 1)$.

1144. Mostrar que la función $y = \sqrt{2x - x^2}$ crece en el intervalo $(0, 1)$ y decrece en el intervalo $(1, 2)$. Construir la gráfica de esta función.

1145. Mostrar que la función $y = x^3 + x$ crece por todas partes.

1146. Mostrar que la función $y = \operatorname{arctg} x - x$ decrece por todas partes.

1147. Mostrar que la función $y = \frac{x^2-1}{x}$ crece en cualquier intervalo que no tenga el punto $x = 0$.

1148. Mostrar que la función $y = \frac{\operatorname{sen}(x+a)}{\operatorname{sen}(x+b)}$ varía de manera monótona en cualquier intervalo que no encierre puntos de discontinuidad de la función.

1149*. Demostrar la desigualdad $\frac{\operatorname{tg} x_2}{\operatorname{tg} x_1} > \frac{x_2}{x_1}$ siendo

$$0 < x_1 < x_2 < \frac{\pi}{2}.$$

1150. Hallar los intervalos de monotonía de la función $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 14$ y construir la gráfica en el intervalo $(-2, 4)$ siguiendo sus puntos.

1151. Hallar los intervalos de monotonía de la función $y = x^4 - 2x^2 - 5$.

En los ejercicios 1152—1164 hallar los intervalos de monotonía de las funciones.

1152. $y = (x-2)^5 (2x+1)^4$.

1153. $y = \sqrt[3]{(2x-a)(a-x)^2}$ $(a > 0)$.

1154. $y = \frac{1-x+x^2}{1+x+x^2}$. **1155.** $y = \frac{10}{4x^3-9x^2+6x}$.

1156. $y = x - e^x$. **1157.** $y = x^2 e^{-x}$.

1158. $y = \frac{x}{\ln x}$. **1159.** $y = 2x^2 - \ln x$.

1160. $y = x - 2 \operatorname{sen} x$. $(0 \leqslant x \leqslant 2\pi)$.

1161. $y = 2 \operatorname{sen} x + \cos 2x$ $(0 \leqslant x \leqslant 2\pi)$.

1162. $y = x + \cos x$. **1163.** $y = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$.

1164. $y = x\sqrt{ax - x^2}$ $(a > 0)$.

En los ejercicios 1165—1184 hallar los valores extremos de las funciones.

1165. $y = 2x^3 - 3x^2$. **1166.** $y = 2x^3 - 6x^2 - 18x + 7$.

1167. $y=\frac{3x^2+4x+4}{x^2+x+1}$. **1168.** $y=\sqrt[3]{x^3-3x^2+8^2}$.

1169. $y=\frac{1}{\ln(x^4+4x^3+30)}$. **1170.** $y=-x^2\sqrt{x^2+2}$.

1171. $y=\frac{2}{3}x^2\sqrt[3]{6x-7}$. **1172.** $y=\frac{4\sqrt{3}}{9x\sqrt{1-x}}$.

1173. $y=\frac{1+3x}{\sqrt{4+5x^2}}$. **1174.** $y=\sqrt[3]{(x^2-a^2)^2}$.

1175. $y=x-\ln(1+x)$. **1176.** $y=x-\ln(1+x^2)$.

1177. $y=(x-5)^2\sqrt[3]{(x+1)^2}$.

1178. $y=(x^2-2x)\ln x-\frac{3}{2}x^2+4x$.

1179. $y=\frac{1}{2}(x^2+1)\operatorname{arctg} x-\frac{\pi}{8}x^2-\frac{x-1}{2}$.

1180. $y=\frac{1}{2}\left(x^2-\frac{1}{2}\right)\operatorname{arcsen} x+\frac{1}{4}x\sqrt{1-x^2}-\frac{\pi}{12}x^2$.

1181. $y=x\operatorname{sen} x+\cos x-\frac{1}{4}x^2 \quad \left(-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$.

1182. $y=\left(\frac{1}{2}-x\right)\cos x+\operatorname{sen} x-\frac{x^2-x}{4} \quad \left(0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$.

1183. $y=\frac{2-x}{\pi}\cos\pi(x+3)+\frac{1}{\pi^2}\operatorname{sen}(x+3) \quad (0<x<4)$.

1184. $y=ae^{px}+be^{-px}$.

En los ejercicios 1185—1197 hallar los valores máximos y mínimos de las funciones dadas en los intervalos que se indican.

1185. $y = x^4 - 2x^2 + 5$; $[-2,\ 2]$.

1186. $y = x + 2\sqrt{\ }$; $[0,\ 4]$.

1187. $y = x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 1$; $[-1,\ 2]$.

1188. $y = x^3 - 3x^2 + 6x - 2$; $[-1,\ 1]$.

1189. $y=\sqrt{100-x^2} \quad (-6\leqslant x\leqslant 8)$.

1190. $y=\frac{1-x+x^2}{1+x-x^2} \quad (0\leqslant x\leqslant 1)$.

1191. $y=\frac{x-1}{x+1} \quad (0\leqslant x\leqslant 4)$.

1192. $y=\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{1-x} \quad (0<x<1)\ (a>0,\ b>0)$.

1193. $y=\operatorname{sen} 2x-x \left(-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$.

1194. $y=2\operatorname{tg} x-\operatorname{tg}^2 x \left(0\leqslant x<\frac{\pi}{2}\right)$.

1195. $y=x^x \quad (0{,}1\leqslant x<\infty)$.

1196. $y=\sqrt[3]{(x^2-2x)^2} \quad (0\leqslant x\leqslant 3)$.

1197. $y=\operatorname{arctg}\frac{1-x}{1+x} \quad (0\leqslant x\leqslant 1)$.

Desigualdades

En los ejercicios 1198—1207 demostrar la validez de las desigualdades.

1198. $2\sqrt{x} > 3 - \frac{1}{x} \qquad (x > 1).$

1199. $e^x > 1 + x \qquad (x \neq 0).$

1200. $x > \ln(1+x) \qquad (x > 0).$

1201. $\ln x > \frac{2(x-1)}{x+1} \qquad (x > 1).$

1202. $2x \operatorname{arctg} x \geqslant \ln(1+x^2).$

1203. $1 + x\ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) \geqslant \sqrt{1+x^2}.$

1204. $\ln(1+x) > \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x} \qquad (x > 0).$

1205. $\operatorname{sen} x < x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} \qquad (x > 0).$

1206. $\operatorname{sen} x + \operatorname{tg} x > 2x \qquad \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right).$

1207. $\operatorname{ch} x > 1 + \frac{x^2}{2} \qquad (x \neq 0).$

Ejercicios para hallar los valores máximos y mínimos de las funciones

1208. Dividir el número 8 en dos sumandos tales que la suma de sus cubos sea la menor posible.

1209. ¿Qué número positivo sumado a su inverso da lugar a la suma mínima?

1210. Dividir el número 36 en dos factores tales que la suma de sus cuadrados sea la menor posible.

1211. Se debe hacer una caja con tapa, cuyo volumen sea de 72 cm³. Los lados de la base han de estar en relación 1 : 2. ¿Cuáles deben ser las medidas de todos los lados para que la superficie total sea la menor posible?

1212. De una hoja de cartón, de 18 × 18 cm², deben ser recortados cuadrados iguales de modo que doblando la hoja, siguiendo las

Fig. 29

líneas punteadas (véase la fig. 29), resulte una caja que tenga la mayor capacidad posible. ¿Cuánto debe medir cada lado del cuadrado?

1213. Resolver el problema anterior para el caso de la hoja rectangular de 8×5 cm^2.

1214. Al volumen de un prisma triangular regular es igual a v. ¿Cuánto debe medir el lado de la base para que su superficie total sea la menor posible?

1215. Una tina abierta tiene la forma de cilindro. Siendo su volumen igual a v, ¿cuál debe ser el radio de la base y la altura para que su superficie total sea la menor posible?

1216. Hallar la relación entre el radio R y la altura H de un cilindro que tiene la menor superficie total posible, conociendo su volumen.

1217. Se debe hacer un embudo cónico que tenga la generatriz igual a 20 cm. ¿Cuál debe ser la altura del embudo para que su volumen sea el mayor posible?

1218. Un sector de ángulo central α está recortado de un círculo. Al enrollarse el sector, ha sido engendrada una superficie cónica. ¿Cuál debe ser la abertura del ángulo α para que el volumen del cono obtenido sea el mayor posible?

1219. El perímetro de un triángulo isósceles es $2p$. ¿Cuánto deben medir sus lados para que el volumen del cuerpo engendrado por la rotación del triángulo en torno a su base sea el mayor posible?

1220. Al perímetro de un triángulo isósceles es $2p$. ¿Cuánto deben medir sus lados para que el volumen del cono engendrado por la rotación del triángulo en torno a su altura bajada sobre la base sea el mayor posible?

1221. Hallar la altura del cilindro que tenga el volumen máximo posible y que sea susceptible de ser inscrito en una esfera de radio R.

1222. Hallar la altura del cono de máximo volumen que sea susceptible de ser inscrito en una esfera de radio R.

1223. Al actuar la fuerza de gravedad sobre una gota de lluvia cuya masa inicial es igual a m_0, la hace caer. La gota va evaporándose uniformemente de modo que la pérdida de la masa es proporcional al tiempo (el coeficiente de proporcionalidad es k). ¿Al cabo de cuántos segundos al comenzar la caída será máxima la energía cinética de la gota y cuál será su valor? (Se prescinde de la resistencia del aire.)

1224. Una palanca de segundo género tiene A por su punto de apoyo. Del punto B ($AB = a$) está suspendida la carga P. El peso de la unidad de la longitud de la palanca es igual a k. ¿Cuál debería ser la longitud de la palanca para que la carga P quede en equilibrio con la fuerza mínima? (El momento de la fuerza compensadora debe equivaler a la suma de los momentos de la carga P y de la palanca.)

1225. La suma que se gasta en el combustible para el hogar de la caldera de un barco es proporcional al cubo de la velocidad. Es sabido que si el barco marcha a 10 km por hora, se gastan 30 rublos (por hora) en el combustible. Los demás gastos, que no dependen de la velocidad son de 480 rublos por hora. ¿A qué velocidad del barco serían mínimos los gastos totales por un km? ¿Cuál sería la suma total de los gastos por hora?

1226. Tres puntos A, B y C se hallan situados de modo que $\angle ABC = 60°$. Un automóvil sale del punto A y en el mismo momento del punto B parte un tren. El auto avanza hacia el punto B a 80 km por hora, el tren se dirige hacia el punto C a 50 km por hora. Teniendo en cuenta que la distancia $AB = 200$ km, ¿en qué momento, al comenzar el movimiento, será mínima la distancia entre el automóvil y el tren?

1227. Dado un cierto punto A en una circunferencia, trazar una cuerda BC paralela a la tangente en el punto A de modo que el área del triángulo ABC sea la mayor posible.

1228. Hallar los lados del rectángulo de máximo perímetro e inscrito en una semicircunferencia de radio R.

1229. Inscribir el rectángulo de mayor área posible en un segmento dado del círculo.

1230. Circunscribir en torno a un cilindro dado el cono que tenga el menor volumen posible (los planos de las bases circulares del cilindro y del cono deben coincidir).

1231. Hallar la altura del cono recto circular, de menor volumen posible, circunscrito en torno a una esfera de radio R.

1232. Hallar el ángulo en el vértice de la sección axial de un cono que tiene la menor superficie lateral posible y que está circunscrito en torno a una esfera dada.

1233. ¿Cuál ha de ser la abertura del ángulo en el vértice de un triángulo isósceles, de área dada, para que el radio de un círculo inscrito en dicho triángulo sea el mayor posible?

1234. Hallar la altura de un cono que tiene el menor volumen posible y que está circunscrito en torno a una semiesfera de radio R (el centro de la base del cono coincide con el de la esfera).

1235. ¿Cuál ha de ser la altura de un cono inscrito en una esfera de radio R para que su superficie lateral sea la mayor posible?

1236. Demostrar que la cantidad de tela necesaria para hacer una tienda de campaña de forma cónica y de capacidad dada será la menor posible en el caso de que su altura sea $\sqrt{2}$ veces mayor que el radio de la base.

1237. Trazar una recta de modo que pase por un punto dado $P(1, 4)$ y que la suma de las longitudes de los segmentos positivos cortados por dicha recta en los ejes de coordenadas, sea la menor posible.

1238. Hallar los lados del rectángulo, de mayor área posible, inscrito en la elipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

1239. Hallar la elipse cuya área sea la menor posible y que está circunscrita en torno a un rectángulo dado (el área de la elipse de semiejes a y b es igual a πab).

1240. Sea dada la elipse $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{28}=1$. Trazar una tangente de modo que el área del triángulo engendrado por dicha tangente y los ejes de coordenadas, sea la menor posible. ¿Por qué punto de la elipse debe pasar dicha tangente?

1241. Sean dados dos puntos A (1, 4) y B (3, 0) en la elipse $2x^2+y^2=18$. Hallar el tercer punto C tal que el área del triángulo ABC sea la mayor posible.

1242. Sean dados la parábola $y^2=2px$ y un punto en su eje, a una distancia a del vértice. Indicar la abscisa x del punto de la parábola más próximo al punto referido.

1243. Una banda de hierro, de anchura a, ha de ser encorvada de modo que tome la forma de canalón cilíndrico abierto (la sección del canalón ha de semejarse a un arco de segmento circular). ¿Cuál ha de ser la abertura del ángulo central que se apoya en este arco para que la capacidad del canalón sea la mayor posible?

1244. Un tronco de árbol que mide 20 m, tiene la forma de un cono truncado. Los diámetros de sus bases miden 2 m y 1 m, respectivamente. Se debe cortar una viga de sección trasversal cuadrada cuyo eje coincida con el del tronco y cuyo volumen sea el mayor posible. ¿Qué dimensiones debe tener la viga?

1245. Una serie de experimentos con la magnitud A han dado como resultado n valores distintos $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Con frecuencia se admite como valor de A un valor de x tal que la suma de los cuadrados de sus desviaciones de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sea la menor posible. Hallar x que satisfaga esta condición.

1246. Un torpedero está anclado, a 9 km del punto más próximo de la orilla. Se necesita enviar a un mensajero al campamento situado en la orilla. La distancia entre éste y el punto más próximo referido, es igual a 15 km. Teniendo en cuenta que el mensajero recorre a pie 5 km por hora, y en una barca, remando, 4 km por hora, decir en qué punto de orilla debe desembarcar para llegar al campamento lo más pronto posible.

1247. Un farol debe ser colgado exactamente encima del centro de una plazoleta circular de radio R. ¿A qué altura deberá estar el farol para que ilumine, lo mejor posible, una senda que rodea la plazoleta? (La iluminación de la plazoleta es directamente proporcional al coseno del ángulo de incidencia de los rayos luminosos e inversamente proporcional al cuadrado de distancia que media entre el foco luminoso y la plazoleta en mención.)

1248. En un segmento de longitud l que une dos manantiales de luz de intensidad luminosa I_1 e I_2, hallar el punto peor iluminado.

1249. Un cuadro de altura 1,4 m cuelga de la pared de modo que su borde inferior está 1,8 m por encima del radio de la vista de un observador. ¿A qué distancia de la pared debe colocarse el observador para que su posición sea la más ventajosa para contemplar el cuadro (es decir, para que el ángulo visual sea el mayor posible)?

1250. Una carga de peso P situada en un plano horizontal debe ser desplazada bajo la acción de la fuerza F aplicada a ella. La fuerza de rozamiento es proporcional a la de que aprieta el cuerpo contra el plano y tiene la dirección opuesta a la de la fuerza que desplaza el cuerpo. El coeficiente de proporcionalidad (el coeficiente de rozamiento) es igual a k. ¿Qué valor debe tener el ángulo φ formado entre el horizonte y la fuerza F aplicada para que el valor de ésta resulte el menor posible? Hallar el valor mínimo de la fuerza de desplazamiento.

1251. La velocidad con la que pasa el agua por un tubo cilíndrico es directamente proporcional al llamado radio hidráulico R, que se calcula mediante la fórmula $R=\frac{S}{p}$, donde S es el área de sección del flujo del agua dentro del tubo, p es el perímetro de la sección del tubo hundido en el agua. La proporción (o el grado) en que el agua llena el tubo, se caracteriza por el ángulo central que se apoya sobre la superficie horizontal del agua coriente. ¿Cuál ha de ser esta proporción para que la velocidad del paso del agua sea la mayor posible? (Al resolver el problema, aparece una ecuación transcendente cuyas raíces han de ser halladas gráficamente).

1252. En una página de un libro el texto impreso debe ocupar S cm². Los márgenes superior e inferior deben ser iguales a a cm, los de izquierda y de derecha, iguales a b cm. Si tomamos en consideración sólo la economía del papel, ¿qué dimensiones de la página serían las más ventajosas?

1253*. Un embudo cónico, de radio de base R y altura H está lleno de agua. Una esfera pesada está sumergida en el embudo. ¿Cuál ha de ser el radio de la esfera para que el volumen de agua expulsada del embudo por la parte sumergida de la esfera, sea el mayor posible?

1254. Una parábola tiene su vértice situado sobre una circunferencia de radio R, y el eje de la parábola sigue la dirección del diámetro. ¿Cuál ha de ser el parámetro de la parábola para que el área del segmento limitado por la parábola y la cuerda común para ésta y la circunferencia, sea la mayor posile? (El área del segmento parabólico simétrico es igual a dos tercios del producto de su base por la altura.)

1255. Un plano, paralelo a la generatriz, corta un cono cuyo radio de base es R y cuya altura, H. ¿Cuál ha de ser la distancia entre la línea de intersección de dicho plano con el plano de la base cónica y el centro de la base cónica para que el área de sección sea la mayor posible? (Véase también el ejercicio anterior.)

1256. Sea dada la parábola $y^2 = 2px$ y la normal en un punto P. ¿Dónde debe estar situado el punto P para que el segmento de la normal situado dentro de la curva tenga la longitud mínima?

1257. El segmento de la tangente a una elipse comprendido entre los ejes, tiene longitud mínima. Mostrar que la tangente se divide, en el punto de contacto, en dos partes iguales a los semiejes de la elipse, respectivamente.

1258. Demostrar que la distancia entre el centro de la elipse y cualquier normal no es superior a la diferencia de los semiejes. (Es conveniente recurrir a la expresión paramétrica de la elipse.)

1259. En el sistema de coordenadas rectangulares xOy vienen dados el punto (a, b) y la curva $y = f(x)$. Mostrar que la distancia entre el punto constante (a, b) y la variable $(x, f(x))$ puede alcanzar su extremo sólo siguiendo la dirección de la normal a la curva $y = f(x)$.

Se llama función primitiva de la función $f(x)$ a la función $F(x)$ cuya derivada es igual a la dada: $F'(x) = f(x)$.

En los ejercicios 1260—1262 mostrar (derivando y sin derivar) que las funciones dadas son primitivas de una misma función.

1260. $y = \ln ax$ e $y = \ln x$.

1261. $y = 2 \operatorname{sen}^2 x$ e $y = -\cos 2x$.

1262. $y = (e^x + e^{-x})^2$ e $y = (e^x - e^{-x})^2$.

1263*. Mostrar que la función

$$y = \cos^2 x + \cos^2\left(\frac{\pi}{3} + x\right) - \cos x \cos\left(\frac{\pi}{3} + x\right)$$

es constante (es decir, no depende de x). Hallar su valor.

1264. Mostrar que la función $y = 2 \operatorname{arctg} x + \operatorname{arcsen} \frac{2x}{1+x^2}$ es constante cuando $x \geqslant 1$. Hallar el valor de esta constante.

1265. Mostrar que la función

$$y = \arccos \frac{a \cos x + b}{a + b \cos x} - 2 \operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}} \operatorname{tg} \frac{x}{2}\right),$$

donde $0 < b \leqslant a$ es constante cuando $x \geqslant 0$. Hallar el valor de esta constante.

1266. Comprobar que las funciones $\frac{1}{2} e^{2x}$, $e^x \operatorname{sh} x$ y $e^x \operatorname{ch} x$ difieren en una magnitud constante. Mostrar que cada una de las funciones indicadas es una función primitiva con respecto a la función e^{2x}.

§ 3. Aplicación de la segunda derivada

Extremos

Aplicando el concepto de la segunda derivada, hallar los extremos de las funciones que se indican en los ejercicios 1267—1275.

1267. $y = x^3 - 2ax^2 + a^2x$ $(a > 0)$.

1268. $y = x^2(a-x)^2$. **1269.** $y = x + \frac{a^2}{x}$ $(a > 0)$.

1270. $y = x + \sqrt{1-x}$. **1271.** $y = x\sqrt{2-x^2}$.

1272. $y = \operatorname{ch} ax$. **1273.** $y = x^2e^{-x}$.

1274. $y = \frac{x}{\ln x}$. **1275.** $y = x^{\frac{1}{x}}$.

1276. ¿Para qué valor de a la función

$$f(x) = a \operatorname{sen} x + \frac{1}{3} \operatorname{sen} 3x$$

tiene el extremo para $x = \pi/3$? ¿Será máximo o mínimo?

1277. Hallar los valores de a y b para los cuales la función

$$y = a \ln x + bx^2 + x$$

tiene extremos en los puntos $x_1 = 1$ y $x_2 = 2$. Mostrar que para estos valores de a y b la función dada tiene el mínimo en el punto x_1, y el máximo en el punto x_2.

Convexidad, concavidad, puntos de inflexión

1278. Aclarar si es convexa o cóncava la línea $y = x^5 - 5x^3 - 15x^2 + 30$ en los entornos de los puntos $(1, 11)$ y $(3, 3)$.

1279. Aclarar si es convexa o cóncava la línea $y = \operatorname{arctg} x$ en los entornos de los puntos $(1, \pi/4)$ y $(-1, -\pi/4)$.

1280. Aclarar si es convexa o cóncava la línea $y = x^2 \ln x$ en los entornos de los puntos $(1, 0)$ y $(1/e^2, -2/e^4)$.

1281. Mostrar que la gráfica de la función $y = x \operatorname{arctg} x$ es cóncava en todas partes.

1282. Mostrar que la gráfica de la función $y = \ln(x^2 - 1)$ es convexa en todas partes.

1283. Demostrar que si la gráfica de la función es convexa en todas partes o cóncava en todas partes, la función referida puede tener no más que un valor extremo.

1284. Sea $P(x)$ un polinomio de coeficientes positivos y exponentes pares. Mostrar que la gráfica de la función $y = P(x) + ax + b$ es cóncava en todas partes.

1285. Las líneas $y = \varphi(x)$ e $y = \psi(x)$ son cóncavas sobre el intervalo (a, b). Demostrar que sobre dicho intervalo: a) la línea $y = \varphi(x) + \psi(x)$ es cóncava; b) si $\varphi(x)$ y $\psi(x)$ son positivas y tienen un punto mínimo común, la línea $y = \varphi(x)\psi(x)$ es cóncava.

1286. Mostrar qué aspecto ofrece la gráfica de la función si se sabe que en el intervalo (a, b):
1) $y > 0,\ y' > 0,\ y'' < 0$; 2) $y > 0,\ y' < 0,\ y'' > 0$;
3) $y < 0,\ y' > 0,\ y'' > 0$; 4) $y > 0,\ y' < 0,\ y'' < 0$.

En los ejercicios 1287—1300 hallar los puntos de inflexión, intervalos de concavidad y de convexidad de las gráficas de las funciones que se indican.

1287. $y = x^3 - 5x^2 + 3x - 5$. **1288.** $y = (x + 1)^4 + e^x$.
1289. $y = x^4 - 12x^3 + 48x^2 - 50$.
1290. $y = x + 36x^2 - 2x^3 - x^4$.
1291. $y = 3x^5 - 5x^4 + 3x - 2$.
1292. $y = (x+2)^6 + 2x + 2$. **1293.** $y = \frac{x^3}{x^2 + 3a^2}$ $(a > 0)$.
1294. $y = a - \sqrt[3]{x - b}$. **1295.** $y = e^{\operatorname{sen} x}$ $\left(-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}\right)$.
1296. $y = \ln(1 + x^2)$. **1297.** $y = \frac{a}{x} \ln \frac{x}{a}$ $(a > 0)$.
1298. $y = a - \sqrt[5]{(x - b)^2}$. **1299.** $y = e^{\operatorname{arctg} x}$.
1300. $y = x^4 (12 \ln x - 7)$.

1301. Mostrar que la línea $y = \frac{x+1}{x^2+1}$ tiene tres puntos de inflexión que están situados en una misma recta.

1302. Mostrar que los puntos de inflexión de la línea $y = x \operatorname{sen} x$ están situados en la línea $y^2(4 + x^2) = 4x^2$.

1303. Mostrar que los puntos de inflexión de la línea $y = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$ están situados en la línea $y^2(4 + x^4) = 4$.

1304. Confirmar que las gráficas de las funciones $y = \pm e^{-x}$ e $y = e^{-x} \operatorname{sen} x$ (la curva de oscilaciones amortiguadas) tienen tangentes comunes en los puntos de inflexión de la línea $y = e^{-x} \operatorname{sen} x$.

1305. ¿Para qué valores de a y b el punto $(1, 3)$ es el de inflexión de la línea $y = ax^3 + bx^2$?

1306. Elegir α y β tales que el punto $A\,(2;\ 2{,}5)$ sea el de inflexión de la línea $x^2y + \alpha x + \beta y = 0$. ¿Qué otros puntos de inflexión tiene la línea referida?

1307. ¿Para qué valores de a tiene puntos de inflexión la gráfica de la función $y = e^x + ax^3$?

1308. Demostrar que la abscisa del punto de inflexión en la gráfica de una función no puede coincidir con el punto del extremo de esta misma función.

1309. Demostrar que entre dos puntos de extremo de cualquier función derivada dos veces está situada por lo menos una abscisa del punto de inflexión de la gráfica de la función.

1310. Comprobar lo siguiente, tomando la función $y = x^4 + 8x^3 + 18x^2 + 8$ como ejemplo: entre las abscisas de los puntos de inflexión de la gráfica de la función puede no haber puntos de extremo (comparar con el ejercicio anterior).

1311. Observando y examinando la gráfica de la función (véase la fig. 30) indicar el aspecto de las gráficas de su primera y segunda derivadas.

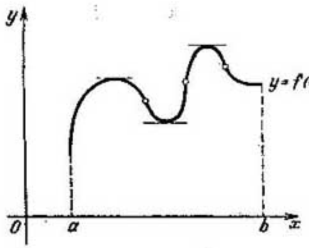

Fig. 30

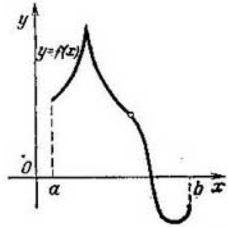

Fig. 31

1312. Hacer lo mismo con respecto a la gráfica de la función presentada en la fig. 31.

1313. Indicar el aspecto de la gráfica de la función examinando la gráfica de su derivada (véase la fig. 32).

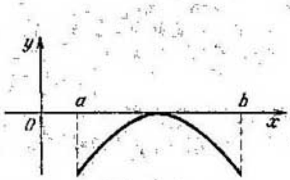

Fig. 32

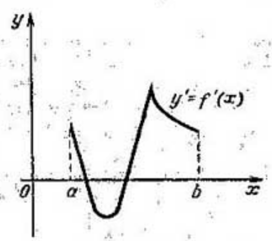

Fig. 33

1314. Indicar el aspecto de la gráfica de la función examinando la gráfica de su derivada (véase la fig. 33).

1315. La línea viene dada en forma paramétrica por las ecuaciones $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$. Mostrar que a los valores de t para los cuales la expresión $\frac{\varphi'\psi'' - \psi'\varphi''}{\varphi}$ cambia de signo (la prima designa la derivación con respecto a t) y $\varphi'(t) \neq 0$, les corresponden los puntos de inflexión de la línea referida.

1316. Hallar los puntos de inflexión para la línea $x = t^2$, $y = 3t + t^3$.

1317. Hallar los puntos de inflexión para la línea $x = e^t$, $y = \operatorname{sen} t$.

§ 4. Tareas complementarias. Resolución de ecuaciones.

Fórmula de Cauchy y regla de L'hospital

1318. Escribir la fórmula de Cauchy para las funciones $f(x) = \operatorname{sen} x$ y $\varphi(x) = \ln x$ en el intervalo $[a, b]$, $0 < a < b$.

1319. Escribir la fórmula de Cauchy para las funciones $f(x) = e^{2x}$ y $\varphi(x) = 1 + e^x$ en el intervalo $[a, b]$.

1320. Comprobar la validez de la fórmula de Cauchy para las funciones $f(x) = x^3$ y $\varphi(x) = x^2 + 1$ en el intervalo $[1, 2]$.

1321. Comprobar la validez de la fórmula de Cauchy para las funciones $f(x) = \operatorname{sen} x$ y $\varphi(x) = x + \cos x$ en el intervalo $[0, \pi/2]$.

1322. Demostrar que si en el intervalo $[a, b]$ se cumple la expresión $|f'(x)| \geqslant |\varphi'(x)|$, y $\varphi'(x)$ no se reduce a cero, también será válida la expresión $|\Delta f(x)| \geqslant |\Delta\varphi(x)|$, donde $\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x)$, $\Delta\varphi(x) = \varphi(x + \Delta x) - \varphi(x)$, y x y $x + \Delta x$ son cualesquiera puntos del intervalo $[a, b]$.

1323. Demostrar que en el intervalo $[x, 1/2]$ $(x \geqslant 0)$ el incremento de la función $y = \ln(1 + x^2)$ es menor que el de la función $y = \operatorname{arctg} x$, y en el intervalo $[1/2, x]$, viceversa, es decir, $\Delta \operatorname{arctg} x < \Delta \ln(1 + x^2)$. Valiéndose de esta última relación mostrar que en el intervalo $[1/2, 1]$

$$\operatorname{arctg} x - \ln(1 + x^2) \geqslant \frac{\pi}{4} - \ln 2.$$

En los ejercicios 1324—1364 hallar los límites.

1324. $\lim\limits_{x \to a} \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{a}}{\sqrt{x} - \sqrt{a}}$.

1325. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln \cos x}{x}$.

1326. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{\operatorname{sen} x}$.

1327. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^{\alpha x} - \cos \alpha x}{e^{\beta x} - \cos \beta x}$.

1328. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\operatorname{arctg} x}{x^3}$.

1329. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{a\sqrt{x}}-1}{\sqrt{\operatorname{sen} bx}}$.

1330. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\operatorname{sen} x}{x-\operatorname{tg} x}$.

1331. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{\pi-2\operatorname{arctg} x}{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}$.

1332. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^m-a^m}{x^n-a^n}$.

1333. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-b^x}{c^x-d^x}$.

1334. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-1}{\cos x-1}$.

1335. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{\operatorname{sen} x\cos x}$.

1336. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-b^x}{x\sqrt{1-x^2}}$.

1337. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\cos x\ln(x-a)}{\ln(e^x-e^a)}$.

1338. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\operatorname{sen} x}$.

1339. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\operatorname{tg} x}-e^x}{\operatorname{tg} x-x}$.

1340. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-\frac{x^3}{6}-\frac{x^2}{2}-x-1}{\cos x+\frac{x^2}{2}-1}$.

1341. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^3}-1-x^3}{\operatorname{sen}^6 2x}$.

1342. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)^4-4x+2x^2-\frac{4}{3}x^3+x^4}{6\operatorname{sen} x-6x+x^3}$.

1343. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\operatorname{sen} 2x}{\ln\operatorname{sen} x}$.

1344. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln x}{\ln\operatorname{sen} x}$.

1345. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln(1-x)+\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}}{\operatorname{ctg}\pi x}$.

1346. $\lim\limits_{x\to +\infty}(x^n e^{-x})$.

1347. $\lim\limits_{x\to \infty}[(\pi-2\operatorname{arctg} x)\ln x]$.

1348. $\lim\limits_{x\to \infty}\left[x\operatorname{sen}\dfrac{a}{x}\right]$.

1349. $\lim\limits_{x\to 1}\left[\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}\right]$.

1350. $\lim\limits_{\varphi\to a}\left[(a^2-\varphi^2)\operatorname{tg}\dfrac{\pi\varphi}{2a}\right]$.

1351. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{x}{\ln x}\right)$.

1352. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\operatorname{ctg} x-\dfrac{1}{x}\right)$.

1353. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{\cos\frac{\pi x}{2}\ln(1-x)}$.

1354. $\lim\limits_{x\to \infty}[\sqrt[3]{(a+x)(b+x)(c+x)}-x]$.

1355. $\lim\limits_{x\to \infty}[x(e^{\frac{1}{x}}-1)]$.

1356. $\lim\limits_{x\to 0}[x^2 e^{\frac{1}{x^2}}]$.

1357. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}(\operatorname{tg} x)^{2x-\pi}$.

1358. $\lim\limits_{x\to 0} x^{\operatorname{sen} x}$.

1359. $\lim\limits_{x\to 0} x^{\frac{1}{\ln(e^x-1)}}$.

1360. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}\right)^{\operatorname{tg} x}$.

1361. $\lim\limits_{x\to 0}(e^x+x)^{\frac{1}{x}}$. **1362.** $\lim\limits_{x\to a}\left(2-\frac{x}{a}\right)^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2a}}$.

1363. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^x$. **1364.** $\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{\ln(1+x)^{1+x}}{x^2}-\frac{1}{x}\right]$.

1365. Comprobar que $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x-\operatorname{sen} x}{x+\operatorname{sen} x}$ existe, pero no es susceptible de ser calculado de acuerdo con la regla de L'Hospital.

1366. ¿El valor de qué función (para valores suficientemente grandes de x) es mayor: $a^x x^a$ o x^x?

1367. ¿Los valores de qué función (para valores suficientemente grandes de x) son mayores: $f(x)$ o $\ln f(x)$ cuando $f(x)\to\infty$, para $x\to\infty$.

1368. Sea $x\to 0$. Demostrar que $e-(1+x)^{\frac{1}{x}}$ es una infinitesimal de primer orden respecto a x.

1369. Sea $x\to 0$. Demostrar que $\ln(1+x)-e\ln\ln(e+x)$ es una infinitesimal de segundo orden respecto a x.

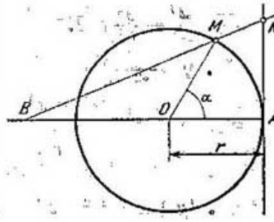

Fig. 34

1370. La tangente trazada en el punto A a una circunferencia de radio r (véase la fig. 34) lleva marcado un segmento AN cuya longitud es igual a la del arco AM. La recta MN corta la prolongación del diámetro AO en el punto B. Comprobar que

$$OB=\frac{r(\alpha\cos\alpha-\operatorname{sen}\alpha)}{\operatorname{sen}\alpha-\alpha},$$

donde α es la medida en radianes del ángulo central correspondiente al arco AM, y mostrar que $\lim\limits_{\alpha\to 0} OB=2r$.

Variación asintótica de las funciones y asíntotas de las líneas

1371. Partiendo directamente de la definición, comprobar que la recta $y=2x+1$ es una asíntota de la línea

$$y=\frac{2x^4+x^3+1}{x^3}.$$

1372. Partiendo directamente de la definición, comprobar que la recta $x+y=0$ es una asíntota de la línea $x^2y+xy^2=1$.

1373. Demostrar que las líneas $y=\sqrt[3]{x^3+3x^2}$ e $y=\frac{x^2}{x-1}$ se aproximan asintóticamente cuando $x\to\pm\infty$.

1374. Demostrar que las funciones

$$f(x)=\sqrt{x^6+2x^4+7x^2+1} \text{ y } \varphi(x)=x^3+x$$

son equivalentes asintóticamente cuando $x \to \infty$. Valiéndose de esta circunstancia calcular aproximadamente $f(115)$ y $f(120)$. ¿Cuál sería el error si pusiéramos $f(100)=\varphi(100)$?

En los ejercicios 1375—1391 hallar las asíntotas de las líneas dadas.

1375. $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$. **1376.** $xy=a$.

1377. $y=\frac{1}{x^2-4x+5}$. **1378.** $y=c+\frac{a^3}{(x-b)^2}$.

1379. $2y(x+1)^2=x^3$. **1380.** $y^3=a^3-x^3$.

1381. $y^3=6x^2+x^3$. **1382.** $y^2(x^2+1)=x^2(x^2-1)$.

1383. $xy^2+x^2y=a^3$.

1384. $y(x^2-3bx+2b^2)=x^3-3ax^2+a^3$.

1385. $(y+x+1)^2=x^2+1$. **1386.** $y=x\ln\left(e+\frac{1}{x}\right)$.

1387. $y=xe^x$. **1388.** $y=xe^{\frac{2}{x}}+1$.

1389. $y=x \operatorname{arcsec} x$. **1390.** $y=2x+\operatorname{arctg}\frac{x}{2}$.

1391. $y=\frac{xf(x)+a}{f(x)}$, donde $f(x)$ es un polinomio, $(a\neq 0)$.

1392. Una línea es dada paramétricamente por las ecuaciones $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$. Demostrar que las asíntotas no paralelas a los ejes de coordenadas pueden existir sólo cuando para los valores de $t=t_0$, existen simultáneamente

$$\lim_{t\to t_0}\varphi(t)=\infty \text{ y } \lim_{t\to t_0}\psi(t)=\infty.$$

Si la ecuación de la asíntota es $y=ax+b$, se tiene

$$a=\lim_{t\to t_0}\frac{\psi(t)}{\varphi(t)}, \quad b=\lim_{t\to t_0}[\psi(t)-a\varphi(t)].$$

¿Cómo se podrían hallar las asíntotas paralelas a los ejes de coordenadas?

1393. Hallar las asíntotas de la línea: $x=\frac{1}{t}$, $y=\frac{t}{t+1}$.

1394. Hallar las asíntotas de la línea: $x=\frac{2e^t}{t-1}$, $y=\frac{te^t}{t-1}$.

1395. Hallar las asíntotas de la línea: $x=\frac{2t}{1-t^2}$, $y=\frac{t^2}{1-t^2}$.

1396. Hallar las asíntotas del folio de Descartes: $x=\frac{3at}{1+t^3}$, $y=\frac{3at^2}{1+t^3}$.

1397. Hallar las asíntotas de la línea: $x=\frac{t-8}{t^2-4}$, $y=\frac{3}{t(t^2-4)}$

Análisis general de las funciones y de las líneas

En los ejercicios 1398—1464 efectuar un análisis exhaustivo de las funciones que se indican y trazar sus gráficas.

1398. $y=\frac{x}{1+x^2}$.

1399. $y=\frac{x}{1-x^2}$.

1400. $y=\frac{x}{x^2-1}$.

1401. $y(x-1)(x-2)(x-3)=1$.

1402. $y=\frac{x^2}{x^2-1}$.

1403. $y=(x^2-1)^3$.

1404. $y=32x^2(x^2-1)^3$.

1405. $y=\frac{1}{x}+4x^2$.

1406. $y=x^2+\frac{1}{x^2}$.

1407. $y=\frac{2x-1}{(x-1)^2}$.

1408. $y=\frac{x^3}{3-x^2}$.

1409. $y=\frac{x^3}{2(x+1)^2}$.

1410. $y(x-1)=x^3$.

1411. $y(x^3-1)=x^4$.

1412. $y=\frac{(x-1)^2}{(x+1)^3}$.

1413. $y=\frac{x^3+2x^2+7x-3}{2x^2}$.

1414. $xy=(x^2-1)(x-2)$.

1415. $(y-x)x^4+8=0$.

1416. $y=\frac{x}{e^x}$.

1417. $y=x^2e^{-x}$.

1418. $y=\frac{e^x}{x}$.

1419. $y=x-\ln(x+1)$.

1420. $y=\ln(x^2+1)$.

1421. $y=x^2e^{-x^2}$.

1422. $y=x^3e^{-x}$.

1423. $y=xe^{-\frac{x^2}{2}}$.

1424. $y=\frac{1}{e^x-1}$.

1425. $y=x+\frac{\ln x}{x}$.

1426. $y=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$.

1427. $y=x+\operatorname{sen} x$.

1428. $y=x\operatorname{sen} x$.

1429. $y=\ln\cos x$.

1430. $y=\cos x-\ln\cos x$.

1431. $y=x-2\operatorname{arctg} x$.

1432. $y = e^{\frac{1}{x^2-4x+3}}$ (sin buscar puntos de inflexión).
1433. $y = e^{\operatorname{sen} x} - \operatorname{sen} x$ (sin buscar puntos de inflexión).
1434. $y = \sqrt[3]{x^2} - x$. **1435.** $y^3 = x^2(x^2-4)^3$.
1436. $(3y+x)^3 = 27x$.
1437. $y = \sqrt[3]{(x+1)^2} - \sqrt[3]{x^2} = 1$.
1438. $y = (x-1)^{\frac{2}{3}}(x+1)^3$. **1439.** $y^3 = 6x^2 - x^3$.
1440. $(y-x)^2 = x^5$. **1441.** $(y-x^2)^2 = x^5$
1442. $y^2 = x^3 + 1$. **1443.** $y^2 = x^3 - x$.
1444. $y^2 = x(x-1)^2$. **1445.** $y^2 = x^2(x-1)$.
1446. $y^2 = \frac{x^3-2}{3x}$. **1447.** $x^2y + xy^2 = 2$.
1448. $y^2 = x^2\frac{a+x}{a-x}$ (estrofoide) $(a > 0)$.
1449. $9y^2 = 4x^3 - x^4$. **1450.** $25y^2 = x^2(4-x^2)^3$.
1451. $y^2 = x^2 - x^4$. **1452.** $x^2y^2 = 4(x-1)$.
1453. $y^2(2a-x) = x^3$ (cisoide) $(a > 0)$.
1454. $x^2y^2 = (x-1)(x-2)$.
1455. $x^2y^2 = (a+x)^3(a-x)$ (concoide) $(a > 0)$.
1456. $16y^2 = (x^2-4)^2(1-x^2)$. **1457.** $y^2 = (1-x^2)^3$.
1458. $y^2x^4 = (x^2-1)^3$. **1459.** $y^2 = 2exe^{-2x}$.
1460. $y = e^{\frac{1}{x}} - x$. **1461.** $y = e^{\operatorname{tg} x}$.
1462. $f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$, $f(0) = 1$
1463. $y = 1 - xe^{-\frac{1}{|x|} - \frac{1}{x}}$ cuando $x \neq 0$, $y = 1$ para $x = 0$.
1464. $y = x^2 - 4|x| + 3$.

En los ejercicios 1465—1469 analizar las funciones dadas en forma paramétrica y trazar sus gráficas.

1465. $x = t^3 + 3t + 1$, $y = t^3 - 3t + 1$.
1466. $x = t^3 - 3\pi$, $y = t^3 - 6 \operatorname{arctg} t$.
1467. $x = \frac{3t}{1+t^3}$, $y = \frac{3t^2}{1+t^3}$.
1468. $x = te^t$, $y = te^{-t}$.
1469. $x = 2a\cos t - a\cos 2t$, $y = 2a \operatorname{sen} t - a \operatorname{sen} 2t$ (cardioide).

En los ejercicios 1470—1477 analizar las líneas cuyas ecuaciones son dadas en el sistema de coordenadas polares (véase la nota en la pág. 31).

1470. $\rho = a \operatorname{sen} 3\varphi$ (rosa de tres pétalos).

1471. $\rho = a \operatorname{tg} \varphi$. **1472.** $\rho = a(1 + \operatorname{tg} \varphi)$.

1473. $\rho = a(1 + \cos \varphi)$ (cardioide).

1474. $\rho = a(1 + b \cos \varphi)$ $(a > 0,\ b > 1)$.

1475. $\rho = \sqrt{\frac{\pi}{\varphi}}$ (lituo).

1476. $\rho = \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{\varphi}{\pi}$.

1477. $\rho = \sqrt{1 - t^2}$, $\varphi = \operatorname{arcsen} t + \sqrt{1 - t^2}$.

En los ejercicios 1478—1481 analizar y construir las líneas después de haber reducido sus ecuaciones al sistema de coordenadas polares.

1478. $(x^2 + y^2)^3 = 4a^2x^2y^2$. **1479.** $(x^2 + y^2)\, x = a^2y$.

1480. $x^4 + y^4 = a^2(x^2 + y^2)$.

1481. $(x^2 + y^2)(x^2 - y^2)^2 = 4x^2y^2$.

Resolución de ecuaciones

1482. Comprobar que la ecuación $x^3 - x^2 - 8x + 12 = 0$ tiene sólo una raíz simple $x_1 = -3$ y la otra, doble $x_2 = 2$.

1483. Comprobar que la ecuación $x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 4 = 0$ tiene dos raíces dobles $x_1 = 1$ y $x_2 = -2$.

1484. Mostrar que la ecuación $x \operatorname{arcsen} x = 0$ tiene sólo una raíz real $x = 0$ siendo ésta doble.

1485. Mostrar que las raíces de la ecuación $x \operatorname{sen} x = 0$ tienen la forma $y = k\pi$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$, correspondiendo al valor $k = 0$ una raíz doble. ¿Cuál es la multiplicidad de las demás raíces?

1486. Mostrar que la ecuación $x^3 - 3x^2 + 6x - 1 = 0$ tiene sólo una raíz real simple perteneciente al intervalo $(0, 1)$. Hallar esta raíz, con exactitud hasta 0,1, aplicando el método de pruebas.

1487. Mostrar que la ecuación $x^4 + 3x^2 - x - 2 = 0$ tiene dos, y sólo dos, raíces reales simples pertenecientes a los intervalos $(-1, 0)$ y $(0, 1)$, respectivamente. Aplicando el método de pruebas, hallar estas raíces con exactitud hasta 0,1.

1488. Mostrar que la ecuación $f(x) = a \neq 0$, donde $f(x)$ es un polinomio de coeficientes positivos, siendo impares los exponentes de todos sus términos, tiene una, y sólo una, raíz real, que puede ser múltiple. Analizar el caso de $a = 0$. Hallar la raíz de la ecuación $x^3 + 3x - 1 = 0$, con exactitud hasta 0,01 y combinando el método de pruebas con el de cuerdas.

1489. Demostrar el siguiente teorema: para que la ecuación $x^3 + px + q = 0$ tenga tres raíces reales simples, es necesario y suficiente que los coeficientes p y q satisfagan la desigualdad $4p^3 + 27q^2 < 0$. Hallar todas las raíces de la ecuación $x^3 - 9x + 2 = 0$, con exactitud hasta 0,01 y combinando el método de pruebas con el de cuerdas.

1490. Mostrar que la ecuación $x^4 + 2x^2 - 6x + 2 = 0$ tiene dos, y sólo dos, raíces reales simples pertenecientes a los intervalos $(0, 1)$ y $(1, 2)$, respectivamente. Hallar estas raíces con exactitud hasta 0,01 combinando el método de cuerdas con el de tangentes.

1491. Mostrar que la ecuación $x^5 + 5x + 1 = 0$ tiene una raíz real simple perteneciente al intervalo $(-1, 0)$. Hallar esta raíz con exactitud hasta 0,01 combinando el método de cuerdas con el de tangentes.

En los ejercicios 1492—1497 deben hallarse los valores aproximados de las raíces de las ecuaciones combinando los tres métodos: el de pruebas, el de cuerdas y el de tangentes. (En caso necesario conviene usar tablas de los valores de las funciones que figuren en las ecuaciones).

1492. Mostrar que la ecuación $xe^x = 2$ tiene solamente una raíz real perteneciente al intervalo $(0, 1)$. Hallar esta raíz con exactitud hasta 0,01.

1493. Mostrar que la ecuación $x \ln x = a$ no tiene raíces reales cuando $a < -1/e$, tiene una raíz real doble cuando $a = -1/e$, dos raíces reales simples cuando $-1/e < a < 0$ y una raíz real simple cuando $a \geqslant 0$. Hallar la raíz de la ecuación $x \ln x = 0{,}8$ con exactitud hasta 0,01.

1494. Mostrar que la llamada ecuación de Kepler $x = \varepsilon \operatorname{sen} x + a$, donde $0 < \varepsilon < 1$ tiene una raíz real simple. Hallar esta raíz con exactitud hasta 0,001 para $\varepsilon = 0{,}538$ y $a = 1$.

1495. Mostrar que la ecuación $a^x = ax$ para $a > 1$ siempre tiene dos, y sólo dos, raíces reales y positivas, siendo una igual a 1 y otra, menor, mayor o igual a 1, lo cual depende de si a es mayor, menor o igual a e. Hallar la segunda raíz de esta ecuación con exactitud hasta 0,001 cuando $a = 3$.

1496. Mostrar que la ecuación $x^2 \operatorname{arctg} x = a$, donde $a \neq 0$, tiene una raíz real. Hallar esta raíz con exactitud hasta 0,001 cuando $a = 1$.

1497. ¿Cuál ha de ser la base a de un sistema de logaritmos en el que existen números iguales a sus logaritmos? ¿Cuántos números de este tipo puede haber? Hallar este número (con exactitud hasta 0,01) para $a = 1/2$.

§ 5. Fórmula de Taylor y su aplicación

Fórmula de Taylor para los polinomios

1498. Desarrollar el polinomio $x^4 - 5x^3 + x^2 - 3x + 4$ en potencias del binomio $x - 4$.

1499. Desarrollar el polinomio $x^3 + 3x^2 - 2x + 4$ en potencias del binomio $x + 1$.

1500. Desarrollar el polinomio $x^{10} - 3x^5 + 1$ en potencias del binomio $x - 1$.

1501. Desarrollar la función $f(x) = (x^2 - 3x + 1)^3$ en potencias de x, aplicando la fórmula de Taylor.

1502. $f(x)$ es un polinomio de cuarto grado. Sabiendo que $f(2) = -1$, $f'(2) = 0$, $f''(2) = 2$, $f'''(2) = -12$, $f^{IV}(2) = 24$, calcular $f(-1)$, $f'(0)$, $f''(1)$.

Fórmula de Taylor

1503. Escribir la fórmula de Taylor de n-ésimo orden para la función $y = \frac{1}{x}$ cuando $x_0 = -1$.

1504. Escribir la fórmula de Taylor (la de Maclaurin) de n-ésimo orden para la función $y = xe^x$ para $x_0 = 0$.

1505. Escribir la fórmula de Taylor de n-ésimo orden para la función $y = \sqrt{x}$ cuando $x_0 = 4$.

1506. Escribir la fórmula de Taylor de $2n$-ésimo orden para la función $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ cuando $x_0 = 0$.

1507. Escribir la fórmula de Taylor de n-ésimo orden para la función $y = x^3 \ln x$ cuando $x_0 = 1$.

1508. Escribir la fórmula de Taylor de $2n$-ésimo orden para la función $y = \operatorname{sen}^2 x$ cuando $x_0 = 0$.

1509. Escribir la fórmula de Taylor del 3er orden para la función $y = \frac{x}{x-1}$ cuando $x_0 = 2$ y construir las gráficas de la función dada y de su polinomio de Taylor de tercer grado.

1510. Escribir la fórmula de Taylor de 2° orden para la función $y = \operatorname{tg} x$ cuando $x_0 = 0$ y construir la gráfica de la función dada y de su polinomio de Taylor de segundo grado.

1511. Escribir la fórmula de Taylor de 3er orden para la función $y = \operatorname{arcsen} x$ cuando $x_0 = 0$ y construir la gráfica de la función dada y de su polinomio de Taylor de tercer grado.

1512. Escribir la fórmula de Taylor de 3^{er} orden para la función $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ cuando $x_0 = 1$ y construir la gráfica de la función dada y de su polinomio de Taylor de tercer grado.

1513*. Demostrar que el número θ en el término complementario de la fórmula de Taylor de primer orden

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2} f''(a + \theta h)$$

tiende a 1/3 para $h \to 0$, si $f'''(x)$ es continua para $x = a$ y $f'''(a) \neq \neq 0$.

Algunas aplicaciones de la fórmula de Taylor

En los ejercicios 1514—1519 analizar el comportamiento de las funciones dadas en los puntos que se indican.

1514. $y = 2x^6 - x^3 + 3$ en el punto $x = 0$.

1515. $y = x^{11} + 3x^6 + 1$ en el punto $x = 0$.

1516. $y = 2\cos x + x^2$ en el punto $x = 0$.

1517. $y = 6\ln x - 2x^3 + 9x^2 - 18x$ en el punto $x = 1$.

1518. $y = 6 \operatorname{sen} x + x^2$ en el punto $x = 0$.

1519. $y = 24e^x - 24x - 12x^2 - 4x^3 - x^4 - 20$ en el punto $x = 0$.

1520. $f(x) = x^{10} - 3x^6 + x^2 + 2$. Hallar los tres primeros términos del desarrollo por la fórmula de Taylor para $x_0 = 1$. Calcular aproximadamente $f(1{,}03)$.

1521. $f(x) = x^8 - 2x^7 + 5x^6 - x + 3$. Hallar los tres primeros términos del desarrollo por la fórmula de Taylor para $x_0 = 2$. Calcular aproximadamente $f(2{,}02)$ y $f(1{,}97)$.

1522. $f(x) = x^{80} - x^{40} + x^{20}$. Hallar los tres primeros términos del desarrollo de $f(x)$ en potencias de $x - 1$ y calcular aproximadamente $f(1{,}005)$.

1523. $f(x) = x^5 - 5x^3 + x$. Hallar los tres primeros términos del desarrollo en potencias de $x - 2$. Calcular aproximadamente $f(2{,}1)$. Calcular $f(2{,}1)$ exactamente y hallar los errores absoluto y relativo.

1524. Comprobar que calculando los valores de la función e^x para $0 < x \leqslant 1/2$ con arreglo a la fórmula aproximada

$$e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$$

se comete un error menor que 0,01. Valiéndose de ello, hallar $\sqrt{e}$ con tres cifras exactas.

1525. Valiéndose de la fórmula aproximada $e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2}$ hallar $\frac{1}{\sqrt[4]{e}}$ y calcular el error.

1526. Comprobar que para los ángulos menores que 28° el error que resultaría de haber tomado la expresión $x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$ en vez de sen x, sería menor que 0,000001. Valiéndose de ello, calcular sen 20° con seis cifras exactas.

1527. Hallar el cos 10° con exactitud hasta 0,001. Mostrar que es suficiente tomar la correspondiente fórmula de Taylor de segundo orden para alcanzar la exactitud indicada.

1528. Aplicando la fórmula aproximada

$$\ln(1+x) \approx x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2} - \frac{x^4}{4}$$

hallar el ln 1,5 y calcular el error.

§ 6. Curvatura

En los ejercicios 1529—1536 hallar la curvatura de las líneas que se indican.

1529. De la hipérbola $xy = 4$ en el punto (2, 2).

1530. De la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ en los vértices.

1531. $y = x^4 - 4x^3 - 18x^2$ en el origen de coordenadas.

1532. $y^2 = 8x$ en el punto (9/8, 3).

1533. $y = \ln x$ en el punto (1, 0).

1534. $y = \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$ en el origen de coordenadas.

1535. $y = \operatorname{sen} x$ en los puntos correspondientes a los extremos de la función.

1536. Del folio de Descartes $x^3 + y^3 = 3\,axy$ en el punto $\left(\frac{3}{2}a, \frac{3}{2}a\right)$.

En los ejercicios 1537—1542 hallar la curvatura de las líneas que se indican en un punto cualquiera (x, y).

1537. $y = x^3$. 1538. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. 1539. $y = \ln \sec x$.

1540. $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$. 1541. $\frac{x^m}{a^m} + \frac{y^m}{b^m} = 1$. 1542. $y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$.

En los ejercicios 1543—1549 hallar la curvatura de las líneas que se indican.

1543. $x = 3t^2$, $y = 3t - t^3$ para $t = 1$.

1544. $x = a \cos^3 t$, $y = a \operatorname{sen}^3 t$ para $t = t_1$.

1545. $x = a(\cos t + t \operatorname{sen} t)$, $y = a(\operatorname{sen} t - t \cos t)$ para $t = \frac{\pi}{2}$.

1546. $x = 2a\cos t - a\cos 2t$, $y = 2a\,\mathrm{sen}\,t - a\,\mathrm{sen}\,2t$ en un punto cualquiera.

1547. $\rho = a^{\varphi}$ en el punto $\rho = 1$, $\varphi = 0$.

1548. $\rho = a\varphi$ en un punto cualquiera.

1549. $\rho = a\varphi^k$ en un punto cualquiera.

1550. Hallar el radio de curvatura de la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ en el punto en que el segmento de la tangente entre los ejes de coordenadas se divide en dos partes iguales por el punto de contacto.

1551. Mostrar que el radio de curvatura de la parábola es igual al segmento doble de la normal comprendido entre los puntos de intersección de la normal con la parábola y su directriz.

1552. Mostrar que el radio de curvatura de la cicloide en cualquier punto suyo es dos veces mayor que la longitud de la normal en el mismo punto.

1553. Mostrar que el radio de curvatura de la lemniscata $\rho^2 = a^2\cos 2\varphi$ es inversamente proporcional al radio polar correspondiente.

1554. Hallar la circunferencia de curvatura de la parábola $y = x^2$ en el punto $(1, 1)$.

1555. Hallar la circunferencia de curvatura de la hipérbola $xy = 1$ en el punto $(1, 1)$.

1556. Hallar la circunferencia de curvatura de la línea $y = e^x$ en el punto $(0, 1)$.

1557. Hallar la circunferencia de curvatura de la línea $y = \mathrm{tg}\,x$ en el punto $(\pi/4, 1)$.

1558. Hallar la circunferencia de curvatura de la cisoide $(x^2 + y^2)\,x - 2ay^2 = 0$ en el punto (a, a).

En los ejercicios 1559—1562 hallar los vértices (es decir, los puntos en los cuales la curvatura toma su valor extremo) de las líneas que se indican.

1559. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$. **1560.** $y = \ln x$.

1561. $y = e^x$.

1562. $x = a\,(3\cos t + \cos 3t)$, $y = a\,(3\,\mathrm{sen}\,t + \mathrm{sen}\,3t)$.

1563. Hallar el mayor valor del radio de curvatura de la línea $\rho = a\,\mathrm{sen}^3\frac{\varphi}{3}$.

1564. Mostrar que la curvatura en un punto P de la línea $y = f(x)$ es igual a $|\,y''\cos^3\alpha\,|$, donde α es el ángulo formado por la tangente a la línea en el punto P con el eje positivo de las abscisas.

1565. Mostrar que la curvatura de una línea en un punto cualquiera puede ser expresada por la relación $k = \left|\frac{d\,\mathrm{sen}\,\alpha}{dx}\right|$ donde α tiene el mismo significado que en el ejercicio anterior.

1566. La función $f(x)$ está definida del modo siguiente: $f(x) = x^3$ en el intervalo $-\infty < x \leqslant 1$, $f(x) = ax^2 + bx + c$ en el intervalo $1 < x < \infty$. ¿Cuáles deben ser los valores de a, b, c para que la línea $y = f(x)$ tenga una curvatura continua por todas partes?

1567. Son dados el arco AM de la circunferencia de radio igual a 5 cuyo centro es el punto $(0, 5)$, y el segmento BC de la recta que une los puntos $B(1, 3)$ y $C(11, 66)$ (véase la fig. 35). Es necesario unir el punto M con el punto B por un arco parabólico de modo que la línea $AMBC$ tenga la curvatura continua por todas partes. Hallar la ecuación de la parábola buscada (tomar la parábola de quinto orden).

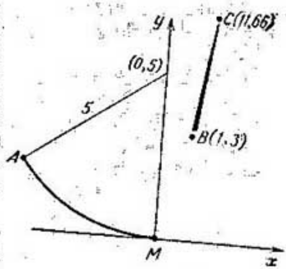

Fig. 35

En los ejercicios 1568—1574 hallar las coordenadas del centro de la curvatura y la ecuación de la evoluta para las líneas que se indican.

1568. Parábola de n-ésimo orden $y = x^n$.

1569. Hipérbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. **1570.** Astroide $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$.

1571. Parábola semicúbica $y^3 = ax^2$.

1572. Parábola $x = 3t$, $y = t^2 - 6$.

1573. Cisoide $y^2 = \frac{x^3}{2a - x}$.

1574. Línea $\begin{cases} x = a(1 + \cos^2 t)\operatorname{sen} t, \\ y = a \operatorname{sen}^2 t \cos t. \end{cases}$

1575. Mostrar que la evoluta de la tractriz

$$x = -a\left(\ln \operatorname{tg}\frac{t}{2} + \cos t\right), \quad y = a \operatorname{sen} t$$

es una catenaria.

1576. Mostrar que la evoluta de la espiral logarítmica $\rho = a^{\varphi}$ es exactamente la misma espiral, pero desplazada un poco con cierto ángulo. ¿Sería posible elegir un valor de modo que la evoluta coincida con la espiral?

1577. Mostrar que cualquier envolvente de una circunferencia puede ser engendrada desplazando una de ellas con un ángulo correspondiente.

1578. Mostrar que la distancia entre un punto de la cicloide y el centro de la curvatura del punto correspondiente de la evoluta es igual al diámetro doble del círculo generador.

1579. La parábola semicúbica $py^2 = \frac{4}{27}(x - 2p)^3$ sirve de evoluta de la parábola $y^2 = 4px$. Hallar la longitud del arco de la parábola semicúbica desde el «pico» hasta el punto (x, y).

1580. Hallar la longitud de la misma evoluta de la elipse cuyos semiejes son iguales a a y b.

1581. Mostrar que la astroide $x = a\cos^3 t$, $y = a \operatorname{sen}^3 t$ tiene por evoluta una astroide de dimensiones lineales dobles y girada 45°. Valiéndose de ello calcular la longitud del arco de la astroide citada.

1582*. Mostrar que la evoluta de la cardioide $x = 2a\cos t - a\cos 2t$, $y = 2a \operatorname{sen} t - a \operatorname{sen} 2t$ es también una cardioide semejante a la dada. Valiéndose de ello hallar la longitud del arco de toda la cardioide.

1583*. Demostrar el siguiente teorema: si la curvatura del arco de cierta línea sólo crece, o bien solamente decrece, las circunferencias de la curvatura correspondientes a distintos puntos de dicho arco no se cortan y se hallan situadas una dentro de la otra.

§ 7. Problemas de cálculo

1584. Hallar el mínimo de la función $y = x^4 + x^2 + x + 1$ con exactitud hasta 0,001.

1585. Hallar el máximo de la función $y = x + \ln x - x^3$ con exactitud hasta 0,001.

1586. Hallar los valores máximo y mínimo de la función $y = x^3 + 3\cos x$ en el intervalo $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ con exactitud hasta 0,01.

1587. Hallar los valores máximo y mínimo de la función $y = x - e^{x^2}$ en el intervalo (0,2; 0,5) con exactitud hasta 0,001.

1588. Hallar las coordenadas del punto de inflexión de la línea

$$y = \frac{e^x}{10}(x^3 - 6x^2 + 19x - 30)$$

con exactitud hasta 0,01.

1589. Hallar las coordenadas del punto de inflexión de la línea

$$y = 6x^3 \ln x + 2x^3 - 9x^2$$

con exactitud hasta 0,01.

1590. Hallar la curvatura de la línea $y = \frac{1}{x^2}$ en el punto de su intersección con la recta $y = x - 1$, con exactitud hasta 0,01.

1591. En la línea $y = \ln x$ hallar, con exactitud hasta 0,001, las coordenadas del punto en que el radio de curvatura de la línea dada es tres veces mayor que la abscisa de este punto.

Capítulo V

Integral definida

§ 1. Integral definida y sus propiedades más elementales

1592. Expresar por medio de una integral el área de la figura limitada por las siguientes líneas:

1) los ejes de coordenadas, la recta $x = 3$ y la parábola $y = x^2 + 1$;

2) el eje de abscisas, las rectas $x = a$, $x = b$ y la línea $y = e^x + 2$ $(b > a)$;

3) el eje de abscisas y el arco de la sinusoide $y = \operatorname{sen} x$ correspondiente al primer semiperíodo;

4) las parábolas $y = x^2$ e $y = 8 - x^2$;

5) las parábolas $y = x^2$ e $y = \sqrt{x}$;

6) las líneas $y = \ln x$ e $y = \ln^2 x$.

1593. La figura está limitada por el eje de abscisas y las rectas $y = 2x$, $x = 4$, $x = 6$. Hallar las áreas de las figuras de n «escalones» entrantes y salientes, dividiendo el intervalo $[4, 6]$ en partes iguales. Mostrar que si n crece infinitamente, las dos expresiones obtenidas tienden a un mismo límite S, área de la figura. Hallar los errores absoluto y relativo al sustituir el área de la figura dada por las de las figuras de n «escalones» entrantes y salientes.

1594. Un trapecio mixtilíneo de base $[2, 3]$ está limitado por la parábola $y = x^2$. Hallar los errores absoluto y relativo al sustituir el área dada por la de la figura entrante de 10 «escalones».

1595. Calcular el área de la figura limitada por la parábola $y = x^2/2$, las rectas $x = 3$, $x = 6$ y el eje de abscisas.

1596. Calcular el área del segmento de la parábola $y = x^2$ cortado por la recta $y = 2x + 3$.

1597. Calcular el área del segmento parabólico de base $a = 10$ cm y la altura $h = 6$ cm. (La base es una cuerda perpendicular al eje de la parábola, véase la fig. 36.)

1598. Calcular el área de la figura limitada por la parábola $y = x^2 - 4x + 5$, el eje de abscisas y las rectas $x = 3$, $x = 5$.

1599. Calcular el área de la figura limitada por los arcos de las parábolas $y = \frac{1}{4}x^2$ e $y = 3 - \frac{x^2}{2}$.

1600. Calcular el área de la figura limitada por las parábolas $y = x^2 - 6x + 10$ e $y = 6x - x^2$.

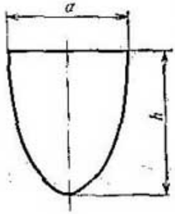

Fig. 36

1601. Calcular el área comprendida entre la parábola $y = x^2 - 2x + 2$, la tangente a ésta en el punto (3, 5), el eje de ordenadas y el de abscisas.

1602. Un punto material efectúa el movimiento a una velocidad $v = 2t + 4$ cm/s. Hallar la distancia recorrida por el punto en los primeros 10 s.

1603. En la caída libre la velocidad v es igual a gt. Hallar la distancia recorrida en los primeros 5 s de caída.

1604. La velocidad del movimiento, que es proporcional al cuadrado del tiempo, era igual a 1 cm/s al finalizar el cuarto segundo. ¿Cuál es la distancia recorrida en los primeros 10 s?

1605. Se sabe que la fuerza que ejerce la reacción a la extensión del muelle, es proporcional al alargamiento del mismo (ley de Hooke). Al extender un muelle, lo hicieron 4 cm más largo, efectuando con ello un trabajo igual a 100 julios. ¿Qué trabajo se produciría al hacer el muelle 10 cm más largo?

1606. Para que un muelle se haga 2 cm más largo, es necesario efectuar un trabajo igual a 20 julios. ¿Cuánto más largo se hará el muelle si se aplica un trabajo igual a 80 julios?

1607. La velocidad v de la desintegración radiactiva es una función dada del tiempo: $v = v(t)$. Expresar la cantidad m de la sustancia radiactiva desintegrada en el espacio de tiempo desde el momento T_0 hasta el momento T_1: a) aproximadamente, mediante una suma, b) exactamente, mediante una integral.

1608. La velocidad a que se calienta el cuerpo es una función dada del tiempo $\psi(t)$. ¿Cuántos grados aumenta la temperatura θ del cuerpo en el espacio del tiempo comprendido entre el momento T_0 y el momento T_1? Expresar el resultado: a) aproximadamente, mediante una suma, b) exactamente, mediante una integral.

1609. La corriente alterna I es una función dada del tiempo $I = I(t)$. Expresar (aproximadamente, mediante una suma, y exactamente, mediante una integral) la cantidad Q de electricidad que pasa a través de la sección transversal del conductor en el tiempo T desde que comienza el experimento.

1610. La tensión E de la corriente alterna es una función dada del tiempo $E = \varphi(t)$. La corriente I es también una función dada del tiempo $I = \psi(t)$. Expresar el trabajo A de la corriente en el espacio de tiempo comprendido entre el momento T_0 y el momento T_1: a) aproximadamente, mediante una suma, b) exactamente, mediante una integral.

1611. Un circuito eléctrico es alimentado por una batería de acumuladores. Por espacio de 10 min la tensión en los bornes decrece uniformemente desde $E_0 = 60$ V hasta $E = 40$ V. La resistencia del circuito $R = 20$ ohm. Hallar la cantidad de electricidad que pasa por el circuito en 10 min.

1612. La tensión de un circuito eléctrico decrece uniformemente, disminuyendo $a = 1{,}5$ V por un minuto. La tensión inicial del circuito $E_0 = 120$ V, la resistencia del mismo $R = 60$ ohm. Hallar el trabajo del circuito efectuado en 5 min. Se prescinde de la inductancia y de la capacidad.

1613. En un circuito se introduce uniformemente la tensión. Al comenzar el experimento la tensión era igual a cero. Al cabo de un minuto la tensión alcanza 120 V. La resistencia del circuito es igual a 100 ohm. Se prescinde de la inductancia y de la capacidad. Hallar el trabajo del circuito durante 1 min.

1614. La pared rectangular de un acuario lleno de agua tiene base a y altura b. Expresar la fuerza P de la presión del agua contra la pared: a) aproximadamente, mediante una suma, b) exactamente, mediante una integral.

1615. a) Calcular la fuerza P con la que el agua, que llena el acuario, hace presión sobre una de sus paredes. Esta tiene forma rectangular, longitud $a = 60$ cm, y altura, $b = 25$ cm. b) Dividir la pared del acuario con una recta horizontal de modo que las fuerzas de presión sobre las dos partes de la pared sean iguales.

Cálculo de integrales mediante la suma

1616. Calcular la integral $\int\limits_0^1 e^x\,dx$ sumando directamente y pasando después al límite. (Conviene dividir el intervalo de integración en n partes iguales.)

1617. Sumando directamente y pasando luego al límite, calcular la integral $\int\limits_a^b x^k\,dx$, donde k es un número entero positivo (dividir el intervalo de integración en partes tales que las abscisas de los puntos de división formen una progresión geométrica).

1618. Valiéndose de la fórmula obtenida en el ejercicio anterior, calcular las integrales:

1) $\int\limits_0^{10} x\,dx$; 2) $\int\limits_{a-2}^{a+2} x\,dx$; 3) $\int\limits_{\frac{a}{2}}^{a} x^2\,dx$; 4) $\int\limits_a^{2a} \frac{b^2x^2}{a^2}\,dx$;

5) $\int\limits_0^a (3x^2-x+1)\,dx$; 6) $\int\limits_0^m \frac{x^2+m^2}{m^2}\,dx$; 7) $\int\limits_1^{2,5} (2x+1)^2\,dx$;

8) $\int\limits_a^b (x-a)(x-b)\,dx$; 9) $\int\limits_{-a}^{0} \frac{(a+x)^2}{a}\,dx$; 10) $\int\limits_0^1 \left(\frac{ax-b}{a-b}\right)^2 dx$;

11) $\int\limits_0^2 x^3\,dx$; 12) $\int\limits_1^3 \frac{x^4}{3}\,dx$; 13) $\int\limits_0^1 \left(\frac{x^5}{7}-\frac{x^6}{6}\right) dx$.

1619.* Hallar $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1^k+2^k+\ldots+n^k}{n^{k+1}}$ para $k>0$. Calcular aproximadamente $1^5+2^5+\ldots+100^5$.

1620. Calcular la integral $\int\limits_1^2 \frac{dx}{x}$, sumando directamente y pasando luego al límite. (Dividir el intervalo de integración de modo que las abscisas de los puntos de división una progresión geométrica.)

1621. Formar la suma integral para la integral $\int\limits_1^2 \frac{dx}{x}$ dividiendo el intervalo de integración en n partes iguales. Efectuando la comparación con los resultados del ejercicio anterior, calcular

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}\right).$$

1622*. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{an}\right)$ (a es un número entero). Calcular aproximadamente $\left(\frac{1}{100}+\frac{1}{101}+\frac{1}{102}+\ldots+\frac{1}{300}\right)$.

1623*. Calcular las integrales, sumando directamente y pasando luego al límite:

1) $\int\limits_0^a xe^x\,dx$; 2) $\int\limits_1^a \ln x\,dx$; 3) $\int\limits_a^b \frac{\ln x}{x}\,dx$.

[En el 1) dividir el intervalo de integración en partes iguales, en los 2) y 3) proceder igual que en el ejercicio 1620.]

§ 2. Propiedades fundamentales de la integral definida

Interpretación geométrica de la integral definida

1624. Expresar mediante una integral el área de la figura limitada por el arco de la sinusoide correspondiente al intervalo $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$ y por el eje de abscisas.

1625. Calcular el área de la figura limitada por la parábola cúbica $y = x^3$ y la recta $y = x$.

1626. Calcular el área de la figura limitada por las parábolas $y = x^2 - 2x - 3$ e $y = -x^2 + 6x - 3$.

1627. Calcular el área de la figura limitada por las líneas $y = x^3 - x$ e $y = x^4 - 1$.

Evaluación de la integral

1628. Demostrar que la integral $\int\limits_0^{10} \frac{x\,dx}{x^3+16}$ es menor que $\frac{5}{6}$.

1629. Demostrar que la integral $\int\limits_0^2 e^{x^2-x}\,dx$ está comprendida entre $\frac{2}{\sqrt[4]{e}}$ y $2e^2$.

En los ejercicios 1630—1635 evaluar las integrales.

1630. $\int\limits_{1,5}^{3,5} \frac{x^2\,dx}{x-1}$.

1631. $\int\limits_0^2 \frac{x^2+5}{x^2+2}\,dx$.

1632. $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} (1+\operatorname{sen}^2 x)\,dx$

1633. $\int\limits_{\frac{1}{2}}^{\frac{5}{2}} \frac{x}{1+x^2}\,dx$.

1634. $\int\limits_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\sqrt{3}} x \operatorname{arctg} x\,dx$.

1635. $\int\limits_{\frac{1}{e}}^{e} x^2 e^{-x^2}\,dx$.

1636. Sin hacer ningún cálculo, averiguar cuál de las integrales es mayor:

1) $\int\limits_0^1 x^2\,dx$ ó $\int\limits_0^1 x^3\,dx$, 2) $\int\limits_1^2 x^2\,dx$ ó $\int\limits_1^2 x^3\,dx$.

1637. Esclarecer cuál de las integrales es mayor:

1) $\int\limits_0^1 2^{x^2}\,dx$ ó $\int\limits_0^1 2^{x^3}\,dx$, 2) $\int\limits_1^2 2^{x^2}\,dx$ ó $\int\limits_1^2 2^{x^3}\,dx$,

3) $\int\limits_1^2 \ln x\,dx$ ó $\int\limits_1^2 (\ln x)^2\,dx$, 4) $\int\limits_3^4 \ln x\,dx$ ó $\int\limits_3^4 (\ln x)^2\,dx$.

1638. Aplicando la desigualdad de Cauchy — Buniakovsky

$$\left|\int\limits_a^b f_1(x)\,f_2(x)\,dx\right| \leqslant \sqrt{\int\limits_a^b [f_1(x)]^2\,dx}\,\sqrt{\int\limits_a^b [f_2(x)]^2\,dx}$$

demostrar que $\int\limits_0^1 \sqrt{1+x^3}\,dx < \frac{\sqrt{5}}{2}$.

Mostrar que la aplicación de la regla general produce la evaluación menos exacta.

1639. Partiendo de consideraciones geométricas demostrar las siguientes proposiciones:

a) si en el intervalo $[a, b]$ la función $f(x)$ crece y tiene su gráfica cóncava, se tiene

$$(b-a)\,f(a) < \int\limits_a^b f(x)\,dx < (b-a)\,\frac{f(a)+f(b)}{2};$$

b) si en el intervalo $[a, b]$ la función $f(x)$ crece y tiene su gráfica convexa, se tiene

$$(b-a)\,\frac{f(a)+f(b)}{2} < \int\limits_a^b f(x)\,dx < (b-a)\,f(b).$$

1640. Evaluar la integral $\int\limits_2^3 \frac{x^2\,dx}{1+x^2}$ aplicando el resultado obtenido en el ejercicio 1639.

1641. Evaluar la integral $\int\limits_0^1 \sqrt{1+x^4}\,dx$ aplicando:

1) el teorema fundamental sobre la evaluación de la integral,
2) el resultado obtenido en el ejercicio 1639,
3) la desigualdad de Cauchy — Buniakovsky (véase el ejercicio 1638).

Valor medio de la función

1642. Calcular el valor medio de la función lineal $y = kx + b$ en el intervalo $[x_1, x_2]$. Hallar el punto en que la función toma este valor.

1643. Calcular el valor medio de la función cuadrática $y = ax^2$ en el intervalo $[x_1, x_2]$. ¿En cuántos puntos del intervalo la función toma este valor?

1644. Calcular el valor medio de la función $y = 2x^2 + 3x + 3$ en el intervalo $[1, 4]$.

1645. Partiendo de consideraciones geométricas, calcular el valor medio de la función $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ en el intervalo $[-a, a]$.

1646. Partiendo de consideraciones geométricas, indicar el valor medio de la función continua impar en el intervalo simétrico respecto al origen de coordenadas.

1647. La sección de un canalón tiene la forma del segmento parabólico. Su base es igual a $a = 1$ m, la profundidad $h = 1{,}5$ m (véase la fig. 36 en la pág. 120). Hallar la profundidad media del canalón.

1648. La tensión del circuito eléctrico crece uniformemente por espacio de un minuto, desde $E_0 = 100$ V hasta $E_1 = 120$ V. Hallar la intensidad media de la corriente correspondiente a este mismo espacio de tiempo. La resistencia del circuito es igual a 10 ohm.

1649. La tensión del circuito eléctrico va decreciendo uniformemente, disminuyendo 0,4 V por minuto. La tensión inicial en el circuito es igual a 100 V. La resistencia es igual a 5 ohm. Hallar la potencia media de la corriente durante la primera hora del funcionamiento.

Integral de límite variable

1650. Calcular las integrales de límites superiores variables:

$$1)\ \int_0^x x^2\,dx;\quad 2)\ \int_a^x x^5\,dx;\quad 3)\ \int_1^x \left(\frac{x^3}{5} - \frac{x^4}{4}\right)dx.$$

1651. La velocidad del movimiento de un cuerpo es proporcional al cuadrado del tiempo. Hallar la dependencia entre la distancia recorrida s y el tiempo t, si es sabido que en los primeros 3 s el cuerpo recorrió 18 cm y que el movimiento comenzó en el momento $t = 0$.

1652. La fuerza que obra sobre un punto material cambia uniformemente respecto a la distancia recorrida. Al principio del trayecto era igual a 10 N y al desplazarse el punto 10 metros, la fuerza aumentó hasta 600 N. Hallar la función que expresa la relación entre el trabajo y la distancia recorrida.

1653. La tensión de un circuito eléctrico varía uniformemente, siendo igual a E_1 para $t = t_1$, y E_2 para $t = t_2$. La resistencia R es constante, se prescinde de la capacidad y de la autoinducción. Expresar el funcionamiento de la corriente como función del tiempo t transcurrido desde que comenzó el experimento.

1654. La capacidad calorífica de un cuerpo depende de la temperatura del modo siguiente: $c = c_0 + \alpha t + \beta t^2$. Hallar la función que determine la dependencia existente entre la cantidad de calor recibida por el cuerpo al ser calentado desde cero hasta t, y la temperatura t.

1655. Un trapecio mixtilíneo está limitado por la parábola $y = x^2$, el eje de abscisas y una ordenada móvil. Hallar el valor del incremento ΔS y de la diferencial dS del área del trapecio cuando $x = 10$, y $\Delta x = 0{,}1$.

1656. Un trapecio mixtilíneo está limitado por la línea $y = \sqrt{x^2 + 16}$, los ejes de coordenadas y una ordenada móvil. Hallar el valor de la diferencial dS del área del trapecio cuando $x = 3$ y $\Delta x = 0{,}2$.

1657. Un trapecio mixtilíneo está limitado por la línea $y = x^3$, el eje de abscisas y una ordenada móvil. Hallar los valores del incremento ΔS del área, de su diferencial dS, los errores absoluto (α) y relativo $\left(\delta = \frac{\alpha}{\Delta S}\right)$ que se cometen al sustituir el incremento por la diferencial, si $x = 4$ y Δx toma los valores 1; 0,1 y 0,01.

1658. Hallar la derivada de la función

$$y = \int_0^x \frac{1 - t + t^2}{1 + t + t^2}\, dt \text{ para } x = 1.$$

1659. Hallar la derivada de la función

$$y = \int_0^x \operatorname{sen} x\, dx \text{ para } x = 0, \quad x = \frac{\pi}{4}, \quad x = \frac{\pi}{2}.$$

1660. ¿A qué es igual la derivada de la integral cuyo límite inferior es móvil y el superior es constante, respecto al límite inferior?

1661. Hallar la derivada de la función $y = \int_x^5 \sqrt{1 + x^2}\, dx$ para $x = 0$ y $x = 3/4$.

1662. Hallar la derivada respecto a x de la función $y = \int_0^{2x} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx$.

1663. Hallar la derivada respecto a x de la función

1) $\int\limits_{2}^{e^x} \frac{\ln z}{z}\,dz$; 2) $\int\limits_{x^2}^{1} \ln x\,dx$.

1664*. Hallar la derivada respecto a x de la función $\int\limits_{x}^{2x} \ln^2 x\,dx$.

1665. Hallar la derivada respecto a x de la función y dada en forma implícita:

$$\int\limits_{0}^{y} e^t\,dt + \int\limits_{0}^{x} \cos t\,dt = 0.$$

1666. Hallar la derivada respecto a x de la función y dada en forma paramétrica:

1) $x = \int\limits_{0}^{t} \operatorname{sen} t\,dt$, $y = \int\limits_{0}^{t} \cos t\,dt$; 2) $x = \int\limits_{1}^{t^2} t \ln t\,dt$, $y = \int\limits_{t^2}^{1} t^2 \ln dt$.

1667. Hallar el valor de la segunda derivada respecto a z de la función

$$y = \int\limits_{0}^{z^2} \frac{dx}{1+x^3} \quad \text{para } z = 1.$$

1668. ¿Para qué valor de x la función

$$I(x) = \int\limits_{0}^{x} xe^{-x^2}\,dx \text{ tiene extremo? ¿A qué es igual?}$$

1669. Hallar la curvatura en el punto (0, 0) de la línea dada por la ecuación

$$y = \int\limits_{0}^{x} (1+t)\ln(1+t)\,dt.$$

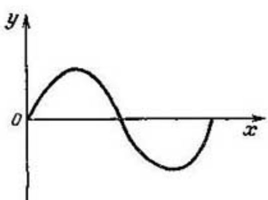

Fig. 37

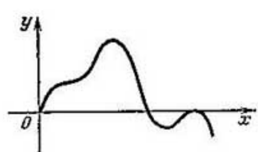

Fig. 38

1670. Hallar los puntos del extremo y los de inflexión de la gráfica de la función

$y=\int\limits_0^x (x^2-3x+2)\,dx$. Construir la gráfica de esta función.

1671. Siguiendo las gráficas de las funciones presentadas en las fig. 37 y 38, averiguar la forma de las gráficas de sus funciones primitivas.

Fórmula de Newton — Leibniz

1672. Calcular las integrales:

$$1)\ \int\limits_1^4 \frac{dx}{x^2};\quad 2)\ \int\limits_4^1 \frac{dx}{x^3};\quad 3)\ \int\limits_1^9 3\sqrt{x}\,dx;\quad 4)\ \int\limits_1^2 \left(x+\frac{1}{x}\right)^2 dx;$$

$$5)\ \int\limits_4^9 \sqrt{x}\,(1+\sqrt{x})\,dx;\quad 6)\ \int\limits_1^2 (\sqrt{x}-\sqrt[3]{x})\,dx;\quad 7)\ \int\limits_a^{2a} \frac{dx}{\sqrt{2ax}};$$

$$8)\ \int\limits_1^4 \frac{1+t}{\sqrt{t}}\,dt;\quad 9)\ \int\limits_a^b \frac{dx}{\sqrt[3]{x^4}}\,(a>0,\ b>0);\quad 10)\ \int\limits_{z_0}^{z_1} (\sqrt{z}-1)^2\,dz.$$

1673. Calcular las integrales:

$$1)\ \int\limits_0^\pi \operatorname{sen} x\,dx;\quad 2)\ \int\limits_0^\pi \cos x\,dx$$

(interpretar geométricamente el resultado obtenido),

$$3)\ \int\limits_0^3 e^x\,dx;\quad 4)\ \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^2 x\,dx;\quad 5)\ \int\limits_0^1 \frac{dx}{1+x^2};\quad 6)\ \int\limits_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

1674. La función $f(x)$ tiene valores iguales en los puntos $x=a$ y $x=b$, y una derivada continua. ¿A qué es igual la integral $\int\limits_a^b f'(x)\,dx$?

1675. La tangente a la gráfica de la función $y=f(x)$ en el punto cuya abscisa es $x=a$, forma un ángulo de $\frac{\pi}{3}$ con el eje de abscisas, mientras que en el punto cuya abscisa es $x=b$ forma un ángulo de $\frac{\pi}{4}$. Calcular $\int\limits_a^b f''(x)\,dx$ y $\int\limits_a^b f'(x)\,f''(x)\,dx$; $f''(x)$ se supone continua.

Capítulo VI

Integral indefinida. Cálculo integral

§ 1. Métodos más simples de integración

En los ejercicios 1676—1702 hallar las integrales, usando la tabla de integrales y aplicando las reglas elementales para la integración.

1676. $\int \sqrt{x}\, dx$. 1677. $\int \sqrt[m]{x^n}\, dx$. 1678. $\int \frac{dx}{x^2}$.

1679. $\int 10^x\, dx$. 1680. $\int a^x e^x\, dx$. 1681. $\int \frac{dx}{2\sqrt{x}}$.

1682. $\int \frac{dh}{\sqrt{2gh}}$. 1683. $\int 3{,}4x^{-0{,}17}\, dx$. 1684. $\int (1-2u)\, du$.

1685. $\int (\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1)\, dx$. 1686. $\int \frac{\sqrt{x}-x^3e^x+x^2}{x^3}\, dx$.

1687. $\int (2x^{-1{,}2}+3x^{-0{,}8}-5^{0{,}38})\, dx$.

1688. $\int \left(\frac{1-z}{z}\right)^2 dz$. 1689. $\int \frac{(1-x)^2}{x\sqrt{x}}\, dx$.

1690. $\int \frac{(1+\sqrt{x})^3}{\sqrt[3]{x}}\, dx$. 1691. $\int \frac{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[4]{x}}{\sqrt{x}}\, dx$.

1692. $\int \frac{dx}{\sqrt{3-3x^2}}$. 1693. $\int \frac{3\cdot 2^x-2\cdot 3^x}{2^x}\, dx$.

1694. $\int \frac{1+\cos^2 x}{1+\cos 2x}\, dx$. 1695. $\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x\cdot \operatorname{sen}^2 x}\, dx$.

1696. $\int \operatorname{tg}^2 x\, dx$. 1697. $\int \operatorname{ctg}^2 x\, dx$.

1698. $\int 2\operatorname{sen}^2 \frac{x}{2}\, dx$. 1699. $\int \frac{(1+2x^2)\, dx}{x^2(1+x^2)}$.

1700. $\int \frac{(1+x)^2\,dx}{x(1+x^2)}$. **1701.** $\int \frac{dx}{\cos 2x+\operatorname{sen}^2 x}$.

1702. $\int (\arcsin x+\arccos x)\,dx$.

En los ejercicios 1703—1780 hallar las integrales, aplicando el teorema sobre la invariancia de las fórmulas de integración.

1703. $\int \operatorname{sen} x\,d(\operatorname{sen} x)$. **1704.** $\int \operatorname{tg}^3 x\,d(\operatorname{tg} x)$.

1705. $\int \frac{d(1+x^2)}{\sqrt{1+x^2}}$. **1706.** $\int (x+1)^{15}\,dx$.

1707. $\int \frac{dx}{(2x-3)^5}$. **1708.** $\int \frac{dx}{(a+bx)^c}$ $(c\neq 1)$.

1709. $\int \sqrt[5]{(8-3x)^6}\,dx$. **1710.** $\int \sqrt{8-2x}\,dx$.

1711. $\int \frac{m}{\sqrt[3]{(a+bx)^2}}\,dx$. **1712.** $\int 2x\sqrt{x^2+1}\,dx$.

1713. $\int x\sqrt{1-x^2}\,dx$. **1714.** $\int x^2\sqrt[5]{x^3+2}\,dx$.

1715. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+1}}$. **1716.** $\int \frac{x^4\,dx}{\sqrt{4+x^5}}$.

1717. $\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt[3]{x^4+1}}$. **1718.** $\int \frac{(6x-5)\,dx}{2\sqrt{3x^2-5x+6}}$.

1719. $\int \operatorname{sen}^3 x\cos x\,dx$. **1720.** $\int \frac{\operatorname{sen} x\,dx}{\cos^2 x}$.

1721. $\int \frac{\cos x\,dx}{\sqrt[3]{\operatorname{sen}^2 x}}$. **1722.** $\int \cos^3 x\operatorname{sen} 2x\,dx$.

1723. $\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x}\,dx$. **1724.** $\int \frac{(\operatorname{arctg} x)^2\,dx}{1+x^2}$.

1725. $\int \frac{dx}{(\arcsin x)^3\sqrt{1-x^2}}$. **1726.** $\int \frac{dx}{\cos^2 x\sqrt{1+\operatorname{tg} x}}$.

1727. $\int \cos 3x\,d(3x)$. **1728.** $\int \frac{d(1+\ln x)}{\cos^2(1+\ln x)}$.

1729. $\int \cos 3x\,dx$. **1730.** $\int (\cos\alpha-\cos 2x)\,dx$.

1731. $\int \operatorname{sen}(2x-3)\,dx$. **1732.** $\int \cos(1-2x)\,dx$.

1733. $\int \left[\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)\right]^{-2}dx$. **1734.** $\int e^x(\operatorname{sen} e^x)\,dx$.

1735. $\int \frac{d(1+x^2)}{1+x^2}$. **1736.** $\int \frac{d(\arcsin x)}{\arcsin x}$. **1737.** $\int \frac{(2x-3)\,dx}{x^2-3x+8}$.

1738. $\int \frac{dx}{2x-1}$. 1739. $\int \frac{dx}{cx+m}$. 1740. $\int \frac{x\,dx}{x^2+1}$

1741. $\int \frac{x^2\,dx}{x^3+1}$. 1742. $\int \frac{e^x\,dx}{e^x+1}$. 1743. $\int \frac{e^{2x}\,dx}{e^{2x}+a^2}$.

1744. $\int \operatorname{tg} x\,dx$. 1745. $\int \operatorname{ctg} x\,dx$. 1746. $\int \operatorname{tg} 3x\,dx$.

1747. $\int \operatorname{ctg}(2x+1)dx$. 1748. $\int \frac{\operatorname{sen} 2x}{1+\cos^2 x}\,dx$. 1749. $\int \frac{dx}{x\ln x}$.

1750. $\int \frac{(\ln x)^m}{x}\,dx$. 1751. $\int e^{\operatorname{sen} x}\,d(\operatorname{sen} x)$.

1752. $\int e^{\operatorname{sen} x}\cos x\,dx$. 1753. $\int a^{3x}\,dx$. 1754. $\int a^{-x}\,dx$.

1755. $\int e^{-3x+1}\,dx$. 1756. $\int e^{x^2}x\,dx$. 1757. $\int e^{-x^3}x^2\,dx$.

1758. $\int \frac{d\left(\frac{x}{3}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{3}\right)^2}}$. 1759. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-25x^2}}$.

1760. $\int \frac{dx}{1+9x^2}$. 1761. $\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$. 1762. $\int \frac{dx}{2x^2+9}$.

1763. $\int \frac{dx}{\sqrt{4-9x^2}}$. 1764. $\int \frac{x\,dx}{x^4+1}$. 1765. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{a^2-x^4}}$.

1766. $\int \frac{x^2\,dx}{x^6+4}$. 1767. $\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{1-x^8}}$. 1768. $\int \frac{e^x\,dx}{e^{2x}+4}$.

1769. $\int \frac{2^x\,dx}{\sqrt{1-4^x}}$. 1770. $\int \frac{\cos\alpha\,d\alpha}{a^2+\operatorname{sen}^2\alpha}$.

1771. $\int \frac{e^{2x}-1}{e^x}\,dx$. 1772. $\int (e^x+1)^3\,dx$.

1773. $\int \frac{1+x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$. 1774. $\int \frac{3x-1}{x^2+9}\,dx$.

1775. $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,dx$. 1776. $\int \frac{x(1-x^2)}{1+x^4}\,dx$.

1777. $\int \frac{1+x-x^2}{\sqrt{(1-x^2)^3}}\,dx$. 1778. $\int \frac{dx}{(x+\sqrt{x^2-1})^2}$.

1779. $\int \frac{2x-\sqrt{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$. 1780. $\int \frac{x+(\arccos 3x)^2}{\sqrt{1-9x^2}}\,dx$.

En los ejercicios 1781—1790 hallar las integrales, despejando la parte entera de la fracción bajo el signo de integral.

1781. $\int \frac{x}{x+4}\,dx$. 1782. $\int \frac{x}{2x+1}\,dx$. 1783. $\int \frac{Ax}{a+bx}\,dx$.

1784. $\int \frac{3+x}{3-x}\,dx$. 1785. $\int \frac{(2x-1)\,dx}{x-2}$. 1786. $\int \frac{x+2}{2x-1}\,dx$.

1787. $\int \frac{(1+x)^2}{x^2+1}\,dx$. 1788. $\int \frac{x^2-1}{x^2+1}\,dx$. 1789. $\int \frac{x^4}{1-x}\,dx$.

1790. $\int \frac{x^4\,dx}{x^2+1}$.

En los ejercicios 1791—1807 hallar las integrales aplicando el método de descomposición de la expresión integrando y el método para despejar el cuadrado perfecto.

1791. $\int \frac{dx}{x(x-1)}$. 1792. $\int \frac{dx}{x(x+1)}$. 1793. $\int \frac{dx}{(x+1)(2x-3)}$.

1794. $\int \frac{dx}{(a-x)(b-x)}$. 1795. $\int \frac{x^2+1}{x^2-1}\,dx$. 1796. $\int \frac{dx}{x^2-7x+10}$.

1797. $\int \frac{dx}{x^2+3x-10}$. 1798. $\int \frac{dx}{4x^2-9}$. 1799. $\int \frac{dx}{2-3x^2}$.

1800. $\int \frac{dx}{(x-1)^2+4}$. 1801. $\int \frac{dx}{x^2+2x+3}$. 1802. $\int \frac{dx}{x-x^2-2,5}$.

1803. $\int \frac{dx}{4x^2+4x+5}$. 1804. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-(2x+3)^2}}$.

1805. $\int \frac{dx}{\sqrt{4x-3-x^2}}$. 1806. $\int \frac{dx}{\sqrt{8+6x-9x^2}}$.

1807. $\int \frac{dx}{\sqrt{2-6x-9x^2}}$.

En los ejercicios 1808—1831 hallar las integrales aplicando fórmulas trigonométricas para transformar la expresión integrando.

1808. $\int \cos^2 x\,dx$. 1809. $\int \operatorname{sen}^2 x\,dx$. 1810. $\int \frac{dx}{1-\cos x}$.

1811. $\int \frac{dx}{1+\operatorname{sen} x}$. 1812. $\int \frac{1-\cos x}{1+\cos x}\,dx$. 1813. $\int \frac{1+\operatorname{sen} x}{1-\operatorname{sen} x}\,dx$.

1814. $\int (\operatorname{tg}^2 x+\operatorname{tg}^4 x)\,dx$. 1815. $\frac{\cos 2x\,dx}{1+\operatorname{sen} x\cos x}$.

1816. $\int \cos x \operatorname{sen} 3x\,dx$. 1817. $\int \cos 2x\cos 3x\,dx$.

1818. $\int \operatorname{sen} 2x \operatorname{sen} 5x\,dx$. 1819. $\int \cos x\cos 2x\cos 3x\,dx$.

1820. $\int \frac{dx}{\cos x}$. 1821. $\int \frac{1-\operatorname{sen} x}{\cos x}\,dx$. 1822. $\int \frac{\operatorname{sen}^3 x}{\cos x}\,dx$.

1823. $\int \frac{\cos^3 x\,dx}{\operatorname{sen}^4 x}$. **1824.** $\int \frac{\operatorname{sen}^3 \alpha}{\sqrt{\cos \alpha}}\,d\alpha$. **1825.** $\int \frac{dx}{\cos^4 x}$.

1826. $\int \cos^3 x\,dx$. **1827.** $\int \operatorname{tg}^4 x\,dx$. **1828.** $\int \operatorname{sen}^5 x\,dx$.

1829. $\int \operatorname{sen}^4 x\,dx$. **1830.** $\int \operatorname{tg}^3 x\,dx$. **1831.** $\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^6 x}$.

§ 2. Métodos principales de integración

Integración por partes

En los ejercicios 1832—1868 hallar las integrales.

1832. $\int x \operatorname{sen} 2x\,dx$. **1833.** $\int x \cos x\,dx$. **1834.** $\int xe^{-x}\,dx$.

1835. $\int x3^x\,dx$. **1836.** $\int x^n \ln x\,dx$. $(n \neq -1)$.

1837. $\int x \operatorname{arctg} x\,dx$. **1838.** $\int \arccos x\,dx$. **1839.** $\int \operatorname{arctg} \sqrt{x}\,dx$.

1840. $\int \frac{\operatorname{arcsen} x}{\sqrt{x+1}}\,dx$. **1841.** $\int x \operatorname{tg}^2 x\,dx$. **1842.** $\int x \cos^2 x\,dx$.

1843. $\int \frac{\lg x}{x^3}\,dx$. **1844.** $\int \frac{x \operatorname{arctg} x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$. **1845.** $\int \frac{\operatorname{arcsen} \sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}\,dx$.

1846. $\int \ln(x^2+1)\,dx$. **1847.** $\int \frac{x^2\,dx}{(1+x^2)^2}$.

1848. $\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{1+x^2}}$. **1849.** $\int x^2 \ln(1+x)\,dx$.

1850. $\int x^2 e^{-x}\,dx$. **1851.** $\int x^3 e^x\,dx$. **1852.** $\int x^2 a^x\,dx$.

1853. $\int x^3 \operatorname{sen} x\,dx$. **1854.** $\int x^2 \cos^2 x\,dx$. **1855.** $\int \ln^2 x\,dx$.

1856. $\int \frac{\ln^3 x}{x^2}\,dx$. **1857.** $\int \frac{\ln^2 x}{\sqrt{x^5}}\,dx$. **1858.** $\int (\operatorname{arcsen} x)^2\,dx$.

1859. $\int (\operatorname{arctg} x)^2 x\,dx$. **1860.** $\int e^x \operatorname{sen} x\,dx$.

1861. $\int e^{3x} (\operatorname{sen} 2x - \cos 2x)\,dx$. **1862.** $\int e^{ax} \cos nx\,dx$.

1863. $\int \operatorname{sen} \ln x \, dx.$ **1864.** $\int \cos \ln x \, dx.$ **1865*.** $\int \frac{x^2 \, dx}{\sqrt{1-x^2}}$

1866*. $\int \sqrt{a^2+x^2} \, dx.$ **1867.** $\int \frac{x^2 e^x \, dx}{(x+2)^2}.$ **1868.** $\int x^2 e^x \operatorname{sen} x \, dx.$

Cambio de variable

En los ejercicios 1869—1904 hallar las integrales.

1869. $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x+1}}$ (sustituyendo $x+1=z^2$).

1870. $\int \frac{x^3 \, dx}{\sqrt{x-1}}.$ **1871.** $\int \frac{4x+3}{(x-2)^3} dx.$ **1872.** $\int \frac{dx}{x\sqrt{x+1}}.$

1873. $\int \frac{x+1}{x\sqrt{x-2}} dx.$ **1874.** $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}}.$ **1875.** $\int \frac{\sqrt{x}}{x(x+1)} dx.$

1876. $\int \frac{\sqrt{x}}{x+1} dx.$ **1877.** $\int \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+1}}.$ **1878.** $\int \frac{dx}{\sqrt{ax+b}+m}.$

1879. $\int \frac{\sqrt{x} \, dx}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}$ (sustituyendo $x=z^6$).

1880. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}(\sqrt[3]{x}-1)}.$ **1881.** $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}.$ **1882.** $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[4]{x}} dx.$

1883. $\int \frac{e^{2x} \, dx}{\sqrt[4]{e^x+1}}$ (sustituyendo $e^x+1=z^4$).

1884. $\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}.$ **1885.** $\int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x \ln x} dx.$

1886. $\int \sqrt{1+\cos^2 x} \cdot \operatorname{sen} 2x \cdot \cos 2x \, dx.$

1887. $\int \frac{\ln \operatorname{tg} x}{\operatorname{sen} x \cdot \cos x} dx.$ **1888.** $\int \frac{x^5 \, dx}{\sqrt{a^3-x^3}}.$ **1889.** $\int \frac{x^5 \, dx}{(x^2-4)^2}.$

1890. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+a^2}}$

$\left(\text{sustituyendo } x=\frac{1}{z}, \text{ o } x=a \operatorname{tg} z, \text{ o } x=a \operatorname{sh} z\right).$

1891. $\int \frac{x^2 \, dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$ (sustituyendo $x=a \operatorname{sen} z$).

1892. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-a^2}}$

$\left(\text{sustituyendo } x=\frac{1}{z}, \text{ o } x=\frac{a}{\cos z}, \text{ o } x=a \operatorname{ch} z\right).$

1893. $\int \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^4}\,dx.$ **1894.** $\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}\,dx.$

1895. $\int \frac{dx}{\sqrt{(a^2+x^2)^3}}.$ **1896.** $\int \frac{\sqrt{(9-x^2)^3}}{x^6}\,dx.$

1897. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-9}}.$ **1898.** $\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}.$

1899. $\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2-a^2)^3}}.$ **1900.** $\int x^2\sqrt{4-x^2}\,dx.$

1901. $\int \frac{dx}{(x^2+4)\sqrt{4x^2+1}}.$ **1902*.** $\int \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\,\frac{dx}{x^2}.$

1903*. $\int \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}}.$ **1904*.** $\int \frac{(x+1)\,dx}{x(1+xe^x)}.$

En los ejercicios 1905—1909 hallar las integrales efectuando primero el cambio de variable y luego integrando por partes.

1905. $\int e^{\sqrt{x}}\,dx.$ **1906.** $\int \operatorname{sen}\sqrt[3]{x}\,dx.$

1907. $\int \frac{\operatorname{arcsen} x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}\,dx.$ **1908.** $\int \frac{x^2 \operatorname{arctg} x}{1+x^2}\,dx.$

1909. $\int \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2(1+x^2)}\,dx.$

Diversos problemas

En los ejercicios 1910—2011 hallar las integrales.

1910. $\int (x+1)\sqrt{x^2+2x}\,dx.$ **1911.** $\int (1+e^{3x})^2 e^{3x}\,dx.$

1912. $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx.$ **1913.** $\int \frac{\operatorname{sen} x}{e^{\cos x}}\,dx.$

1914. $\int \sqrt{1-e^x}\,e^x\,dx.$ **1915.** $\int x\cos x^2\,dx.$

1916. $\int (2-3x^{\frac{4}{3}})^{\frac{1}{5}}\,x^{\frac{1}{3}}\,dx.$ **1917.** $\int \frac{2x^5-3x^2}{1+3x^3-x^6}\,dx.$

1918. $\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{1+x^{\frac{3}{2}}}.$ **1919.** $\int \frac{dx}{e^x(3+e^{-x})}.$

1920. $\int \frac{dx}{e^x\sqrt{1-e^{-2x}}}.$ **1921.** $\int \frac{2x+3}{\sqrt{1+x^2}}\,dx.$

1922. $\int \frac{2x-1}{\sqrt{9x^2-4}}\,dx.$ **1923.** $\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx.$

1924. $\int \frac{dx}{x\sqrt{3-\ln^2 x}}$.

1925. $\int \frac{\ln x\,dx}{x(1-\ln^2 x)}$.

1926. $\int \frac{x^2-x+1}{\sqrt{(x^2+1)^3}}\,dx$.

1927. $\int \frac{(\operatorname{arctg} x)^n}{1+x^2}\,dx$.

1928. $\int \frac{d\varphi}{\operatorname{sen}^2\varphi\cos^2\varphi}$.

1929. $\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x}\,dx$.

1930. $\int \frac{\operatorname{sen}^4 x\,dx}{\cos^6 x}$.

1931. $\int \sqrt{\operatorname{tg}^3 x}\sec^4 x\,dx$.

1932. $\int (1-\operatorname{tg} 3x)^2\,dx$.

1933. $\int \frac{x^3\,dx}{x+1}$.

1934. $\int \frac{x\,dx}{(x-1)^3}$.

1935. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{2+4x}}$.

1936. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1+2x}}$.

1937. $\int x\sqrt{a+x}\,dx$.

1938. $\int (\sqrt{\operatorname{sen} x}+\cos x)^2\,dx$.

1939. $\int a^{mx}b^{nx}\,dx$.

1940. $\int \frac{dx}{\sqrt{5-2x+x^2}}$.

1941. $\int \frac{dx}{\sqrt{9x^2-6x+2}}$.

1942. $\int \frac{dx}{\sqrt{12x-9x^2-2}}$.

1943. $\int \frac{(8x-11)\,dx}{\sqrt{5+2x-x^2}}$.

1944. $\int \frac{(x+2)\,dx}{x^2+2x+2}$.

1945. $\int \frac{(x-3)\,dx}{\sqrt{3-2x-x^2}}$.

1946. $\int \frac{(3x-1)\,dx}{4x^2-4x+17}$.

1947. $\int \frac{(3x-1)\,dx}{\sqrt{x^2+2x+2}}$.

1948. $\int \frac{(x-2)\,dx}{x^2-7x+12}$.

1949. $\int \frac{2x+5}{\sqrt{9x^2+6x+2}}\,dx$.

1950. $\int \frac{3-4x}{2x^2-3x+1}\,dx$.

1951. $\int \frac{(4-3x)\,dx}{5x^2+6x+18}$.

1952. $\int \frac{(2-5x)\,dx}{\sqrt{4x^2+9x+1}}$.

1953. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{3x^2-11x+2}}$.

1954. $\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{\sqrt{2x+3}}$.

1955. $\int \sqrt{\frac{a-x}{x-b}}\,dx$.

1956. $\int \operatorname{arctg} x\,dx$.

1957. $\int x\operatorname{sen} x\cos x\,dx$.

1958. $\int x^2\cos\omega x\,dx$.

1959. $\int e^{2x}x^3\,dx$.

1960. $\int \frac{\ln \cos x}{\cos^2 x}\,dx.$ 1961. $\int \frac{\operatorname{ctg} x}{\ln \operatorname{sen} x}\,dx.$

1962. $\int \frac{x^7\,dx}{(1+x^4)^2}.$ 1963. $\int \frac{\cos^2 3x}{\operatorname{sen} 3x}\,dx.$

1964. $\int \frac{dx}{1-\operatorname{sen} 3x}.$ 1965. $\int \frac{\operatorname{sen} 2x\,dx}{4-\cos^2 2x}.$

1966. $\int \frac{dx}{e^x+1}.$ 1967. $\int \frac{e^x-1}{e^x+1}\,dx.$

1968. $\int e^{e^x+x}\,dx.$ 1969. $\int e^{2x^2+\ln x}\,dx.$

1970. $\int \frac{3+x^3}{\sqrt{2+2x^2}}\,dx.$ 1971. $\int \frac{x \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$

1972. $\int \frac{x\cos x}{\operatorname{sen}^3 x}\,dx.$ 1973. $\int e^x \operatorname{sen}^2 x\,dx.$

1974. $\int \frac{(1+\operatorname{tg} x)\,dx}{\operatorname{sen} 2x}.$ 1975. $\int \frac{1-\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg} x}\,dx.$

1976. $\int \frac{d\varphi}{\sqrt{3}\cos\varphi+\operatorname{sen}\varphi}.$ 1977. $\int \frac{\operatorname{sen} x\,dx}{1+\operatorname{sen} x}.$

1978. $\int \frac{\operatorname{sen}^2 x\cos x}{(1+\operatorname{sen}^2 x)}\,dx.$ 1979. $\int \frac{\sqrt{1+\cos x}}{\operatorname{sen} x}\,dx.$

1980. $\int \frac{\ln \ln x}{x}\,dx.$ 1981. $\int x^3 e^{x^2}\,dx.$

1982. $\int e^{-x^2} x^5\,dx.$ 1983. $\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{1+2x^2}}.$

1984. $\int \frac{x^4\,dx}{\sqrt{(1-x^2)^3}}.$ 1985. $\int \frac{\sqrt{(x^2-a^2)^5}}{x}\,dx.$

1986. $\int \frac{dx}{x^4\sqrt{x^2+4}}.$ 1987. $\int \frac{\sqrt{x^2-8}}{x^4}\,dx.$

1988. $\int \frac{\sqrt{4+x^2}}{x^6}\,dx.$ 1989. $\int \frac{dx}{x^4\sqrt{x^2-3}}.$

1990. $\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{\sqrt[4]{x^3}+1}.$ 1991. $\int \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}-1}\,dx.$

1992. $\int \frac{dx}{(2+x)\sqrt{1+x}}.$ 1993. $\int \frac{\sqrt[3]{x}\,dx}{x(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})}.$

1994. $\int \frac{\sqrt{x^2+2x}}{x}\,dx.$ 1995*. $\int \frac{x^7\,dx}{(1-x^2)^5}.$

1996. $\int \frac{dx}{(ax+b)\sqrt{x}}.$ 1997. $\int \frac{\sqrt{1+x^8}}{x^{13}}\,dx.$

1998. $\int \frac{x\,dx}{(1-x^4)^{\frac{3}{2}}}$.

1999. $\int \frac{x^5\,dx}{\sqrt{x^4+4}}$.

2000. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}\,(x-1)}$.

2001. $\int \frac{\sqrt{1-x^3}}{x^2\sqrt{x}}\,dx$.

2002. $\int \frac{x^4\,dx}{(1+x^2)^3}$.

2003. $\int \frac{3x^2-1}{2x\sqrt{x}}\operatorname{arctg} x\,dx$.

2004. $\int \frac{e^x(1+e^x)\,dx}{\sqrt{1-e^{2x}}}$.

2005. $\int \sqrt{e^x-1}\,dx$.

2006*. $\int \frac{\ln(x+1)-\ln x}{x(x+1)}\,dx$.

2007. $\int \frac{dx}{x^6+x^4}$.

2008. $\int \arccos\sqrt{\frac{x}{x+1}}\,dx$.

2009. $\int \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)dx$.

2010. $\int \sqrt[3]{\frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^{14} x}}\,dx$.

2011. $\int \frac{dx}{\cos^3 x\sqrt{\operatorname{sen} 2x}}$.

§ 3. Tipos principales de las funciones integrables

Funciones fraccionarias racionales

En los ejercicios 2012—2067 hallar las integrales.

1) *El denominador tiene sólo distintas raíces reales.*

2012. $\int \frac{x\,dx}{(x+1)(2x+1)}$.

2013. $\int \frac{x\,dx}{2x^2-3x-2}$.

2014. $\int \frac{2x^2+41x-91}{(x-1)(x+3)(x-4)}\,dx$.

2015. $\int \frac{dx}{6x^3-7x^2-3x}$.

2016. $\int \frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}\,dx$.

2017. $\int \frac{x^3-1}{4x^3-x}\,dx$.

2018. $\int \frac{32x\,dx}{(2x-1)(4x^2-16x+15)}$.

2019. $\int \frac{x\,dx}{x^4-3x^2+2}$.

2020. $\int \frac{(2x^2-5)\,dx}{x^4-5x^2+6}$.

2021. $\int \frac{x^6-2x^4+3x^3-9x^2+4}{x^5-5x^3+4x}\,dx$.

2) *El denominador tiene sólo raíces reales; algunas raíces son múltiples.*

2022. $\int \frac{(x^2-3x+2)\,dx}{x(x^2+2x+1)}$. **2023.** $\int \left(\frac{x+2}{x-1}\right)^2 \frac{dx}{x}$.

2024. $\int \frac{x^2dx}{x^3+5x^2+8x+4}$. **2025.** $\int \frac{x^3+1}{x^3-x^2}\,dx$.

2026. $\int \frac{x^3-6x^2+11x-5}{(x-2)^4}\,dx$. **2027.** $\int \frac{dx}{x^4-x^2}$.

2028. $\int \frac{x^2\,dx}{(x+2)^2(x+4)^2}$. **2029.** $\int \frac{x^3-6x^2+9x+7}{(x-2)^3(x-5)}\,dx$.

2030. $\int \frac{1}{8}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^4 dx$. **2031.** $\int \frac{x^5\,dx}{(x-1)^2(x^2-1)}$.

2032. $\int \frac{(x^2-2x+3)\,dx}{(x-1)(x^3-4x^2+3x)}$. **2033.** $\int \frac{(7x^3-9)\,dx}{x^4-5x^3+6x^2}$.

2034. $\int \frac{x^3-2x^2+4}{x^3(x-2)^2}\,dx$. **2035.** $\int \frac{3x^2+1}{(x^2-1)^3}\,dx$.

3) *El denominador tiene distintas raíces complejas.*

2036. $\int \frac{dx}{x(x^2+1)}$. **2037.** $\int \frac{dx}{1+x^3}$. **2038.** $\int \frac{x\,dx}{x^3-1}$.

2039. $\int \frac{(2x^2-3x-3)\,dx}{(x-1)(x^2-2x+5)}$. **2040.** $\int \frac{(x^4+1)\,dx}{x^3-x^2+x-1}$.

2041. $\int \frac{x^2\,dx}{1-x^4}$. **2042.** $\int \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+x)}$.

2043. $\int \frac{dx}{(x+1)^2(x^2+1)}$. **2044.** $\int \frac{(3x^2+x+3)\,dx}{(x-1)^3(x^2+1)}$.

2045. $\int \frac{x^5+2x^3+4x+4}{x^4+2x^3+2x^2}\,dx$. **2046.** $\int \frac{(x^3-6)\,dx}{x^4+6x^2+8}$.

2047*. $\int \frac{dx}{1+x^4}$.

4) *El denominador tiene raíces complejas múltiples.*

2048. $\int \frac{x^3+x-1}{(x^2+2)^2}\,dx$. **2049.** $\int \frac{dx}{x(4+x^2)^2(1+x^2)}$.

2050. $\int \frac{(5x^2-12)\,dx}{(x^2-6x+13)^2}$. **2051.** $\int \frac{(x+1)^4\,dx}{(x^2+2x+2)^3}$.

2052. $\int \frac{dx}{(x^2+9)^3}$. **2053.** $\int \frac{2x\,dx}{(1+x)(1+x^2)^2}$.

2054. $\int \frac{dx}{(1+x^2)^4}$. **2055.** $\int \frac{x^9\,dx}{(x^4-1)^2}$.

5) *Método de Ostrogradski.*

2056. $\int \frac{x^7+2}{(x^2+x+1)^2}\,dx$. **2057.** $\int \frac{(4x^2-8x)\,dx}{(x-1)^2(x^2+1)^2}$.

2058. $\int \frac{x^2+x+1}{x^5-2x^4+x^3}\,dx.$ **2059.** $\int \frac{x^6+x^4-4x^2-2}{x^3(x^2+1)^2}\,dx.$

2060. $\int \frac{(x^2-1)^2\,dx}{(1+x)(1+x^2)^3}.$ **2061.** $\int \frac{dx}{x^4(x^3+1)^2}.$

2062. $\int \frac{dx}{(x^2+2x+10)^3}.$ **2063.** $\int \frac{(x+2)\,dx}{(x^2+2x+2)^3}.$

2064. $\int \frac{x^5-x^4-26x^2-24x-25}{(x^2+4x+5)^2(x^2+4)^2}\,dx.$

2065. $\int \frac{3x^4+4}{x^2(x^2+1)^3}\,dx.$

2066. $\int \frac{5-3x+6x^2+5x^3-x^4}{x^5-x^4-2x^3+2x^2+x-1}\,dx.$

2067. $\int \frac{-9\,dx}{5x^2(3-2x^2)^3}.$

Algunas funciones irracionales

En los ejercicios 2068—2089 hallar las integrales.

1) *Funciones de la forma* $R\left(x, \sqrt[m]{\frac{ax+b}{a_1x+b_1}}, \sqrt[p]{\frac{ax+b}{a_1x+b_1}}, \ldots\right)$.

2068. $\int \frac{dx}{x(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2})}.$ **2069.** $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+2\sqrt[4]{x}}.$

2070. $\int \frac{x\,dx}{(x+1)^{\frac{1}{2}}+(x+1)^{\frac{1}{3}}}.$ **2071.** $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,\frac{dx}{x}.$

2072. $\int \sqrt{\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}}\,dx.$ **2073.** $\int \frac{x^2+\sqrt{1+x}}{\sqrt[3]{1+x}}\,dx.$

2074. $\int \sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}}\,\frac{dx}{x}.$ **2075*.** $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{(x-1)^3(x+2)^5}}.$

2) *Binomios diferenciales* $x^m(a+bx^n)^p\,dx$.

2076. $\int \sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})^4\,dx.$ **2077.** $\int x^{-1}(1+x^{\frac{1}{3}})^{-3}\,dx.$

2078. $\int \frac{dx}{x\sqrt[3]{x^2+1}}.$ **2079.** $\int x^5\sqrt[3]{(1+x^3)^2}\,dx.$

2080. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^3}}.$ **2081.** $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}.$

2082. $\int \frac{\sqrt{1-x^4}}{x^5}\,dx.$ **2083.** $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}\,dx.$

2084. $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}}{x}\,dx.$ 2085. $\int \frac{dx}{x\sqrt[3]{1+x^5}}.$

2086. $\int \frac{\sqrt[3]{1+x^3}}{x^2}\,dx.$ 2087. $\int \frac{dx}{x^{11}\sqrt{1+x^4}}.$

2088. $\int \sqrt[3]{x(1-x^2)}\,dx.$ 2089. $\int \sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}\,dx.$

Funciones trigonométricas

En los ejercicios 2090—2131 hallar las integrales.

2090. $\int \operatorname{sen}^3 x \cos^2 x\,dx.$ 2091. $\int \frac{\operatorname{sen}^3 x}{\cos^4 x}\,dx.$

2092. $\int \frac{dx}{\cos x \cdot \operatorname{sen}^3 x}.$ 2093. $\int \frac{\operatorname{sen}^4 x}{\cos^2 x}\,dx.$

2094. $\int \frac{dx}{\cos^3 x \operatorname{sen}^3 x}.$ 2095. $\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^4 x \cos^4 x}.$

2096. $\int \frac{\operatorname{sen} x\,dx}{(1-\cos x)^2}.$ 2097. $\int \frac{\cos x\,dx}{(1-\cos x)^2}.$

2098. $\int \cos^6 x\,dx.$ 2099. $\int \operatorname{ctg}^4 x\,dx.$

2100. $\int \operatorname{tg}^5 x\,dx.$ 2101. $\int \frac{dx}{\operatorname{tg}^8 x}.$

2102. $\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^3 x}.$ 2103. $\int \frac{\cos^4 x+\operatorname{sen}^4 x}{\cos^2 x-\operatorname{sen}^2 x}\,dx.$

2104. $\int \frac{dx}{(\operatorname{sen} x+\cos x)^2}.$ 2105. $\int \frac{dx}{\operatorname{sen} x+\cos x}.$

2106. $\int \frac{dx}{a\cos x+b\operatorname{sen} x}.$ 2107. $\int \frac{dx}{\operatorname{tg} x \cdot \cos 2x}.$

2108. $\int \frac{\cos^2 x\,dx}{\operatorname{sen} x \cdot \cos 3x}.$ 2109. $\int \frac{dx}{1+\operatorname{tg} x}.$

2110. $\int \frac{dx}{5-3\cos x}.$ 2111. $\int \frac{dx}{5+4\operatorname{sen} x}.$

2112. $\int \frac{2-\operatorname{sen} x}{2+\cos x}\,dx.$ 2113. $\int \frac{\operatorname{sen}^2 x\,dx}{1-\operatorname{tg} x}.$

2114. $\int \frac{dx}{4+\operatorname{tg} x+4\operatorname{ctg} x}.$ 2115. $\int \frac{dx}{(\operatorname{sen} x+2\sec x)^2}.$

2116. $\int \frac{dx}{5-4\operatorname{sen} x+3\cos x}.$ 2117. $\int \frac{dx}{4-3\cos^2 x+5\operatorname{sen}^2 x}.$

2118. $\int \frac{dx}{1+\operatorname{sen}^2 x}.$ 2119. $\int \frac{dx}{1-\operatorname{sen}^4 x}.$

2120. $\int \frac{dx}{a^2 \operatorname{sen}^2 x + b^2 \cos^2 x}$. **2121.** $\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{tg}^2 x}$.

2122. $\int \frac{\cos x \, dx}{\operatorname{sen}^3 x - \cos^3 x}$.

2123. $\int \sqrt{1 + \operatorname{sen} x} \, dx$. **2124.** $\int \frac{\sqrt{\operatorname{tg} x}}{\operatorname{sen} x \cos x} dx$.

2125*. $\int \frac{\sqrt{\operatorname{sen}^3 2x}}{\operatorname{sen}^5 x} dx$. **2126.** $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{\operatorname{sen}^3 x \cos^5 x}}$.

2127. $\int \frac{dx}{\sqrt{1 - \operatorname{sen}^4 x}}$. **2128.** $\int \sqrt{1 + \operatorname{cosec} x} \, dx$.

2129. $\int \frac{(\cos 2x - 3) \, dx}{\cos^4 x \sqrt{4 - \operatorname{ctg}^2 x}}$. **2130.** $\int \frac{dx}{\operatorname{sen} \frac{x}{2} \sqrt{\cos^3 \frac{x}{2}}}$.

2131. $\int \sqrt{\operatorname{tg} x} \, dx$.

Funciones hiperbólicas

En los ejercicios 2132—2150 hallar las integrales.

2132. $\int \operatorname{ch} x \, dx$. **2133.** $\int \operatorname{sh} x \, dx$.

2134. $\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x}$. **2135.** $\int \frac{e^x \, dx}{\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x}$.

2136. $\int (\operatorname{ch}^2 ax + \operatorname{sh}^2 ax) \, dx$. **2137.** $\int \operatorname{sh}^2 x \, dx$.

2138. $\int \operatorname{th}^2 x \, dx$. **2139.** $\int \operatorname{cth}^2 x \, dx$.

2140. $\int \operatorname{sh}^3 x \, dx$. **2141.** $\int \operatorname{ch}^3 x \, dx$.

2142. $\int \operatorname{th}^4 x \, dx$. **2143.** $\int \operatorname{sh}^2 x \operatorname{ch}^3 x \, dx$.

2144. $\int \operatorname{cth}^5 x \, dx$. **2145.** $\int \frac{dx}{\operatorname{sh} x \operatorname{ch} x}$.

2146. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh} x}$. **2147.** $\int \frac{dx}{(1 + \operatorname{ch} x)^2}$.

2148. $\int \sqrt{\operatorname{th} x} \, dx$. **2149.** $\int \frac{x \, dx}{\operatorname{ch}^2 x}$.

2150. $\int \frac{e^{2x} \, dx}{\operatorname{sh}^4 x}$.

Funciones racionales de x y $\sqrt{ax^2+bx+c}$

En los ejercicios 2151—2174 hallar las integrales.

2151*. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+1}}$. **2152.** $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+4x-4}}$.

2153. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+2x-1}}$. **2154.** $\int \frac{dx}{x\sqrt{2+x-x^2}}$.

2155. $\int \frac{\sqrt{2x+x^2}}{x^2}\,dx$. **2156.** $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2+x+1}}$.

2157. $\int \frac{dx}{(2x-3)\sqrt{4x-x^2}}$. **2158.** $\int \sqrt{x^2-2x-1}\,dx$.

2159. $\int \sqrt{3x^2-3x+1}\,dx$. **2160.** $\int \sqrt{1-4x-x^2}\,dx$.

2161. $\int \frac{dx}{x-\sqrt{x^2-x+1}}$. **2162.** $\int \frac{dx}{x^2\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}$.

2163. $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x^2+2x+2}}$. **2164.** $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-2x-x^2}}$.

2165. $\int \frac{(2x^2-3x)\,dx}{\sqrt{x^2-2x+5}}$. **2166.** $\int \frac{3x^2-5x}{\sqrt{3-2x-x^2}}\,dx$

2167. $\int \frac{3x^3\,dx}{\sqrt{x^2+4x+5}}$. **2168.** $\int \frac{x^3-x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}}\,dx$

2169. $\int \frac{3x^3-8x+5}{\sqrt{x^2-4x-7}}\,dx$. **2170.** $\int \frac{x^4\,dx}{\sqrt{x^2+4x+5}}$.

2171. $\int \frac{dx}{(x^3+3x^2+3x+1)\sqrt{x^2+2x-3}}$.

2172. $\int \frac{\sqrt{1+x^2}}{2+x^2}\,dx$. **2173.** $\int \frac{(x-1)\,dx}{x^2\sqrt{2x^2-2x+1}}$.

2174. $\int \frac{(2x+3)\,dx}{(x^2+2x+3)\sqrt{x^2+2x+4}}$.

Diversas funciones

En los ejercicios 2175—2230 hallar las integrales.

2175. $\int \frac{x^3\,dx}{(x-1)^{12}}$. **2176.** $\int \frac{x\,dx}{x-\sqrt{x^2-1}}$.

2177. $\int x\sqrt[3]{a+x}\,dx$. **2178.** $\int \frac{dx}{ae^{mx}+be^{-mx}}$.

2179. $\int \frac{x\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}}\,dx$. 2180. $\int \frac{x^4\,dx}{(x^2-1)(x+2)}$.

2181. $\int \frac{dx}{1-x^4}$. 2182. $\int \frac{dx}{(x^4-1)^2}$.

2183. $\int \frac{\ln(x+1)\,dx}{\sqrt{x+1}}$. 2184. $\int (x^2+3x+5)\cos 2x\,dx$.

2185. $\int x^2 \operatorname{sh} x\,dx$. 2186. $\int \operatorname{arctg}(1+\sqrt{x})\,dx$.

2187. $\int \frac{\operatorname{arcsen} x\,dx}{x^2}$. 2188. $\int e^{\sqrt[3]{x}}\,dx$.

2189. $\int xe^{\sqrt[3]{x}}\,dx$. 2190. $\int (x^3-2x^2+5)\,e^{3x}\,dx$.

2191. $\int \operatorname{sen}\sqrt{x}\,dx$. 2192. $\int \frac{dx}{x^3(x-1)^{\frac{1}{2}}}$.

2193. $\int \frac{dx}{x-\sqrt{x^2-1}}$. 2194. $\int \frac{\sqrt{(1+x^2)^5}}{x^6}\,dx$.

2195. $\int \frac{x^4\,dx}{\sqrt{x^2+1}}$. 2196. $\int \sqrt{\frac{1-\sqrt[3]{x}}{1+\sqrt[3]{x}}}\,\frac{dx}{x}$.

2197. $\int \frac{dx}{x^3\sqrt{(1+x)^3}}$. 2198. $\int \frac{\sqrt{2x+1}}{x^2}\,dx$.

2199. $\int \frac{x^4\,dx}{x^{15}-1}$. 2200. $\int \frac{dx}{\operatorname{sen} 2x-2\operatorname{sen} x}$.

2201. $\int \frac{dx}{1+\cos^2 x}$. 2202. $\int \frac{dx}{a^2-b^2\cos^2 x}$.

2203. $\int x\ln(1+x^3)\,dx$. 2204. $\int \frac{(\ln x-1)\,dx}{\ln^2 x}$.

2205. $\int \frac{x\ln x}{\sqrt{(x^2-1)^3}}\,dx$. 2206. $\int x^2e^x\cos x\,dx$.

2207. $\int xe^{x^2}(x^2+1)\,dx$. 2208. $\int \frac{dx}{\sqrt{\operatorname{sen}^3 x\cos^5 x}}$.

2209. $\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^5 x\cos^5 x}$. 2210. $\int \frac{\operatorname{sen} 2x\,dx}{\cos^4 x+\operatorname{sen}^4 x}$.

2211. $\int \frac{dx}{1+\operatorname{sen} x+\cos x}$. 2212. $\int \sqrt{\operatorname{tg}^2 x+2}\,dx$.

2213. $\int \frac{(x^2-1)\,dx}{x\sqrt{x^4+3x^2+1}}$. 2214. $\int \frac{dx}{(2x-3)\sqrt{4x-x^2}}$.

2215. $\int \frac{xe^x\,dx}{(1+x)^2}$. 2216. $\int \frac{xe^x\,dx}{\sqrt{1+e^x}}$.

2217. $\int \frac{\operatorname{arctg} x\,dx}{x^4}$. 2218. $\int \frac{x\operatorname{arctg} x}{(1+x^2)^2}\,dx$.

2219. $\int \frac{\operatorname{arctg} x}{(1+x)^3}\,dx$. 2220. $\int \frac{dx}{(1-2^x)^4}$.

2221. $\int \frac{(e^{3x}+e^{x})\,dx}{e^{4x}-e^{2x}+1}$.

2222. $\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^{x}+e^{2x}}}$.

2223. $\int \frac{\operatorname{tg} x\,dx}{1+\operatorname{tg} x+\operatorname{tg}^2 x}$.

2224. $\int \operatorname{sen}^8 x\,dx$.

2225. $\int \frac{(3+x^2)^2 x^3\,dx}{(1+x^2)^3}$.

2226. $\int \frac{x^2-8x+7}{(x^2-3x-10)^2}\,dx$.

2227. $\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^4 x+\cos^4 x}$.

2228. $\int \frac{(x+\operatorname{sen} x)\,dx}{1+\cos x}$.

2229*. $\int \frac{x^2-1}{x^2+1}\cdot\frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}$.

2230. $\int e^{\operatorname{sen} x}\,\frac{x\cos^3 x-\operatorname{sen} x}{\cos^2 x}\,dx$.

Capítulo VII

Métodos para calcular integrales definidas. Integrales impropias

§ 1. Métodos de integración exacta

Aplicación directa de la fórmula de Newton — Leibniz

En los ejercicios 2231—2258 calcular las integrales.

2231. $\int\limits_{0}^{1} \sqrt{1+x}\,dx.$

2232. $\int\limits_{-2}^{-1} \frac{dx}{(11+5x)^3}.$

2233. $\int\limits_{2}^{-13} \frac{dx}{\sqrt[5]{(3-x)^4}}.$

2234. $\int\limits_{4}^{9} \frac{y-1}{\sqrt{y}+1}\,dy.$

2235. $\int\limits_{0}^{\frac{T}{2}} \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi t}{T}-\varphi_0\right) dt.$

2236. $\int\limits_{0}^{16} \frac{dx}{\sqrt{x+9}-\sqrt{x}}.$

2237. $\int\limits_{0}^{1} (e^x-1)^4 e^x\,dx.$

2238. $\int\limits_{0}^{2a} \frac{3\,dx}{2b-x} \quad (b>a>0).$

2239. $\int\limits_{0}^{1} \frac{x\,dx}{(x^2+1)^2}.$

2240. $\int\limits_{1}^{e} \frac{dx}{x\sqrt{1-(\ln x)^2}}.$

2241. $\int\limits_{1}^{e} \frac{1+\lg x}{x}\,dx.$

2242. $\int\limits_{1}^{2} \frac{e^{\frac{1}{x}}\,dx}{x^2}.$

2243. $\int\limits_{0}^{\sqrt[n]{\frac{a}{2}}} \frac{x^{n-1}\,dx}{\sqrt{a^2-x^{2n}}}.$

2244. $\int\limits_{1}^{e^3} \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}}.$

2245. $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{x^3\,dx}{\left(\frac{5}{8}-x^4\right)\sqrt{\frac{5}{8}-x^4}}$.

2246. $\displaystyle\int_{0}^{\frac{a}{2}} \frac{a\,dx}{(x-a)(x-2a)}$.

2247. $\displaystyle\int_{2}^{3} \frac{dx}{2x^2+3x-2}$.

2248. $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{dx}{x^2+4x+5}$.

2249. $\displaystyle\int_{1}^{2} \frac{dx}{x+x^3}$.

2250. $\displaystyle\int_{-0,5}^{1} \frac{dx}{\sqrt{8+2x-x^2}}$.

2251. $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\cos x}$.

2252. $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x \operatorname{sen} x\, 2x\,dx$.

2253. $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos x-\cos^3 x}\,dx$.

2254. $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{\omega}} \operatorname{sen}^2(\omega x+\varphi_0)\,dx$.

2255. $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^3 x\,dx}{\sqrt[3]{\operatorname{sen} x}}$.

2256. $\displaystyle\int_{\alpha}^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{ctg}^4\varphi\,d\varphi$.

2257. $\displaystyle\int_{\frac{1}{\pi}}^{\frac{2}{\pi}} \frac{\operatorname{sen}\frac{1}{x}}{x^2}\,dx$.

2258. $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos t \operatorname{sen}\left(2t-\frac{\pi}{4}\right)dt$.

En los ejercicios 2259—2268 hallar las integrales integrándolas por partes:

2259. $\displaystyle\int_{0}^{1} xe^{-x}\,dx$.

2260. $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\,dx$.

2261. $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{x\,dx}{\operatorname{sen}^2 x}$. **2262.** $\int\limits_0^{\pi} x^3 \operatorname{sen} x\,dx$.

2263. $\int\limits_1^2 x \log_2 x\,dx$. **2264.** $\int\limits_0^{e-1} \ln(x+1)\,dx$.

2265. $\int\limits_0^{a\sqrt{7}} \frac{x^3\,dx}{\sqrt[3]{a^2+x^2}}$. **2266.** $\int\limits_0^{a} \sqrt{a^2-x^2}\,dx$.

2267. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x} \cos x\,dx$. **2268.** $\int\limits_1^{e} \ln^3 x\,dx$.

2269. Deducir las fórmulas de recurrencia para calcular las integrales $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,dx$ y $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^n x\,dx$ (n es un entero positivo o cero) y calcular las integrales:

a) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^5 x\,dx$; b) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^8 x\,dx$; c) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^{11} x\,dx$.

2270. Deducir la fórmula de recurrencia para calcular la integral $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^m x \cos^n x\,dx$ (m y n son enteros positivos o ceros; examinar los casos particulares de valores pares e impares de m y n).

2271. Deducir la fórmula de recurrencia y calcular la integral $\int\limits_{-1}^{0} x^n e^x\,dx$ (n es un entero positivo).

2272. Demostrar la fórmula de recurrencia

$$\int \frac{dx}{(1+x^2)^n} = \frac{x}{2(n-1)(1+x^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2(n-1)} \int \frac{dx}{(1+x^2)^{n-1}}$$

(n es un entero positivo) y mediante ésta calcular la integral $\int\limits_0^1 \frac{dx}{(1+x^2)^4}$.

2273. Demostrar que si $J_m = \int_1^e \ln^m x\,dx$, se tiene $J_m = e - mJ_{m-1}$ (m es un entero positivo).

2274*. Hallar la integral $\int_0^1 x^p(1-x)^q\,dx$ (p y q son enteros positivos).

Cambio de variable en la integral definida

En los ejercicios 2275—2295 calcular las integrales.

2275. $\int_4^9 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}\,dx$. **2276.** $\int_0^1 \frac{\sqrt{x}\,dx}{1+x}$. **2277.** $\int_3^8 \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x}}$.

2278. $\int_0^1 \frac{x\,dx}{1+\sqrt{x}}$. **2279.** $\int_0^1 \frac{\sqrt{e^x}\,dx}{\sqrt{e^x+e^{-x}}}$. **2280.** $\int_3^{29} \frac{\sqrt[3]{(x-2)^2}\,dx}{3+\sqrt[3]{(x-2)^2}}$.

2281*. $\int_0^{\pi} \operatorname{sen}^6 \frac{x}{2}\,dx$. **2282*.** $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^7 2x\,dx$.

2283. $\int_0^1 \frac{x^2\,dx}{(1+x^2)^3}$. **2284.** $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2}\,dx$.

2285. $\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^6}\,dx$. **2286.** $\int_1^2 \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\,dx$.

2287. $\int_{\sqrt{2}}^2 \frac{dx}{x^5\sqrt{x^2-1}}$. **2288.** $\int_0^1 \sqrt{(1-x^2)^3}\,dx$.

2289. $\int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}\,dx$. **2290.** $\int_0^{-\ln 2} \sqrt{1-e^{2x}}\,dx$.

2291. $\int_0^a \frac{dx}{x+\sqrt{a^2-x^2}}$. **2292.** $\int_0^3 \frac{dx}{(x^2+3)^{\frac{5}{2}}}$.

2293. $\int\limits_{2,5}^{5} \frac{(\sqrt{25-x^2})^3}{x^4}\,dx$. **2294.** $\int\limits_{0}^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{dx}{(2x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$.

2295. $\int\limits_{\sqrt{\frac{8}{3}}}^{2\sqrt{2}} \frac{dx}{x\sqrt{(x^2-2)^5}}$.

Distintos problemas

2296. Calcular el valor medio de la función $y=\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}$ en el intervalo $[1, 4]$.

2297. Calcular el valor medio de la función $f(x)=\frac{1}{x^2+x}$ en el intervalo $[1; 1,5]$.

2298. Calcular el valor medio de las funciones $f(x)=\operatorname{sen} x$ y $f(x)=\operatorname{sen}^2 x$ en el intervalo $[0, \pi]$.

2299. Calcular el valor medio de la función $f(x)=\frac{2}{e^x+1}$ en el intervalo $[0, 2]$.

2300. ¿Para qué valor de a el valor medio de la función $y = \ln x$ en el intervalo $[1, a]$ es igual a la velocidad media con que varía la función en este intervalo?

En los ejercicios 2301—2317 calcular las integrales.

2301. $\int\limits_{1}^{2} \frac{dx}{x+x^3}$. **2302.** $\int\limits_{0}^{\sqrt[5]{2}} \frac{x^9\,dx}{(1+x^5)^3}$.

2303. $\int\limits_{0}^{\frac{1}{2}} \frac{x^3\,dx}{x^2-3x+2}$. **2304.** $\int\limits_{0}^{\sqrt[4]{2}} \frac{x^{15}\,dx}{(1+x^8)^{\frac{2}{5}}}$.

2305. $\int\limits_{0}^{2} \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{(x+1)^3}}$. **2306.** $\int\limits_{-a}^{+a} \frac{x^2\,dx}{\sqrt{a^2+x^2}}$.

2307. $\int\limits_{0}^{1} \sqrt{2x+x^2}\,dx$. **2308.** $\int\limits_{0}^{\sqrt{3}} x^5\sqrt{1+x^2}\,dx$.

2309. $\int\limits_{0}^{\ln 5} \frac{e^x\sqrt{e^x-1}}{e^x+3}\,dx$. **2310.** $\int\limits_{1}^{3} \frac{dx}{x\sqrt{x^2+5x+1}}$.

2311. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x \operatorname{sen} x}{\cos^3 x}\, dx.$ **2312.** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2\cos x + 3}.$

2313. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\frac{1}{6}\operatorname{sen}^2 x}.$ **2314.** $\int_0^1 (\operatorname{arcsen} x)^4\, dx.$

2315. $\int_1^{16} \operatorname{arctg}\sqrt{\sqrt{x}-1}\, dx.$ **2316.** $\int_0^1 \frac{(3x+2)\, dx}{(x^2+4x+1)^{\frac{5}{2}}}.$

2317. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{sen} x \cos x\, dx}{a^2\cos^2 x + b^2 \operatorname{sen}^2 x}.$

2318. Mostrar que $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{|ab|\, dx}{a^2\cos^2 x + b^2 \operatorname{sen}^2 x} = \frac{\pi}{2}$, donde a y b son cualesquiera números reales distintos de cero.

2319. Resolver la ecuación $\int_{\sqrt{2}}^{x} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \frac{\pi}{12}.$

2320. Resolver la ecuación $\int_{\ln 2}^{x} \frac{dx}{\sqrt{e^x-1}} = \frac{\pi}{6}.$

2321. Al quedarse convencido de la validez de las desigualdades $\frac{x}{e} > \ln x > 1$ para $x > e$, mostrar que la integral $\int_3^4 \frac{dx}{\sqrt[3]{\ln x}}$ es menor que 1, pero mayor que 0,92.

2322*. Mostrar que

$$\frac{\pi}{6} \approx 0{,}523 < \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2-x^3}} < \frac{\pi}{4\sqrt{2}} \approx 0{,}555.$$

2323*. Mostrar que

$$0{,}5 < \int_0^{0,5} \frac{dx}{\sqrt{1-x^{2n}}} \leqslant \frac{\pi}{6} \approx 0{,}523$$

$(n \geqslant 1)$.

2324. Valiéndose de la desigualdad $\operatorname{sen} x > x - \frac{x^3}{6}$, que es válida para $x > 0$, y de la desigualdad de Cauchy — Buniakovski (véase el ejercicio 1638), evaluar la integral $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{x \operatorname{sen} x}\, dx$.

2325*. Mostrar que $0{,}78 < \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}} < 0{,}93$.

2326. Hallar los valores máximo y mínimo de la función $J(x) = \int_0^x \frac{2t+1}{t^2-2t+2}\, dt$ en el intervalo $[-1, 1]$.

2327. Hallar el punto extremo y los puntos de inflexión de la gráfica de la función $y = \int_0^x (t-1)(t-2)^2\, dt$.

En los ejercicios 2328—2331 demostrar la validez de las igualdades sin calcular las integrales.

2328. $\int_{-\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{8}} x^{10} \operatorname{sen}^9 x\, dx = 0$. **2329.** $\int_{-1}^{1} \frac{x^7-3x^5+7x^3-x}{\cos^2 x}\, dx = 0$.

2330. $\int_{-1}^{1} e^{\cos x}\, dx = 2\int_0^1 e^{\cos x}\, dx$. **2331.** $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \cos x \ln \frac{1+x}{1-x}\, dx = 0$.

2332*. a) Mostrar que si $f(t)$ es una función impar, $\int_a^x f(t)\, dt$ es una función par, es decir, que $\int_a^{-x} f(t)\, dt = \int_a^x f(t)\, dt$.

b) ¿Será la función $\int_a^x f(t)\, dt$ impar, si la función $f(t)$ es par?

2333*. Demostrar la validez de la igualdad

$$\int_x^1 \frac{dt}{1+t^2} = \int_1^{\frac{1}{x}} \frac{dt}{1+t^2} \quad (x > 0).$$

2334. Demostrar la identidad

$$\int_{\frac{1}{e}}^{\operatorname{tg} x} \frac{t\,dt}{1+t^2}+\int_{\frac{1}{e}}^{\operatorname{ctg} x} \frac{dt}{t(1+t^2)}=1.$$

2335. Demostrar la identidad

$$\int_0^{\operatorname{sen}^2 x} \operatorname{arcsen} \sqrt{t}\,dt+\int_0^{\cos^2 x} \arccos \sqrt{t}\,dt=\frac{\pi}{4}.$$

2336. Demostrar la validez de la igualdad

$$\int_0^1 x^m (1-x)^n\,dx=\int_0^1 x^n (1-x)^m\,dx.$$

2337. Demostrar la validez de la igualdad

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^b f(a+b-x)\,dx.$$

2338. Demostrar que $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\operatorname{sen} x)\,dx$. Aplicar el resultado obtenido para calcular las integrales $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\,dx$ y $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^2 x\,dx$.

2339*. Demostrar que $\int_0^{\pi} xf(\operatorname{sen} x)\,dx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\operatorname{sen} x)\,dx=\frac{\pi}{2}\cdot 2\times$ $\times\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\operatorname{sen} x)\,dx=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\operatorname{sen} x)\,dx$. Aplicar el resultado obtenido para calcular la integral

$$\int_0^{\pi} \frac{x \operatorname{sen} x}{1+\cos^2 x}\,dx.$$

2340*. Mostrar que si la función $f(x)$ es periódica cuyo período es igual a T, se tiene que $\int_a^{a+T} f(x)\,dx$ no depende de a.

2341*. Sabemos que la función $f(x)$ es impar en el intervalo $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$ y su período es igual a T. Demostrar que $\int_a^x f(t)\,dt$ es también una función periódica cuyo período es el mismo.

2342. Calcular la integral $\int_0^1 (1-x^2)^n\,dx$, donde n es un entero positivo, aplicando dos métodos, a saber, descomponiendo el grado del binomio según la fórmula para el binomio de Newton, y por sustitución $x = \operatorname{sen}\varphi$. Al comparar los resultados deducir la siguiente fórmula de la suma (C_n^k son coeficientes binomiales):

$$C_n^0 - \frac{C_n^1}{3} + \frac{C_n^2}{5} - \frac{C_n^3}{7} + \ldots + \frac{(-1)^n C_n^n}{2n+1} = \frac{2\cdot 4\cdot 6\ldots 2n}{1\cdot 3\cdot 5\ldots (2n+1)}.$$

2343. La integral $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{5-3\cos x}$ se halla sin ninguna dificultad por sustitución $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = z$. Tenemos:

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{5-3\cos x} = \int_0^0 \frac{2\,dz}{(1+z^2)\left(5-3\,\frac{1-z^2}{1+z^2}\right)} = 0.$$

Pero, por otra parte, $-3 < -3\cos x < +3$, por consiguiente, $2 < 5-3\cos x < 8$ y $\frac{1}{2} > \frac{1}{5-3\cos x} > \frac{1}{8}$. De donde

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\,dx > \int_0^{2\pi} \frac{dx}{5-3\cos x} > \int_0^{2\pi} \frac{1}{8}\,dx,$$

y, por lo tanto, $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{5-3\cos x} > \frac{\pi}{4}$. Hallar el error en este razonamiento.

2344*. Sea $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}^n x\,dx$ ($n > 1$ y es un entero). Probar que $I_n + I_{n-2} = \frac{1}{n-1}$. Demostrar que $\frac{1}{2n+2} < I_n < \frac{1}{2n-2}$.

2345*. Demostrar que la siguiente igualdad es válida:

$$\int_0^x e^{zx}e^{-z^2}\,dz = e^{\frac{x^2}{4}} \int_0^x e^{-\frac{z^2}{4}}\,dz.$$

2346*. Demostrar que

$$\lim_{\omega\to\infty}\frac{e^{k\omega^2x^2}}{\int\limits_a^b e^{k\omega^2x^2}\,dx}=\begin{cases}0, & \text{si } x<b,\\ \infty, & \text{si } x=b\end{cases}\qquad (\omega>0,\ k>0,\ b>a>0).$$

§ 2. Métodos aproximados

En los ejercicios 2347—2349 efectuar los cálculos con exactitud hasta 0,001.

2347. El área de la cuarta parte de un círculo cuyo radio es igual a 1, es igual a $\frac{\pi}{4}$. Por otra parte, tomando un solo círculo cuyo centro se halla en el origen de coordenadas y cuya ecuación es $x^2+y^2=1$, y aplicando la integración para calcular el área de esta cuarta parte del círculo referido, obtenemos:

$$\frac{\pi}{4}=\int\limits_0^1\sqrt{1-x^2}\,dx,\ \text{o sea,}\ \pi=4\int\limits_0^1\sqrt{1-x^2}\,dx.$$

Aplicando las reglas de los rectángulos, de los trapecios y la de Simpson, calcular aproximadamente el número π dividiendo el intervalo de integración [0, 1] en 10 partes. Comparar los resultados obtenidos entre sí con el dato tabular del número π.

2348. Sabiendo que $\int\limits_0^1\frac{dx}{1+x^2}=\frac{\pi}{2}$, calcular aproximadamente el número π, dividiendo el intervalo de integración en 10 partes. Comparar los resultados obtenidos mediante distintas reglas, entre sí y con los del ejercicio anterior.

2349. Calcular $\ln 10=\int\limits_1^{10}\frac{dx}{x}$ para $n=10$, aplicando la regla de Simpson. Hallar el módulo de transición de los logaritmos naturales a los decimales. Comparar con los datos tabulares.

En los ejercicios 2350—2355, aplicando la fórmula de Simpson, calcular aproximadamente las integrales que no son susceptibles de ser halladas en forma finita con ayuda de las funciones elementales. El número n de los intervalos parciales está indicado entre paréntesis.

2350. $\int\limits_0^1\sqrt{1-x^3}\,dx\quad(n=10)$. **2351.** $\int\limits_0^1\sqrt{1+x^4}\,dx\quad(n=10)$.

2352. $\int\limits_{2}^{5} \frac{dx}{\ln x} \quad (n=6).$ **2353.** $\int\limits_{2}^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{\cos\varphi}\, d\varphi \quad (n=10).$

2354. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-0{,}1 \operatorname{sen}^2\varphi}\, d\varphi \quad (n=6).$

2355. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx \quad (n=10).$

2356. Usando la fórmula de Simpson, calcular la integral $\int\limits_{1,05}^{1,35} f(x)\, dx$, valiéndose de la siguiente tabla de los valores de la función $f(x)$:

x	1,05	1,10	1,15	1,20	1,25	1,30	1,35
$f(x)$	2,36	2,50	2,74	3,04	3,46	3,98	4,60

2357. Una recta toca a la orilla del río en los puntos A y B. Para calcular el área del terreno entre el río y la recta AB han sido tendidas 11 perpendiculares desde el río hasta AB cada 5 metros (la longitud de la recta AB resultó igual a 60 m). Las longitudes de dichas perpendiculares resultaron iguales a 3,28; 4,02; 4,64; 5,26; 4,98; 3,62; 3,82; 4,68; 5,26; 3,82; 3,24. Calcular el valor aproximado del área del terreno.

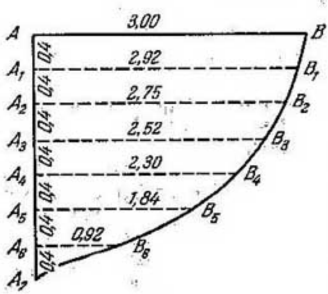

Fig. 39

2358. Calcular el área de la sección transversal de un barco tomando en consideración los siguientes datos (véase la fig. 39): $AA_1 = A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4 = A_4A_5 = A_5A_6 = A_6A_7 = 0{,}4$ m,

$$AB = 3 \text{ m},\ A_1B_1 = 2{,}92 \text{ m},\ A_2B_2 = 2{,}75 \text{ m},\ A_3B_3 = 2{,}52 \text{ m},$$
$$A_4B_4 = 2{,}30 \text{ m},\ A_5B_5 = 1{,}84 \text{ m},\ A_6B_6 = 0{,}92 \text{ m}.$$

2359. Para calcular el trabajo realizado por el vapor en una máquina de vapor, se calcula el área del diagrama de indicador, que es la representación gráfica de la dependencia que existe entre la presión del vapor en el cilindro y el recorrido del émbolo. La fig. 40 muestra el diagrama de indicador de una máquina de vapor. Las

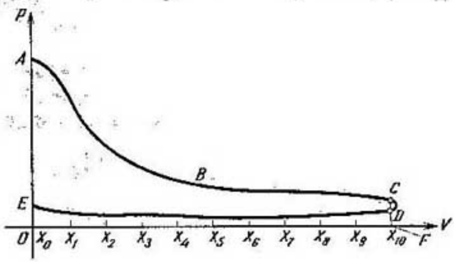

Fig. 40

ordenadas de los puntos de las líneas ABC y ED, que corresponden a las abscisas x_0, x_1, x_2, . . ., x_{10} vienen dadas en la siguiente tabla:

Abscisas . . .	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
Ordenadas de la línea ABC	60,6	53,0	32,0	24,4	19,9	17,0
Ordenadas de la línea ED	5,8	1,2	0,6	0,6	0,7	0,8

Abscisas . . .	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}
Ordenadas de la línea ABC	15,0	13,3	12,0	11,0	6,2
Ordenadas de la línea ED	0,9	1,0	1,3	1,8	5,7

Valiéndose de la fórmula de Simpson, calcular el área $ABCDE$. Las ordenadas son dadas en milímetros. La longitud $OF = 88{,}7$ mm (el punto F es la proyección común de los puntos C y D sobre el eje de abscisas).

En los ejercicios 2360—2363 conviene recurrir a los métodos aproximados para resolver las ecuaciones, cuando se buscan los límites de la integración.

2360. Hallar el área de la figura limitada por los arcos de las parábolas $y = x^3 - 7$ e $y = -2x^2 + 3x$ y por el eje de ordenadas.

2361. Hallar el área de la figura limitada por la parábola $y = x^3$ y la recta $y = 7(x + 1)$.

2362. Hallar el área de la figura limitada por la parábola $y = 16 - x^2$ y por la parábola semicúbica $y = -\sqrt[3]{x^2}$.

2363. Hallar el área de la figura limitada por las líneas $y = 4 - x^4$ e $y = \sqrt[3]{x}$.

2364. La fig. 41 muestra el diagrama de indicador (simplificado) de una máquina de vapor. Partiendo de las medidas indicadas en el diseño (en milímetros) calcular el área $ABCDO$, siendo la ecuación

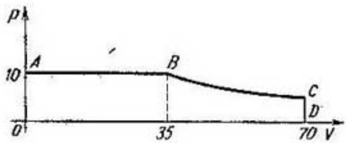

Fig. 41

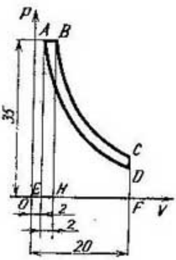

Fig. 42

de la línea BC: $pv^\gamma = \text{const}$ (la línea BC se llama *curva adiabática*), $\gamma = 1{,}3$. La línea AB es una recta paralela al eje Ov.

2365. La fig. 42 muestra el diagrama de indicador de un motor Diesel. El segmento AB corresponde al proceso de la combustión de la mezcla; la adiabata BC, a la expansión; el segmento CD, al escape y la adiabata DA, a la compresión. La ecuación de la adiabata BC es: $pv^{1,3} = \text{const}$, la ecuación de la adiabata AD es: $pv^{1,35} = \text{const}$. Partiendo de las medidas indicadas en el diseño (en mm) calcular el área $ABCD$.

§ 3. Integrales impropias

Integrales de límites infinitos

En los ejercicios 2366—2385 calcular las integrales impropias (o demostrar su divergencia).

2366. $\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x^4}$. **2367.** $\int\limits_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}}$.

2368. $\int\limits_{0}^{\infty} e^{-ax}\,dx \quad (a>0)$. **2369.** $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{2x\,dx}{x^2+1}$.

2370. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2}$. **2371.** $\int\limits_{2}^{\infty} \frac{\ln x}{x}\,dx$.

2372. $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{dx}{x^2(x+1)}$. **2373.** $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{x}{(1+x)^3}\,dx$.

2374. $\int\limits_{\sqrt{2}}^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$. **2375.** $\int\limits_{a^2}^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$.

2376. $\int\limits_{0}^{\infty} xe^{-x^2}\,dx$. **2377.** $\int\limits_{0}^{\infty} x^3e^{-x^2}\,dx$.

2378. $\int\limits_{0}^{\infty} x \operatorname{sen} x\,dx$. **2379.** $\int\limits_{0}^{\infty} e^{-\sqrt{x}}\,dx$.

2380. $\int\limits_{0}^{\infty} e^{-x} \operatorname{sen} x\,dx$. **2381.** $\int\limits_{0}^{\infty} e^{-ax}\cos bx\,dx$.

2382. $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2}\,dx$. **2383.** $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{dx}{1+x^3}$.

2384. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2}$. **2385.** $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{\sqrt{x}}{(1+x)^2}\,dx$.

En los ejercicios 2386—2393 analizar la convergencia de las integrales.

2386. $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{x}{x^3+1}\,dx$. **2387.** $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{x^3+1}{x^4}\,dx$. **2388.** $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{x^{13}}{(x^5+x^3+1)^3}\,dx$.

2389. $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{\ln(x^2+1)}{x}\,dx$. **2390.** $\int\limits_{0}^{\infty} \sqrt{x}\,e^{-x}\,dx$. **2391.** $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{x \operatorname{arctg} x}{\sqrt[3]{1+x^4}}\,dx$.

2392. $\int\limits_{e^2}^{\infty} \frac{dx}{x\ln\ln x}$. **2393.** $\int\limits_{e}^{\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^{\frac{3}{2}}}$.

Integrales de las funciones que tienen discontinuidades infinitas

En los ejercicios 2394—2411 calcular las integrales impropias (o demostrar su divergencia).

2394. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$. **2395.** $\int\limits_0^2 \frac{dx}{x^2-4x+3}$. **2396.** $\int\limits_1^2 \frac{x\,dx}{\sqrt{x-1}}$.

2397. $\int\limits_0^1 x \ln x\, dx$. **2398.** $\int\limits_0^{\frac{1}{e}} \frac{dx}{x \ln^2 x}$. **2399.** $\int\limits_1^2 \frac{dx}{x \ln x}$.

2400. $\int\limits_1^e \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$.

2401. $\int\limits_a^b \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$ $(a<b)$.

2402. $\int\limits_a^b \frac{x\,dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$ $(a<b)$. **2403.** $\int\limits_3^5 \frac{x^2\,dx}{\sqrt{(x-3)(5-x)}}$.

2404. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{1-x^2+2\sqrt{1-x^2}}$. **2405.** $\int\limits_{-1}^1 \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x^2}}$.

2406. $\int\limits_{-1}^1 \frac{3x^2+2}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx$. **2407.** $\int\limits_{-1}^1 \frac{x+1}{\sqrt[5]{x^3}}\,dx$. **2408.** $\int\limits_{-1}^1 \frac{x-1}{\sqrt[3]{x^5}}\,dx$.

2409. $\int\limits_{-1}^1 \frac{\ln(2+\sqrt[3]{x})}{\sqrt[3]{x}}\,dx$. **2410.** $\int\limits_{-1}^0 \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^3}\,dx$.

2411. $\int\limits_0^1 \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^3}\,dx$.

En los ejercicios 2412—2417 analizar la convergencia de las integrales.

2412. $\int\limits_0^1 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x^4}}\,dx$. **2413.** $\int\limits_0^1 \frac{x^2\,dx}{\sqrt[3]{(1-x^2)^5}}$. **2414.** $\int\limits_0^1 \frac{dx}{e^{\sqrt{x}}-1}$.

2415. $\int\limits_0^1 \frac{\sqrt{x}\,dx}{e^{\operatorname{sen} x}-1}$. **2416.** $\int\limits_0^1 \frac{dx}{e^x-\cos x}$. **2417.** $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ln \operatorname{sen} x}{\sqrt{x}}\,dx$.

Diversos problemas

2418. La función $f(x)$ es continua en el intervalo $[a, \infty)$ y $f(x) \to A \neq 0$ para $x \to \infty$. ¿Puede converger la integral $\int_a^\infty f(x)\,dx$?

2419. ¿Para qué valores de k la integral $\int_1^\infty x^k \frac{x+\operatorname{sen} x}{x-\operatorname{sen} x}\,dx$ será convergente?

2420. ¿Para qué valores de k convergen las integrales

$$\int_2^\infty \frac{dx}{x^k \ln x} \quad \text{y} \quad \int_2^\infty \frac{dx}{x(\ln x)^k}?$$

2421. ¿Para qué valores de k converge la integral $\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^k}$ $(b<a)$?

2422. ¿Sería posible hallar tal k para que converja la integral $\int_0^\infty x^k\,dx$?

2423. ¿Para qué valores de k y t converge la integral $\int_0^\infty \frac{x^k}{1+x^t}\,dx$?

2424. ¿Para qué valores de m converge la integral $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos x}{x^m}\,dx$?

2425. ¿Para qué valores de k converge la integral $\int_0^\pi \frac{dx}{\operatorname{sen}^k x}$?

En los ejercicios 2426—2435 calcular las integrales impropias.

2426. $\int_1^\infty \frac{dx}{x\sqrt{x-1}}$. **2427*.** $\int_{-1}^1 \ln\frac{1+x}{1-x}\frac{x^3\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

2428. $\int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg}(x-1)\,dx}{\sqrt[3]{(x-1)^4}}$.

2429. $\int_0^\infty \frac{dx}{(a^2+x^2)^n}$ (n es un entero positivo).

2430. $\int_0^\infty x^n e^{-x}\,dx$ (n es un entero positivo).

2431. $\int\limits_0^{\infty} x^{2n+1}e^{-x^2}\,dx$ (n es un entero positivo).

2432. $\int\limits_0^{1} (\ln x)^n\,dx$ (n es un entero positivo).

2433*. $\int\limits_0^{1} \frac{x^m\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$ para m: a) par; b) impar. $(m>0)$.

2434*. $\int\limits_0^{1} \frac{(1-x)^n}{\sqrt{x}}\,dx$ (n es un entero positivo).

2435. $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{(x-\cos\alpha)\sqrt{x^2-1}}$ $(0<\alpha<2\pi)$.

2436*. Demostrar que $\int\limits_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^4}=\int\limits_0^{\infty} \frac{x^2\,dx}{1+x^4}=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$.

2437*. Demostrar que $\int\limits_0^{\infty} \frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}\,dx=0$.

2438. Calcular la integral $\int\limits_1^{\infty} \frac{x^2-2}{x^3\sqrt{x^2-1}}\,dx$.

En los ejercicios 2439—2448 calcular las integrales aplicando las fórmulas

$$\int\limits_0^{\infty} e^{-x^2}\,dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2} \text{ (integral de Poisson)},$$

$$\int\limits_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx=\frac{\pi}{2} \text{ (integral de Dirichlet)}.$$

2439. $\int\limits_0^{\infty} e^{-ax^2}\,dx$ $(a>0)$.

2440. $\int\limits_0^{\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\,dx$. **2441*.** $\int\limits_0^{\infty} x^2e^{-x^2}\,dx$.

2442. $\int\limits_0^{\infty} x^{2n}e^{-x^2}\,dx$ (n es un entero positivo).

2443. $\int\limits_0^\infty \frac{\operatorname{sen} 2x}{x}\,dx.$ **2444.** $\int\limits_0^\infty \frac{\operatorname{sen} ax}{x}\,dx.$

2445. $\int\limits_0^\infty \frac{\operatorname{sen} ax \cos bx}{x}\,dx \quad (a>0,\ b>0).$

2446*. $\int\limits_0^\infty \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2}\,dx.$ **2447*.** $\int\limits_0^\infty \frac{\operatorname{sen}^3 x}{x}\,dx.$ **2448*.** $\int\limits_0^\infty \frac{\operatorname{sen}^4 x}{x^2}\,dx.$

2449*. Pongamos $\varphi(x) = -\int\limits_0^x \ln\cos y\,dy$. (Esta *integral* lleva el nombre *de Lobachevski*.) Demostrar la relación

$$\varphi(x) = 2\varphi\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right) - 2\varphi\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right) - x\ln 2.$$

Valiéndose de la relación hallada calcular la magnitud

$$\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\cos y\,dy$$

(por primera vez calculada por Euler).

En los ejercicios 2450—2454 calcular las integrales.

2450. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \operatorname{sen} x\,dx.$ **2451.** $\int\limits_0^{\pi} x \ln \operatorname{sen} x\,dx.$

2452*. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x \operatorname{ctg} x\,dx.$ **2453*.** $\int\limits_0^1 \frac{\operatorname{arcsen} x}{x}\,dx.$

2454. $\int\limits_0^1 \frac{\ln x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}.$

Capítulo VIII

Aplicaciones de la integral

§ 1. Algunos problemas de geometría y de estática

Area de la figura

2455. Calcular el área de la figura limitada por las líneas cuyas ecuaciones son $y^2 = 2x + 1$ y $x - y - 1 = 0$.

2456. Hallar el área de la figura comprendida entre la parábola $y = -x^2 + 4x - 3$ y las tangentes a ésta en los puntos $(0; -3)$ y $(3; 0)$.

2457. Calcular el área de la figura limitada por la parábola $y^2 = 2px$ y la normal a ésta inclinada hacia el eje de abscisas formándose entre ellos el ángulo de 135°.

2458. Calcular el área de la figura limitada por las parábolas $y = x^2$ e $y = \sqrt{x}$.

2459. Calcular el área de la figura limitada por las parábolas $y^2 + 8x = 16$ y $y^2 - 24x = 48$.

2460. Calcular el área de la figura limitada por las parábolas $y = x^2$ e $y = x^3/3$.

2461. La circunferencia $x^2 + y^2 = 8$ está dividida por la parábola $y = x^2/2$ en dos partes. Hallar las áreas de las dos figuras.

2462. Hallar las áreas de las figuras en las cuales la parábola $y^2 = 6x$ divide la circunferencia $x^2 + y^2 = 16$.

2463. De un círculo de radio a está cortada una elipse cuyo mayor eje coincide con uno de los diámetros del círculo y el menor es igual a $2b$. Demostrar que el área de la parte restante es igual al área de la elipse cuyos semiejes son a y $a - b$.

2464. Hallar el área de la figura limitada por el arco de una hipérbola y su cuerda trazada desde el foco perpendicularmente al eje real.

2465. La circunferencia $x^2 + y^2 = a^2$ está dividida por la hipérbola $x^2 - 2y^2 = a^2/4$ en tres partes. Calcular sus áreas.

2466. Calcular las áreas de las figuras curvilíneas formadas por la intersección de la elipse $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ y la hipérbola $\frac{x^2}{2} - y^2 = 1$.

2467. Calcular el área de la figura comprendida entre la línea $y = \frac{1}{1+x^2}$ y la parábola $y = \frac{x^2}{2}$.

2468. Calcular el área de la figura comprendida entre la línea $y = x(x-1)^2$ y el eje de abscisas.

2469. Calcular el área de la figura limitada por el eje de ordenadas y la línea $x = y^2(y-1)$.

2470. Hallar el área de una parte de la figura limitada por las líneas $y^m = x^n$ e $y^n = x^m$, donde m y n son enteros positivos. La parte buscada se halla en el primer cuadrante. Analizar la cuestión sobre el área total de la figura según los números m y n sean pares o impares.

2471. a) Calcular el área del trapecio mixtilíneo limitado por el eje de abscisas y la línea $y = x - x^2\sqrt{x}$.

b) Calcular el área de la figura limitada por dos ramas de la línea $(y-x)^2 = x^5$ y por la recta $x = 4$.

2472. Calcular el área de la figura limitada por la línea $(y - x - 2)^2 = 9x$ y los ejes de coordenadas.

2473. Hallar el área del lazo de la línea $y^2 = x(x-1)^2$.

2474. Hallar el área de la figura limitada por la línea cerrada $y^2 = (1-x^2)^3$.

2475. Hallar el área de la figura limitada por la línea cerrada $y^2 = x^2 - x^4$.

2476. Hallar el área de la figura limitada por la línea cerrada $x^4 - ax^3 + a^2y^2 = 0$.

2477. Hallar el área de la figura limitada por la línea $x^2y^2 = 4(x-1)$ y la recta que pasa por sus puntos de inflexión.

2478. Calcular el área de la figura limitada por las líneas $y = e^x$, $y = e^{-x}$ y la recta $x = 1$.

2479. Calcular el área del trapecio mixtilíneo limitado por la línea $y = (x^2 + 2x)e^{-x}$ y el eje de abscisas.

2480. Calcular el área del trapecio mixtilíneo limitado por la línea $y = e^{-x}(x^2 + 3x + 1) + e^2$, por el eje Ox y por dos rectas paralelas al eje Oy trazadas de manera que pasan por los puntos extremos de la función y.

2481. Hallar el área de la figura limitada por las líneas $y = 2x^2e^x$ e $y = -x^3e^x$.

2482. a) Calcular el área del trapecio mixtilíneo de base $[a, b]$, limitado por la línea $y = \ln x$.

b) Calcular el área de la figura limitada por la línea $y = \ln x$, por el eje de ordenadas y las rectas $y = \ln a$, $y = \ln b$.

2483. Calcular el área de la figura limitada por las líneas $y = \ln x$ e $y = \ln^2 x$.

2484. Calcular el área de la figura limitada por las líneas

$$y = \frac{\ln x}{4x}, \qquad y = x \ln x.$$

2485. Calcular el área de uno de los triángulos curvilíneos limitados por el eje de abscisas y las líneas $y = \operatorname{sen} x$ e $y = \cos x$.

2486. Calcular el área del triángulo curvilíneo limitado por el eje de ordenadas y las líneas $y = \operatorname{tg} x$ e $y = \frac{2}{3} \cos x$.

2487. Hallar el área de la figura limitada por la línea $y = \operatorname{sen}^3 x + \cos^3 x$ y por el segmento del eje de abscisas que une dos puntos sucesivos de la intersección de la línea citada con el eje de abscisas.

2488. Calcular el área de la figura limitada por el eje de abscisas y las líneas $y = \operatorname{arcsen} x$ e $y = \arccos x$.

2489. Hallar el área de la figura limitada por la línea cerrada $(y - \operatorname{arcsen} x)^2 = x - x^2$.

2490. Hallar el área de la figura limitada por un arco de la cicloide $x = a(t - \operatorname{sen} t)$, $y = a(1 - \cos t)$ y el eje de abscisas.

2491. Calcular el área de la figura limitada por la astroide $x = a \cos^3 t$, $y = a \operatorname{sen}^3 t$.

2492. Hallar el área de la figura limitada por la cardioide $x = 2a \cos t - a \cos 2t$, $y = 2a \operatorname{sen} t - a \operatorname{sen} 2t$.

2493. Hallar el área de la figura limitada por: 1) la epicicloide

$$x = (R + r) \cos t - r \cos \frac{R+r}{r} t, \quad y = (R + r) \operatorname{sen} t - r \operatorname{sen} \frac{R+r}{r} t;$$

2) la hipocicloide

$$x = (R - r) \cos t + r \cos \frac{R-r}{r} t, \quad y = (R - r) \operatorname{sen} t - r \operatorname{sen} \frac{R-r}{r} t$$

siendo $R = nr$ (n es un entero). Aquí R es el radio de la circunferencia inmóvil y r es el de la otra móvil; el centro de la circunferencia inmóvil coincide con el origen de coordenadas; t es el ángulo de rotación del radio trazado desde el centro de la circunferencia inmóvil al punto de contacto.

2494. Hallar el área del lazo de la línea:

$$1)\ x = 3t^2;\ y = 3t - t^3; \quad 2)\ x = t^2 - 1,\ y = t^3 - t.$$

2495. a) Calcular el área que describe el radio polar de la espiral de Arquímedes $\rho = a\varphi$ dando una revolución, si $\varphi = 0$ corresponde al comienzo del movimiento.

b) Calcular el área de la figura limitada por la segunda y la tercera espira de la espiral y por un segmento del eje polar.

2496. Hallar el área de la figura limitada por la línea $\rho = a \operatorname{sen} 2\varphi$ (rosa de dos pétalos).

2497. Hallar el área de la figura limitada por la línea $\rho = a \cos 5\varphi$.

2498. Hallar el área de la figura limitada por el caracol de Pascal $\rho = 2a(2 + \cos \varphi)$.

2499. Hallar el área de la figura limitada por la línea $\rho = a \operatorname{tg} \varphi$ $(a > 0)$ y la recta $\varphi = \pi/4$.

2500. Hallar el área de la parte común de las figuras limitadas por las líneas $\rho = 3 + \cos 4\varphi$ y $\rho = 2 - \cos 4\varphi$.

2501. Hallar el área de la parte de la figura limitada por la línea $\rho = 2 + \cos 2\varphi$, que se halla fuera de la línea $\rho = 2 + \operatorname{sen} \varphi$.

2502. Hallar el área de la figura limitada por la línea $\rho^2 = a^2 \cos n\varphi$ (n es un entero positivo).

2503. Mostrar que el área de la figura limitada por cualesquiera dos radios polares de la espiral hiperbólica $\rho\varphi = a$ y su arco, es proporcional a la diferencia de estos radios.

2504. Mostrar que el área de la figura limitada por cualesquiera radios polares de la espiral logarítmica $\rho = ae^{m\varphi}$ y su arco, es proporcional a la diferencia de los cuadrados de estos radios.

2505*. Hallar el área de la figura comprendida entre la parte externa e interna de la línea

$$\rho = a \operatorname{sen}^3 \frac{\varphi}{3}.$$

2506. Calcular el área de la figura limitada por la línea

$$\rho = \sqrt{1-t^2}, \quad \varphi = \arcsen t + \sqrt{1-t^2}.$$

En los ejercicios 2507—2511 conviene haber pasado a las coordenadas polares y luego efectuar los cálculos.

2507. Hallar el área de la figura limitada por la lemniscata de Bernoulli $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$.

2508. Hallar el área de la parte de la figura limitada por la lemniscata de Bernoulli (véase el ejercicio anterior) que se halla dentro de la circunferencia $x^2 + y^2 = a^2/2$.

2509. Hallar el área de la figura limitada por la línea $(x^2 + y^2)^2 - a^2x^2 - b^2y^2 = 0$.

2510. Hallar el área de la figura limitada por la línea

$$(x^2 + y^2)^3 = 4a^2xy(x^2 - y^2).$$

2511. Calcular el área de la figura limitada por la línea $x^4 + y^4 = x^2 + y^2$.

2512. Calcular el área de la figura comprendida entre la línea $y = \frac{1}{1+x^2}$ y su asíntota.

2513. Hallar el área de la figura comprendida entre la línea $y = xe^{-\frac{x^2}{2}}$ y su asíntota.

2514. Hallar el área de la figura comprendida entre la cisoide $y^2 = \frac{x^3}{2a-x}$ y su asíntota.

2515. Hallar el área de la figura comprendida entre la línea $xy^2 = 8 - 4x$ y su asíntota.

2516*. 1) Calcular el área de la figura limitada por la línea $y = x^2e^{-x^2}$ y su asíntota.

2) Calcular el área de la figura limitada por la línea $y^2 = xe^{-2x}$.

2517. Hallar el área de la figura comprendida entre la tractriz $x = a\left(\cos t + \ln \operatorname{tg} \frac{t}{2}\right)$, $y = a \operatorname{sen} t$ y el eje de abscisas.

2518. Hallar el área del lazo y la de la figura comprendida entre la línea $\rho = \frac{\cos 2\varphi}{\cos \varphi}$ y su asíntota.

*Longitud de la línea **

2519. Calcular la longitud del arco de la catenaria $y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$ (desde $x_1 = 0$ hasta $x_2 = b$).

2520. Hallar la longitud del arco de la parábola $y^2 = 2px$ desde el vértice hasta el punto $M(x, y)$. (Como la variable independiente ha de ser tomada y.)

2521. Hallar la longitud del arco de la línea $y = \ln x$ (desde $x_1 = \sqrt{3}$ hasta $x_2 = \sqrt{8}$).

2522. Hallar la longitud del arco de la línea $y = \ln(1 - x^2)$ $\left(\text{desde } x_1 = 0 \text{ hasta } x_2 = \frac{1}{2}\right)$.

2523. Hallar la longitud del arco de la línea $y = \ln \frac{e^x + 1}{e^x - 1}$ (desde $x_1 = a$ hasta $x_2 = b$).

2524. Calcular la longitud del arco de la parábola semicúbica $y^2 = \frac{2}{3}(x - 1)^3$ comprendida dentro de la parábola $y^2 = \frac{x}{3}$.

2525. Calcular la longitud del arco de la parábola semicúbica $5y^3 = x^2$ comprendida dentro de la circunferencia $x^2 + y^2 = 6$.

2526. Calcular la longitud del lazo de la línea $9ay^2 = x(x - 3a)^2$.

* En los ejercicios en que se calculan las longitudes de los arcos, en caso necesario, los paréntesis llevan indicaciones sobre el intervalo de variación de la variable independiente el cual corresponde al arco rectificable.

2527. Hallar el perímetro de uno de los triángulos curvilíneos limitados por el eje de abscisas y por las líneas $y = \ln \cos x$ e $y = \ln \operatorname{sen} x$.

2528. Hallar la longitud del arco de la línea $x = \frac{x^2}{4} - \frac{\ln x}{2}$ comprendido entre su punto más inferior y el vértice (el punto de la línea que tiene la curvatura extrema).

2529. Hallar la longitud de la línea $y = \sqrt{x - x^2} + \arcsin \sqrt{x}$.

2530. Hallar la longitud de la línea $(y - \arcsin x)^2 = 1 - x^2$.

2531. Hallar un punto de la cicloide $x = a(t - \operatorname{sen} t)$, $y = a(1 - \cos t)$ el cuál divida la longitud de su primer arco en razón de $1 : 3$.

2532. Sean dados la astroide $x = R\cos^3 t$, $y = R \operatorname{sen}^3 t$ y los puntos en ella $A(R, 0)$, $B(0, R)$. En el arco $\overset{\frown}{AB}$ hallar el punto M tal que la longitud del arco $\overset{\frown}{AM}$ constituya la cuarta parte de la longitud del arco $\overset{\frown}{AB}$.

2533*. Hallar la longitud de la línea $\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}} = 1$.

2534. Hallar la longitud de la línea $x = a\cos^5 t$, $y = a \operatorname{sen}^5 t$.

2535. Hallar la longitud del arco de la tractriz

$$x = a\left(\cos t + \ln \operatorname{tg} \frac{t}{2}\right), \qquad y = a \operatorname{sen} t$$

desde su punto $(0, a)$ hasta su punto (x, y).

2536. Hallar la longitud del arco de la evolvente de la circunferencia

$$x = R(\cos t + t \operatorname{sen} t), \qquad y = R(\operatorname{sen} t - t\cos t)$$

(desde $t_1 = 0$ hasta $t_2 = \pi$).

2537. Calcular la longitud del arco de la línea

$$x = (t^2 - 2)\operatorname{sen} t + 2t\cos t,$$
$$y = (2 - t^2)\cos t + 2t \operatorname{sen} t$$

(desde $t_1 = 0$, hasta $t_2 = \pi$).

2538. Hallar la longitud del lazo de la línea $x = t^2$, $y = t - \frac{t^3}{3}$.

2539. Dos circunferencias de radios iguales a b, ruedan, sin resbalar, con velocidad angular igual, sobre una circunferencia de radio a, por dentro y por fuera de ésta. En el momento $t = 0$ tocan el punto M de la circunferencia inmóvil con sus puntos M_1 y M_2. Mostrar que la relación de las distancias recorridas por los puntos M_1 y M_2 en cualquier lapso de tiempo, es constante e igual a $\frac{a+b}{a-b}$ (véase el ejercicio 2493).

2540. Demostrar que la longitud del arco de la línea

$$x = f''(t)\cos t + f'(t)\operatorname{sen} t,$$
$$y = -f''(t)\operatorname{sen} t + f'(t)\cos t$$

correspondiente al intervalo (t_1, t_2), es igual a $[f(t) + f''(t)]\big|_{t_1}^{t_2}$.

2541. Aplicar el resultado del ejercicio anterior para calcular la longitud del arco de la línea $x = e^t(\cos t + \operatorname{sen} t)$, $y = e^t(\cos t - \operatorname{sen} t)$ (desde $t_1 = 0$ hasta $t_2 = t$).

2542. Demostrar que los arcos de las líneas

$$x = f(t) - \varphi'(t), \qquad y = \varphi(t) + f'(t)$$

y

$$x = f'(t)\operatorname{sen} t - \varphi'(t)\cos t,$$
$$y = f'(t)\cos t + \varphi'(t)\operatorname{sen} t$$

correspondientes a un mismo intervalo de variación del parámetro t tienen longitudes iguales.

2543. Hallar la longitud del arco de la espiral de Arquímedes $\rho = a\varphi$ desde el principio hasta el final de la primera espira.

2544. Demostrar que el arco de la parábola $y = \frac{1}{2p}x^2$ correspondiente al intervalo $0 \leqslant x \leqslant a$, tiene la misma longitud que el arco de la espiral $\rho = p\varphi$, correspondiente al intervalo $0 \leqslant \rho \leqslant a$.

2545. Calcular la longitud del arco de la espiral hiperbólica $\rho\varphi = 1$ (desde $\varphi_1 = 3/4$ hasta $\varphi_2 = 4/3$).

2546. Hallar la longitud de la cardioide $\rho = a(1 + \cos\varphi)$.

2547. Hallar la longitud de la línea $\rho = a \operatorname{sen}^3 \frac{\varphi}{3}$ (véase el ejercicio 2505).

2548. Demostrar que la longitud de la línea $\rho = a \operatorname{sen}^m \frac{\varphi}{m}$ (m es un entero) es conmensurable con a cuando m es un número par y conmensurable con la longitud de la circunferencia de radio a cuando m es impar.

2549. ¿Para qué valores del exponente k ($k \neq 0$) la longitud de la línea $y = ax^k$ viene expresada en funciones elementales? (Conviene partir del teorema de Chebishev sobre los casos de integrabilidad del binomio diferencial.)

2550. Hallar la longitud de la línea dada por la ecuación:

$$y = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{x} \sqrt{\cos x}\, dx.$$

2551. Calcular la longitud del arco de la línea

$$x = \int_1^t \frac{\cos z}{z}\,dz, \qquad y = \int_1^t \frac{\operatorname{sen} z}{z}\,dz$$

desde el origen de coordenadas hasta el punto más próximo que tenga la tangente vertical.

2552. Demostrar que la longitud del arco de la sinusoide $y = \operatorname{sen} x$ correspondiente al período del seno, es igual a la longitud de la elipse cuyos semiejes son iguales a $\sqrt{2}$ y 1.

2553. Mostrar que la longitud del arco de la cicloide «acortada» o «alargada» $x = mt - n \operatorname{sen} t$, $y = m - n \cos t$ (m y n son números positivos) en el intervalo desde $t_1 = 0$ hasta $t_2 = 2\pi$ es igual a la de la elipse cuyos semiejes son $a = m + n$, $b = |m - n|$.

2554*. Demostrar que la longitud de la elipse de semiejes a y b satisface las desigualdades $\pi(a + b) < L < \pi\sqrt{2}\cdot\sqrt{a^2 + b^2}$ (problema de I. Bernoulli).

Volumen del cuerpo

2555. Calcular el volumen del cuerpo limitado por la superficie engendrada por la revolución de la parábola $y^2 = 4x$ alrededor de su eje (paraboloide de revolución) y por el plano perpendicular a su eje que dista una unidad del vértice de la parábola.

2556. Una elipse cuyo eje mayor es de $2a$ y el menor, de $2b$ gira alrededor: 1) del eje mayor; 2) del eje menor. Hallar el volumen de los elipsoides de revolución engendrados. En caso particular calcular el volumen de la esfera.

2557. Un segmento parabólico simétrico cuya base es igual a a y la altura, h, gira alrededor de su base. Calcular el volumen del cuerpo de revolución engendrado («limón» de Cavalieri).

2558. Una figura limitada por la hipérbola $x^2 - y^2 = a^2$ y la recta $x = a + h$ ($h > 0$), gira alrededor del eje de abscisas. Hallar el volumen del cuerpo de revolución.

2559. Un trapecio mixtilíneo limitado por la línea $y = xe^x$ y las rectas $x = 1$, $y = 0$, gira alrededor del eje de abscisas. Hallar el volumen del cuerpo engendrado.

2560. La catenaria $y = \operatorname{ch} x$ gira alrededor del eje de abscisas siendo engendrada una superficie llamada *catenoide*. Hallar el volumen del cuerpo limitado por la catenoide y dos planos que distan a y b unidades desde el origen y que son perpendiculares al eje de abscisas.

2561. Una figura limitada por los arcos de las parábolas $y = x^2$ e $y^2 = x$, gira alrededor del eje de abscisas. Calcular el volumen del cuerpo engendrado.

2562. Hallar el volumen del cuerpo engendrado por la revolución alrededor del eje de abscisas del trapecio que se halla situado encima del eje Ox y que viene limitado por la línea $(x-4)\,y^2 = x\,(x-3)$.

2563. Hallar el volumen del cuerpo engendrado por la revolución alrededor del eje Ox del trapecio mixtilíneo limitado por la línea $y = \operatorname{arcsen} x$ y cuya base es $[0, 1]$.

2564. Calcular el volumen del cuerpo engendrado por la revolución alrededor del eje de ordenadas de la figura limitada por la parábola $y = 2x - x^2$ y el eje de abscisas.

2565. Calcular el volumen del cuerpo engendrado por el trapecio mixtilíneo que gira alrededor del eje de ordenadas y que está limitado por el arco de la sinusoide $y = \operatorname{sen} x$ correspondiente al semiperíodo.

2566. La lemniscata $(x^2 + y^2)^2 = a^2\,(x^2 - y^2)$ gira alrededor del eje de abscisas. Hallar el volumen del cuerpo limitado por la superficie engendrada.

2567. Calcular el volumen del cuerpo engendrado por la figura que gira alrededor del eje de abscisasas y está limitada por la línea: 1) $x^4 + y^4 = a^2x^2$; 2) $x^4 + y^4 = x^3$.

2568. Un arco de la cicloide $x = a\,(t - \operatorname{sen} t)$, $y = a\,(1 - \cos t)$ gira alrededor de su base. Calcular el volumen del cuerpo limitado por la superficie engendrada.

2569. La figura limitada por un arco de la cicloide (véase el ejercicio anterior) y por la base de ésta, gira alrededor de la recta perpendicular al centro de la base (eje de simetría). Hallar el volumen del cuerpo engendrado.

2570. Hallar el volumen del cuerpo engendrado por la revolución de la astroide $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ alrededor de su eje de simetría.

2571. La figura limitada por el arco de la línea $x = \frac{c^2}{a}\cos^3 t$, $y = \frac{c^2}{b}\operatorname{sen}^3 t$ (evoluta de la elipse) situada en el primer cuadrante, y por los ejes de coordenadas, gira alrededor del eje de abscisas. Hallar el volumen del cuerpo engendrado.

2572. Calcular el volumen del cuerpo limitado por la superficie del huso infinito engendrado por la revolución de la línea $y = \frac{1}{1+x^2}$ alrededor de su asíntota.

2573. La línea $y^2 = 2exe^{-2x}$ gira alrededor de su asíntota. Hallar el volumen del cuerpo limitado por la superficie engendrada.

2574*. 1) La figura limitada por la línea $y = e^{-x^2}$ y la asíntota de ésta gira alrededor del eje de ordenadas. Calcular el volumen del cuerpo engendrado.

2) La misma figura gira alrededor del eje de abscisas. Hallar el volumen del cuerpo engendrado.

2575*. Calcular el volumen del cuerpo limitado por la superficie engendrada al girar la línea $y = x^2e^{-x^2}$ alrededor de su asíntota.

2576*. La figura limitada por la línea $y = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$ y el eje de abscisas, gira alrededor del eje de abscisas. Calcular el volumen del cuerpo engendrado.

2577*. Hallar el volumen del cuerpo limitado por la superficie engendrada al girar la cisoide $y^2 = \frac{x^3}{2a-x}$ $(a > 0)$ alrededor de su asíntota.

2578. Hallar el volumen del cuerpo limitado por la superficie engendrada al girar la tractriz $x = a\left(\cos t + \ln \operatorname{tg} \frac{t}{2}\right)$, $y = a \operatorname{sen} t$ alrededor de su asíntota.

2579*. Calcular el volumen del cuerpo limitado por el elipsoide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

2580. 1) Calcular el volumen del cuerpo limitado por el paraboloide elíptico $z = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2}$ y el plano $z = 1$.

2) Hallar el volumen del cuerpo limitado por el hiperboloide de una hoja $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - z^2 = 1$ y por los planos $z = -1$ y $z = 2$.

2581. Calcular los volúmenes de los cuerpos limitados por el paraboloide $z = x^2 + 2y^2$ y el elipsoide $x^2 + 2y^2 + z^2 = 6$.

2582. Hallar los volúmenes de los cuerpos engendrados al cortarse el hiperboloide de dos hojas $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{9} = 1$ y el elipsoide $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1$.

2583. Hallar el volumen del cuerpo limitado por la superficie cónica $(z-2)^2 = \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2}$ y el plano $z = 0$.

2584. Calcular el volumen del cuerpo limitado por el paraboloide $2z = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}$ y el cono $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = z^2$.

2585*. Hallar el volumen del cuerpo cortado de un cilindro circular por el plano que pasa por el diámetro de la base («segmento cilíndrico», véase la fig. 43). En particular, poner $R = 10$ cm y $H = 6$ cm.

2586. Un cilindro parabólico está cortado por dos planos uno de los cuales es perpendicular a la generatriz. Como resultado se obtiene un cuerpo mostrado en la fig. 44. La base común de los segmentos parabólicos es $a = 10$ cm, la altura del mismo segmento que

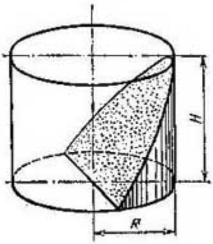

Fig. 43

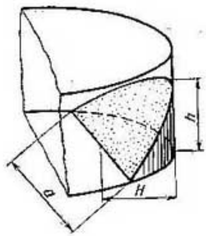

Fig. 44

está en la base, es $H = 8$ cm, la altura del cuerpo h es de 6 cm. Calcular el volumen del cuerpo.

2587. Un cilindro cuya base es una elipse está cortado por un plano inclinado que pasa por el eje menor de la elipse. Calcular el

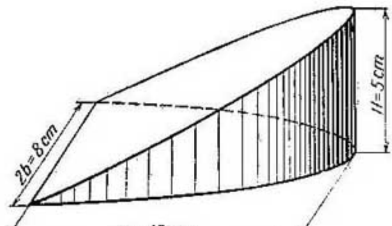

Fig. 45

volumen del cuerpo engendrado. La fig. 45 presenta las dimensiones lineales.

2588*. En todas las cuerdas de un círculo de radio R paralelas a una misma dirección están construidos segmentos parabólicos simétricos de altura constante H. Los planos de éstos son perpendiculares al plano de la circunferencia. Hallar el volumen del cuerpo engendrado de esta manera.

2589. Un cono circular recto de radio R y de altura H está cortado en dos partes por un plano que pasa por el centro de la base paralelamente a la generatriz (véase la fig. 46). Hallar los volúmenes de las dos partes del cono. (Las secciones del cono por los planos paralelos a la generatriz son segmentos parabólicos.)

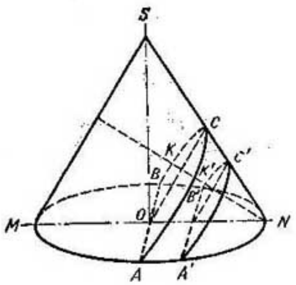

Fig. 46

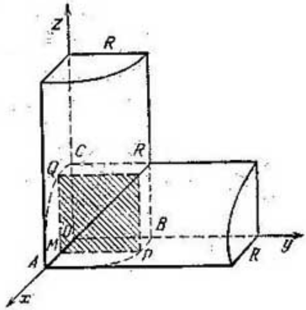

Fig. 47

2590. El centro de un cuadrado de dimensiones variables se desplaza a lo largo del diámetro de un círculo de radio a. Al mismo tiempo el plano en que se halla el cuadrado sigue siendo perpendicular al del círculo y dos vértices opuestos del cuadrado se desplazan sobre la circunferencia. Hallar el volumen del cuerpo engendrado por este cuadrado que se halla en movimiento.

2591. Un círculo de radio variable se desplaza de tal modo que uno de los puntos de su circunferencia sigue en el eje de abscisas, mientras que su centro avanza sobre la circunferencia $x^2 + y^2 = r^2$, y el plano del mismo es perpendicular al eje de abscisas. Hallar el volumen del cuerpo engendrado.

2592. Los ejes de dos cilindros iguales se cortan formando el ángulo recto. Hallar el volumen del cuerpo que forma parte común del

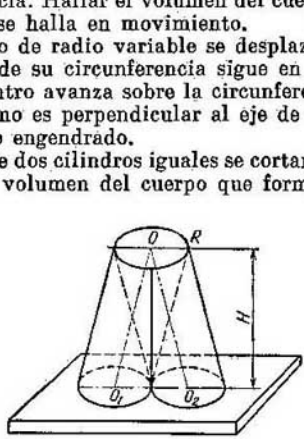

Fig. 48

cilindro (la fig. 47 presenta 1/8 del cuerpo). (Examinar las secciones engendradas por los planos paralelos a los ejes de los dos cilindros).

2593. Dos cilindros inclinados tienen la misma altura H, la base superior común de radio R y sus bases inferiores se tocan (véase la fig. 48). Hallar el volumen de la parte común de los cilindros.

Area de la superficie de revolución

2594. Hallar el área de la superficie engendrada por la revolución de la parábola $y^2 = 4ax$ alrededor del eje de abscisas desde el vértice hasta el punto cuya abscisa es $x = 3a$.

2595. Calcular el área de la superficie engendrada por la revolución de la parábola cúbica $3y - x^3 = 0$ alrededor del eje de abscisas (desde $x_1 = 0$ hasta $x_2 = a$).

2596. Calcular el área de la catenoide, superficie engendrada por la revolución de la catenaria $y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$ alrededor del eje de abscisas (desde $x_1 = 0$ hasta $x_2 = a$).

2597. Al girar la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ alrededor de su eje mayor es engendrada la superficie llamada elipsoide alargado de revolución, mientras cuando gira alrededor de su eje menor es engendrada la superficie llamada elipsoide acortado de revolución. Hallar las áreas de las superficies de los elipsoides alargado y acortado.

2598. Calcular el área de la superficie fusiforme engendrada por la revolución de un arco de la sinusoide $y = \operatorname{sen} x$ alrededor del eje de abscisas.

2599. El arco del tangensoide $y = \operatorname{tg} x$ desde su punto $(0, 0)$ hasta su punto $(\pi/4, 1)$ gira alrededor del eje de abscisas. Calcular el área de la superficie engendrada.

2600. Hallar el área de la superficie engendrada por la revolución alrededor del eje de abscisas del lazo de la línea $9ay^2 = x(3a - x)^2$.

2601. El arco de la circunferencia $x^2 + y^2 = a^2$ que se halla en el primer cuadrante gira alrededor de la cuerda que lo subtiende. Calcular el área de la superficie engendrada.

2602. Hallar el área de la superficie engendrada por la revolución alrededor del eje de abscisas del arco de la línea $x = e^t \operatorname{sen} t$, $y = e^t \cos t$ desde $t_1 = 0$ hasta $t_2 = \pi/2$.

2603. Hallar el área de la superficie engendrada por la revolución de la astroide $x = a \cos^3 t$, $y = a \operatorname{sen}^3 t$ alrededor del eje de abscisas.

2604. El arco de la cicloide gira alrededor de su eje de simetría. Hallar el área de la superficie engendrada (véase el ejercicio 2568).

2605. Hallar el área de la superficie engendrada por la revolución de la cardioide $\rho = a(1 + \cos\varphi)$ alrededor de su eje polar.

2606. La circunferencia $\rho = 2r \operatorname{sen} \varphi$ gira alrededor del eje polar. Hallar el área de la superficie engendrada.

2607. La lemniscata $\rho^2 = a^2 \cos 2\varphi$ gira alrededor del eje polar. Hallar el área de la superficie engendrada.

2608. El arco infinito de la línea $y = e^{-x}$ correspondiente a los valores positivos de x, gira alrededor del eje de abscisas. Calcular el área de la superficie engendrada.

2609. La tractriz $x = a\left(\cos t + \ln \operatorname{tg} \frac{t}{2}\right)$, $y = a \operatorname{sen} t$ gira alrededor del eje de abscisas. Hallar el área de la superficie infinita engendrada.

Momentos y centro de gravedad)*

2610. Calcular el momento estático de un rectángulo de base a y la altura h con respecto a su base.

2611. Calcular el momento estático de un triángulo rectángulo isósceles cuyos catetos son iguales a a, con respecto a cada uno de sus lados.

2612. Demostrar que se verifica la siguiente fórmula:

$$\int_a^b (ax+b) f(x)\, dx = (a\xi + b) \int_a^b f(x)\, dx,$$

donde ξ es la abscisa del centro de gravedad del trapecio mixtilíneo de base $[a, b]$ limitado por la línea $y = f(x)$.

2613. Hallar el centro de gravedad de un segmento parabólico de base a y la altura h.

2614. Un rectángulo de lados a y b está dividido en dos partes por el arco de una parábola cuyo vértice coincide con uno de los vértices del rectángulo y que pasa por el vértice opuesto de éste (véase la fig. 49). Hallar el centro de gravedad de las dos partes S_1 y S_2 del rectángulo.

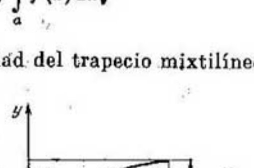

Fig. 49

2615. Hallar las coordenadas del centro de gravedad de la semicircunferencia $y = \sqrt{r^2 - x^2}$.

* En todos los ejercicios de esta parte (2610—2662) la densidad se toma igual a 1.

2616. Hallar las coordenadas del centro de gravedad del semicírculo limitado por el eje de abscisas y la semicircunferencia $y = \sqrt{r^2 - x^2}$.

2617. Hallar el centro de gravedad del arco de la circunferencia de radio R, el cual subtiende el ángulo central α.

2618. Hallar las coordenadas del centro de gravedad de la figura limitada por los ejes de coordenadas y la parábola $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$.

2619. Hallar las coordenadas del centro de gravedad de la figura limitada por los ejes de coordenadas y el arco de la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ que se halla en el primer cuadrante.

2620. Hallar el momento estático del arco de la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ el cual se halla en el primer cuadrante, con respecto al eje de abscisas.

2621. Hallar las coordenadas del centro de gravedad de la figura limitada por el arco de la sinusoide $y = \operatorname{sen} x$ y el segmento del eje de abscisas (desde $x_1 = 0$ hasta $x_2 = \pi$).

En los ejercicios 2622—2624 hallar el momento estático de la figura limitada por las líneas dadas, con respecto al eje de abscisas.

2622. $y = \frac{2}{1+x^2}$ e $y = x^2$,

2623. $y = \operatorname{sen} x$ e $y = \frac{1}{2}$ (para un segmento).

2624. $y = x^2$ e $y = \sqrt{x}$.

2625. Hallar las coordenadas del centro de gravedad de la figura limitada por la línea cerrada $y^2 = ax^3 - x^4$.

2626. Hallar las coordenadas del centro de gravedad del arco de la catenaria $y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$ comprendida entre los puntos cuyas abscisas son $x_1 = -a$ y $x_2 = a$.

2627. Demostrar que el momento estático de un arco cualquiera de la parábola, con respecto al eje de la misma, es proporcional a la diferencia de los radios de curvatura en los puntos extremos del arco. El coeficiente de proporcionalidad es igual a $p/3$, donde p es el parámetro de la parábola.

2628. Hallar las coordenadas del centro de gravedad del primer arco de la cicloide $x = a(t - \operatorname{sen} t)$, $y = a(1 - \cos t)$.

2629. Hallar las coordenadas del centro de gravedad de la figura limitada por el primer arco de una cicloide y el eje de abscisas.

2630. Hallar las coordenadas del centro de gravedad del arco de la astroide $x = a \cos^3 t$, $y = a \operatorname{sen}^3 t$ el cual se halla en el primer cuadrante.

2631. Hallar las coordenadas del centro de gravedad de la figura limitada por los ejes de coordenadas y el arco de una astroide el cual se halla en el primer cuadrante.

2632. Demostrar que la asbcisa y la ordenada del centro de gravedad del sector limitado por dos radios polares y por la línea cuya ecuación se da en las cooredenadas polares $\rho = \rho(\varphi)$, vienen expresadas del modo siguiente:

$$x = \frac{2}{3}\,\frac{\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho^3 \cos\varphi\, d\varphi}{\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho^2\, d\varphi}, \qquad y = \frac{2}{3}\,\frac{\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho^3 \operatorname{sen}\varphi\, d\varphi}{\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho^2\, d\varphi}.$$

2633. Hallar las coordenadas cartesianas del centro de gravedad del sector limitado por una semiespira de la espiral de Arquímedes $\rho = a\varphi$ (desde $\varphi_1 = 0$ hasta $\varphi_2 = \pi$).

2634. Hallar el centro de gravedad de un sector circular de radio R cuyo ángulo central es igual a 2α.

2635. Hallar las coordenadas cartesianas del centro de gravedad de la figura limitada por la cardioide $\rho = a(1 + \cos\varphi)$.

2636. Hallar las coordenadas cartesianas del centro de gravedad de la figura limitada por el lazo derecho de la lemniscata de Bernoulli $\rho^2 = a^2 \cos 2\varphi$.

2637. Mostrar que las coordenadas cartesianas del centro de gravedad del arco de la línea cuya ecuación es dada en las coordenadas polares $\rho = \rho(\varphi)$, vienen expresadas del modo siguiente:

$$y = \frac{\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho\cos\varphi\sqrt{\rho^2+\rho'^2}\, d\varphi}{\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi 2} \sqrt{\rho^2+\rho'^2}\, d\varphi}, \qquad y = \frac{\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho \operatorname{sen}\varphi\sqrt{\rho^2+\rho'^2}\, d\varphi}{\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{\rho^2+\rho'^2}\, d\varphi}.$$

2638. Hallar las coordenadas cartesianas del centro de gravedad del arco de la espiral logarítmica $\rho = ae^{\varphi}$ (desde $\varphi_1 = \pi/2$ hasta $\varphi_2 = \pi$).

2639. Hallar las coordenadas cartesianas del centro de gravedad del arco de la cardioide $\rho = a(1 + \cos\varphi)$ (desde $\varphi_1 = 0$ hasta $\varphi_2 = \pi$).

2640. ¿A qué distancia del centro geométrico se halla el centro de gravedad de la semiesfera de radio R?

2641. Hallar el centro de gravedad de la superficie de la semiesfera.

2642. Sea dado un cono circular recto cuyo radio de base es R y la altura H. Hallar la distancia que media entre la base del cono y el centro de gravedad de su superficie lateral, de su superficie total y de su volumen.

2643. ¿Qué distancia media entre la base y el centro de gravedad de un cuerpo, de altura h, limitado por un paraboloide de revolución y un plano perpendicular a su eje?

2644. Hallar el momento de inercia del segmento $AB = l$ con respecto al eje que se halla en el mismo plano. El extremo A del segmento dista a unidades del eje, el extremo B del segmento dista b unidades del eje.

2645. Hallar el momento de inercia de una circunferencia de radio R con respecto a su diámetro.

2646. Hallar el momento de inercia del arco de la línea $y = e^x \left(0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}\right)$, con respecto al eje de abscisas.

2647. Calcular el momento de inercia, con respecto a los dos ejes de las coordenadas, de un arco de la cicloide $x = a(t - \operatorname{sen} t)$, $y = a(1 - \cos t)$.

2648. Hallar el momento de inercia de un rectángulo de lados a y b con respecto a su lado a.

2649. Hallar el momento de inercia de un triángulo de base a y la altura h con respecto a:

1) la base;

2) la recta que siendo paralela a la base pasa por el vértice;

3) la recta que siendo paralela a la base, pasa por el centro de gravedad del triángulo.

2650. Hallar el momento de inercia de un semicírculo de radio R, con respecto a su diámetro.

2651. Hallar el momento de inercia de un círculo de radio R, con respecto a su centro.

2652. Hallar el momento de inercia de una elipse de semiejes a y b, con respecto a los dos ejes de la misma.

2653. Hallar el momento de inercia de un cilindro cuyo radio de base es igual a R y la altura H, con respecto a su eje.

2654. Hallar el momento de inercia de un cono cuyo radio de base es igual a R, la altura H, con respecto a su eje.

2655. Hallar el momento de inercia de una esfera de radio R, con respecto a su diámetro.

2656. Una elipse gira alrededor de uno de sus ejes. Hallar el momento de inercia del cuerpo engendrado (elipsoide de revolución), con respecto al eje de su revolución.

2657. Hallar el momento de inercia, con respecto al eje de revolución, de un paraboloide de revolución cuyo radio de base es R y la altura, H.

2658. Calcular el momento de inercia, con respecto al eje Oz, del cuerpo limitado por el hiperboloide de una hoja $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{x} - z^2 = 1$ y los planos $z = 0$ y $z = 1$.

2659. El trapecio mixtilíneo limitado por las líneas $y = e^x$, $y = 0$, $x = 0$ y $x = 1$ gira alrededor

1) del eje Ox, 2) del eje Oy.

Calcular el momento de inercia del cuerpo engendrado, con respecto al eje de revolución.

2660. Hallar el momento de inercia de la superficie lateral de un cilindro cuyo radio de base es R y la altura, H, con respecto a su eje.

2661. Hallar el momento de inercia de la superficie lateral de un cono cuyo radio de base es R y la altura, H, con respecto a su eje.

2662. Hallar el momento de inercia de la superficie de una esfera de radio R, con respecto a su diámetro.

Teoremas de Guldin

2663. Un hexágono regular, de lado a, gira alrededor de uno de sus lados. Hallar el volumen del cuerpo engendrado.

2664. Una elipse cuyos ejes son $AA_1 = 2a$ y $BB_1 = 2b$ gira alrededor de una recta paralela al eje AA_1, que dista $3b$ del mismo. Hallar el volumen del cuerpo engendrado.

2665. Una astroide gira alrededor de una recta que atraviesa dos picos contiguos. Hallar el volumen y la superficie del cuerpo engendrado (véase el ejercicio 2630).

2666. La figura engendrada por los primeros arcos de las cicloides

$$x = a\,(t - \operatorname{sen} t), \qquad y = a\,(1 - \cos t)$$

y

$$x = a\,(t - \operatorname{sen} t), \qquad y = -a\,(1 - \cos t)$$

gira alrededor del eje de ordenadas. Hallar el volumen y la superficie del cuerpo engendrado.

2667. Un cuadrado gira alrededor de una recta que se halla en el mismo plano pasando por uno de sus vértices. ¿Cuál ha de ser la posición de la recta respecto al cuadrado para que el volumen del cuerpo de revolución engendrado sea máximo? La misma pregunta respecto al triángulo.

§ 2. Algunos problemas de física

2668. La velocidad del cuerpo es dada por la fórmula $v = \sqrt{1 + t}$ m/s. Hallar la distancia recorrida por el cuerpo en los primeros 10 s al comenzar el movimiento.

2669. Cuando se efectúa el movimiento armónico oscilatorio a lo largo del eje de abscisas, cerca del origen de coordenadas, la velocidad $\frac{dx}{dt}$ viene dada por la fórmula

$$\frac{dx}{dt}=\frac{2\pi}{T}\cos\left(\frac{2\pi t}{T}+\varphi_0\right)$$

donde t es el tiempo; T, período de oscilación; φ_0, fase inicial. Hallar la posición del punto en el momento t_2 si es sabido que en el momento t_1 se halló en el punto $x=x_1$.

La fórmula $f=k\frac{mM}{r^2}$, donde m y M son las masas de los puntos, r, la distancia que media entre éstos, y k, coeficiente de proporcionalidad igual a $6{,}67\cdot10^{-11}\,\frac{\text{m}^3}{\text{kg}\cdot\text{s}^2}$ (ley de Newton) establece la fuerza f de interacción de las masas de dos puntos. Tomando esto en consideración resolver los problemas de los ejercicios 2670—2678. (La densidad se supone constante.)

2670. La barra AB, de longitud l y de masa M, ejerce la atracción sobre el punto C de masa m el cual se halla en la prolongación de la barra. Entre el punto C y el extremo más próximo B de la barra media la distancia a. Hallar la fuerza de interacción de la barra y el punto. ¿Qué masa puntual debe ser colocada en A para que ésta actúe sobre C con la misma fuerza que la barra AB? Considerar el caso de un punto que se halla en la prolongación de la barra y primero dista r_1 de la barra misma. Después, desplazándose a lo largo de la recta, que constituye la prolongación de la barra, el citado punto va acercándose a la misma, resultando entre ambos la distancia r_2. ¿Qué trabajo realiza la fuerza de atracción en este caso?

2671. ¿Cuál es la fuerza con que el semianillo de radio r y de masa M ejerce su acción sobre el punto material de masa m, que se halla en su centro?

2672. ¿Cuál es la fuerza con que el anillo de alambre, de masa M y de radio R, ejerce su acción sobre el punto material C de masa m que se halla en la recta que pasa por el centro del anillo perpendicular a su plano? La distancia entre el citado punto y el centro del anillo es igual a a. ¿Qué trabajo realizaría la fuerza de atracción al desplazarse el punto desde el infinito hasta el centro del anillo?

2673. Aplicando el resultado del ejercicio anterior calcular la fuerza con que un disco plano, de radio R y de masa M, ejerce su acción sobre el punto material de masa m que se halla en su eje, distando a del centro.

2674. Aplicando el resultado del ejercicio anterior calcular la fuerza con que un plano infinito en el cual la masa, de densidad superficial σ, está distribuida uniformemente, ejerce su acción sobre el punto material de masa m. La distancia entre el punto y el plano es a.

2675. Existe un cono recto circular truncado cuyos radios de base son R y r, la altura, h, la densidad, γ. En su vértice está colocado un punto material de masa m. ¿Cuál es la fuerza de la acción que es ejercida por el cono sobre dicho punto?

2676. ¿Cuál es la atracción que ejerce la línea quebrada material $y = |x| + 1$ sobre el punto material, de masa m, que se halla en el origen de coordenadas? (La densidad lineal es igual a γ.)

2677. Demostrar que la línea material quebrada $y = a|x| + 1$ $(a \geqslant 0)$ ejerce la atracción sobre un punto material que se halla en el origen de coordenadas. Dicha atracción no depende de a, es decir, de la abertura del ángulo entre los lados de la línea quebrada.

2678*. Dos barras iguales, siendo cada una de longitud l y de masa M, pertenecen a una misma recta, midiando entre ellas la distancia l. Calcular su atracción mutua.

2679. Bajo la acción de la gravedad una gota de masa inicial M efectúa la caída. Al mismo tiempo va evaporándose uniformemente perdiendo, por segundo, una masa igual a m. ¿Cuál es el trabajo realizado por la gravedad desde que comenzó la caída hasta que la gota quedó completamente evaporada? (Se prescinde de la resistencia del aire.)

2680. ¿Cuál es el trabajo que se debe realizar para amontonar la arena en forma de cono truncado, de altura H, cuyos radios de base sean R y r $(r < R)$? El peso específico es igual a d (la arena se hace desplazar levantándola del suelo, en el que se apoya la base mayor del cono).

2681. Las dimensiones de la pirámide de Cheops son aproximadamente las siguientes: la altura es de 140 m, la arista de la base (del cuadrado), 200 m. El peso específico de la piedra empleada en la construcción es igual aproximadamente a 2,5 gf/cm^3. Calcular el trabajo realizado durante la construcción para superar la gravedad.

2682. Calcular el trabajo que ha de ser realizado para sacar el agua de un recipiente cilíndrico, de altura $H = 5$ m cuya base es un círculo de radio $R = 3$m.

2683. Calcular el trabajo que ha de ser realizado para sacar un líquido, de peso específico d, de un recipiente. Este representa, por su forma, un cono de vértice invertido, cuya altura es H y el radio de la base, R. ¿De qué manera cambia el resultado si el cono tiene su vértice en posición normal?

2684. Calcular el trabajo que ha de ser realizado para sacar el agua de un recipiente semiesférico de radio $R = 0,6$ m.

2685. La caldera tiene la forma de paraboloide de revolución (véase la fig. 50). El radio de la base es $R = 2$ m, la profundidad de

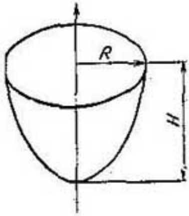

Fig. 50

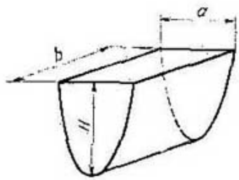

Fig. 51

la caldera, $H = 4$ m. La llena un líquido cuyo peso específico es $d = 0{,}8$ gf/cm³. Calcular el trabajo que ha de ser realizado para sacar el líquido.

2686. Hallar el trabajo que ha de ser realizado para sacar el agua de una cisterna que tiene las siguientes dimensiones (véase la fig. 51): $a = 0{,}75$ m, $b = 1{,}2$ m, $H = 1$ m. La superficie lateral de la cisterna representa un cilindro parabólico.

La energía cinética del cuerpo que gira alrededor de un eje inmóvil, es igual a $\frac{1}{2} J\omega^2$, donde ω es la velocidad angular, J es el momento de inercia respecto al eje de revolución. Resolver los problemas de los ejercicios 2687—2692, tomando en consideración lo sobredicho.

2687. La barra AB (véase la fig. 52) gira en el plano horizontal alrededor del eje OO' con la velocidad angular $\omega = 10\pi s^{-1}$. La sec-

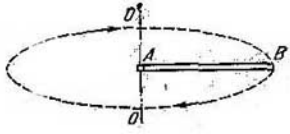

Fig. 52

ción transversal de la barra es $S = 4$ cm²; la longitud, $l = 20$ cm; la densidad del material de la barra, $\gamma = 7{,}8$ g/cm³. Hallar la energía cinética de la barra.

2688. Una lámina rectangular cuyos lados miden $a = 50$ cm y $b = 40$ cm, y el grosor es $d = 0,3$ cm, gira alrededor del lado a teniendo la velocidad angular ω constante e igual a $3\pi s^{-1}$. Hallar la energía cinética de la lámina. La densidad del material de la lámina $\gamma = 8$ g/cm^3.

2689. Una lámina triangular cuya base es $a = 40$ cm y la altura, $h = 30$ cm, gira alrededor de su base teniendo la velocidad angular ω constante e igual a $\omega = 5\pi$ s^{-1}. Hallar la energía cinética de la lámina tomando en consideración que su grosor $d = 0,2$ cm y la densidad del material de la misma $\gamma = 2,2$ g/cm^3.

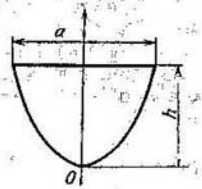

Fig. 53

2690. Una lámina en forma del segmento parabólico (véase la fig. 53) gira alrededor del eje de la parábola teniendo la velocidad angular constante e igual a $\omega = 4\pi$ s^{-1}. La base del segmento es $a = 20$ cm; la altura, $h = 30$ cm; el grosor de la lámina, $d = 0,3$ cm, la densidad del material $\gamma = 7,8$ g/cm^3. Hallar la energía cinética de la lámina.

2691. Un cilindro circular cuyo radio de base es R y la altura H, gira alrededor de su propio eje teniendo la velocidad angular constante e igual a ω. La densidad del material de la lámina es γ. Hallar la energía cinética del cilindro.

2692. Cierto alambre fino, de masa M, ha sido combado adoptando la forma de semicircunferencia de radio R. Va girando alrededor del eje que pasa por los extremos de la semicircunferencia dando n vueltas por minuto. Calcular su energía cinética.

Calcular la energía cinética para el caso en que el eje de revolución es la tangente en el punto medio de la semicircunferencia.

2693. Una lámina en forma de triángulo está sumergida, en posición vertical, en el agua de modo que su base se halla sobre la superficie del agua. La base de la lámina es a, la altura, h.

a) Calcular la fuerza de la presión que ejerce el agua sobre cada uno de los lados de la lámina.

b) ¿En cuánto aumentará la presión si invertimos la lámina de modo que su vértice quede en la superficie y la base sea paralela a la superficie del agua?

2694. Una lámina cuadrada está sumergida, en posición vertical, en el agua de modo que uno de los vértices del cuadrado se halla sobre la superficie del agua, estando en contacto con ella, y una de las diagonales es paralela a la superficie. El lado del cuadrado es igual a a. ¿Cuál es la fuerza de la presión que ejerce el agua sobre cada uno de los lados de la lámina?

2695. Calcular la fuerza de la presión que ejerce el agua sobre la presa que tiene la forma de un trapecio isósceles cuya base superior es $a = 6{,}4$ m; la inferior, $b = 4{,}2$ m, y la altura, $H = 3$ m.

2696. La mitad de una lámina en forma de elipse está sumergida en el líquido, en posición vertical, de modo que uno de sus ejes (cuya longitud es igual a $2b$) se halla sobre la superficie, estando en contacto con ella. ¿Cuál es la fuerza de la presión que ejerce el líquido sobre cada uno de los lados de la lámina? La longitud de la parte sumergida del semieje de la elipse es igual a a; el peso específico del líquido, d.

2697. Una lámina rectangular cuyos lados son a y b $(a > b)$ está sumergida en el líquido formándose entre ésta y la superficie del líquido el ángulo α. El lado mayor es paralelo a la superficie y se halla a la profundidad h. Calcular la presión que ejerce el líquido sobre cada uno de los lados de la lámina teniendo en cuenta que el peso específico del líquido es d.

2698. El agua y el aceite (en proporciones iguales) llenan un recipiente rectangular, siendo el peso del aceite dos veces menor que el del agua. Mostrar que la presión sobre cada una de las paredes del recipiente disminuye en una quinta parte si se toma sólo el aceite en vez de la mezcla. (Es necesario tener en cuenta que todo el aceite se halla encima.)

Resolviendo los problemas de los ejercicios 2699—2700 hace falta apoyarse en el principio de Arquímedes que dice lo siguiente: la fuerza de empuje ascensional que ejerce su acción sobre el sólido sumergido en un fluido es igual al peso del fluido desalojado.

2699. Un flotador de madera y de forma cilíndrica cuya superficie de base es $S = 4000$ cm^2 y la altura, $H = 50$ cm, flota sobre la superficie del agua. El peso específico de la madera es $d = 0{,}8$ gf/cm^3. a) ¿Qué trabajo ha de ser realizado para sacar el flotador del agua? b) Calcular el trabajo que hace falta realizar para sumergir el flotador de modo que lo cubra el agua?

2700. Una esfera de radio R y de peso específico 1 está sumergida en el agua de modo que está en contacto con la superficie. ¿Qué trabajo ha de ser realizado para sacar la esfera del agua?

Los problemas de los ejercicios 2701—2706 tratan el fenómeno de la salida de fluidos de un orificio pequeño. La velocidad con que el líquido sale del orificio la determina la ley de Torricelli: $v = \sqrt{2gh}$, donde h es la altura de la columna del líquido sobre el orificio y g es la aceleración de la gravedad*).

---

* La forma en que la ley de Torricelli se da aquí, es aplicable sólo al líquido ideal. Es a este líquido ideal al que se dan respuestas a los problemas. (En la práctica hacen uso de la fórmula $v = \mu\sqrt{2gh}$, donde μ es el coeficiente que depende de la viscosidad del líquido y la naturaleza del orificio del que sale el líquido. En el caso más sencillo del agua $\mu = 0{,}6$.)

2701. Un recipiente cilíndrico cuya superficie de la base es de 100 cm y la altura 30 cm, tiene practicado un orificio. Calcular la superficie de éste si se sabe que el agua que llena el recipiente invierte 2 min en salir de él.

2702. El agua llena un embudo cónico de altura $H = 20$ cm. El radio de la parte superior es $R = 12$ cm. De la parte inferior, que tiene el orificio de radio $r = 0{,}3$ cm, comienza a salir el agua. a) ¿Cuánto tiempo se invierte para que el nivel del agua baje en 5 cm? b) ¿Cuándo quedará vacío el embudo?

2703. La caldera ofrece la forma de semiesfera de radio $R = 43$ cm. En su fondo se ha producido una abertura de superficie $S = 0{,}2$ cm². ¿Cuánto tiempo debe invertir el agua, que llena la caldera, para salir de ésta?

2704. La caldera ofrece la forma de cilindro elíptico de eje horizontal (véase la fig. 54). Los semiejes de la sección elíptica (que es

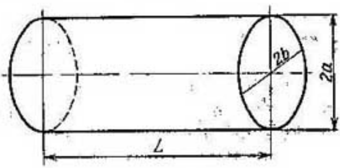

Fig. 54

perpendicular al eje del cilindro) son iguales a b (horizontal) y a (vertical). La generatriz del cilindro es igual a L. El agua llena hasta la mitad la caldera que tiene practicada en su fondo un orificio de superficie S. ¿Cuánto tiempo debe invertir el agua en salir de la caldera a través de este orificio?

2705. Un recipiente prismático, lleno de agua, tiene practicado en su pared vertical una hendidura rectangular vertical cuya altura es igual a h y la anchura, b. Entre el borde superior de la hendidura, paralelo a la superficie del agua, y esta última media la distancia H. ¿Cuánta cantidad del agua sale del recipiente por segundo si el nivel del agua se mantiene a la misma altura? Considerar el caso en que $H = 0$ (problema sobre el desagüe).

2706. Un recipiente lleno de agua hasta los bordes, ofrece la forma de paralelepípedo cuya base tiene el área igual a 100 cm². En su pared vertical hay una hendidura, de altura igual a 20 cm y la anchura igual a 0,1 cm (véase la fig. 55). ¿Cuánto tiempo se invierte para que el nivel del agua en el recipiente disminuya en a) 5 cm, b) 10 cm, c) 19 cm, d) 20 cm? (Aplicar el resultado del ejercicio anterior.)

La ecuación del gas perfecto es la siguiente: $pv = RT$, en la cual p es la presión, v, el volumen, T, la temperatura absoluta y R, la constante del volumen dado del gas. Resolver los problemas de los ejercicios 2707—2709 considerando los gases como perfectos.

2707. Un cilindro cuya base es de área igual a 10 cm², y la altura, igual a 30 cm, contiene el aire atmosférico. ¿Qué trabajo ha de ser realizado para que el émbolo penetre dentro del cilindro 20 cm, o sea,

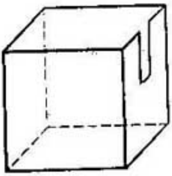

Fig. 55

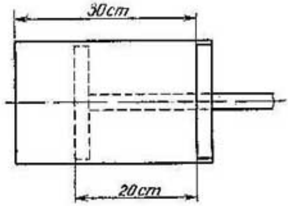

Fig. 56

debe ser introducido en el cilindro de modo que entre el fondo de éste y el émbolo medie 10 cm (véase la fig. 56)? La presión atmosférica es igual a 1,033 kgf/cm². El proceso se efectúa de manera isotérmica, es decir, a temperatura constante. (Para obtener el valor del trabajo en kgm hace falta tomar la presión en kgf/m² y el volumen en m³.)

2708. Un recipiente cilíndrico cuya sección transversal es igual a 100 cm², contiene el aire bajo presión atmosférica. Dentro está colocado un émbolo, mediando entre éste y el fondo del recipiente la distancia inicial igual a 0,1 m. El cilindro se encuentra en el vacío debido a lo cual se produce la expansión del aire contenido dentro, el cual desaloja el émbolo. 1) Calcular el trabajo realizado por el aire dentro del cilindro cuando hace ascender el émbolo a la altura de a) 0,2 m, b) 0,5 m, c) 1 m. 2) ¿Puede el trabajo aumentar sin límites al dilatarse el gas infinitamente? (Igual que en el ejercicio anterior, el proceso se efectúa de manera isotérmica.)

2709. El recipiente cilíndrico cuyo volumen $v_0 = 0,1$ m³ contiene el aire atmosférico el cual es sometido a la compresión al introducir, de manera muy rápida, un émbolo dentro (consideramos que el proceso se efectúa sin ser recibida ni cedida ninguna cantidad del calor, o sea, es adiabático). ¿Qué trabajo ha de ser realizado para comprimir el aire contenido en el recipiente reduciéndolo al volumen $v = 0,03$ m³? (La presión atmosférica es igual a 1,033 kgf/cm².) La presión del gas y el volumen que ocupa en el proceso adiabático forman la relación $pv^\gamma = p_0 v_0^\gamma$ (ecuación de Poisson). Para los gases diatómicos (también para el aire) $\gamma \approx 1,40$.

Según la ley de Newton, la velocidad con que un cuerpo se enfría es proporcional a la diferencia entre la temperatura a que se halla y la temperatura del medio que lo rodea. Partiendo de este principio, resolver los problemas de los ejercicios 2710—2711.

2710. Un cuerpo cuya temperatura es igual a 25°, está sumergido en el termostato (su temperatura se mantiene igual a 0°). ¿Cuánto tiempo debe ser invertido para que el cuerpo se enfríe hasta 10° si en 20 min se enfría hasta 20°?

2711. Un cuerpo cuya temperatura es igual a 30°, se enfría hasta 22,5° al permanecer 30 min en el termostato que se halla a la temperatura 0°. ¿Cuál sería la temperatura del cuerpo al cabo de 3 horas al comenzar el experimento?

Según la ley de Coulomb, la fuerza de interacción de dos cargas eléctricas es igual a $\frac{q_1q_2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r^2}$ newtons, donde q_1 y q_2 son los valores de las cargas en culombios, r, la distancia que media entre las cargas, en m, la constante dieléctrica $\varepsilon_0 = 8{,}85\cdot10^{-12}$ F/m ($4\pi\varepsilon_0 = 1{,}11 \times \times 10^{-10}$), ε, la permitividad del medio respecto al vacío (para el aire $\varepsilon \approx 1$). (Sistema racionalizado MKSA.) Partiendo de esta ley, resolver los problemas de los ejercicios 2712—2714.

2712. Una recta infinita está cargada uniformemente de electricidad positiva (la densidad lineal de carga eléctrica es σ). ¿Cuál es la fuerza con que obra dicha recta sobre una carga unitaria que se halla en el punto A mediando entre ambos la distancia a? La permitividad del medio es igual a 1.

2713. Entre dos cargas eléctricas $q_1 = 6{,}67\cdot10^{-9}\cdot$C y $q_2 = = 10\cdot10^{-9}$ C media la distancia igual a 10 cm. El aire sirve de medio que las separa. Al principio, las dos cargas han estado fijas, luego, se ha liberado la carga q_2, que comienza a desplazarse, bajo la acción de la repulsión, alejándose de la carga q_1. ¿Qué trabajo es realizado por la repulsión cuando la carga a) se ha alejado mediando entre ambas la distancia igual a 30 cm, b) se aleja al infinito?

2714. Entre dos cargas eléctricas $q_1 = 33{,}3\cdot10^{-9}$ culombios y $q_2 = 40\cdot10^{-9}$ culombios media la distancia igual a 20 cm. ¿Qué distancia mediará entre las cargas si acercamos la segunda hacia la primera realizando el trabajo igual a $18\cdot10^{-5}$ julios? (El medio que las separa es el aire).

2715. La tensión en los bornes del circuito eléctrico es $V = 120$ V. Uniformemente en el circuito se introduce una resistencia a 0,1 ohmio por segundo. Además, el circuito está conectado con la resistencia fija $r = 10$ ohmios. ¿Cuántos culombios de electricidad pasarán por el circuito durante dos minutos?

2716. Al principio, la tensión en los bornes del circuito era igual a 120 V, decreciendo después poco a poco en 0,01 V por segundo. Simultáneamente, en el mismo circuito se introduce una resistencia a 0,1 ohmio por segundo, lo cual representa también una velocidad constante. Además de ello, el circuito tiene la resistencia fija igual a 12 ohmios. ¿Cuántos culombios de electricidad pasarán por el circuito en 3 min?

2717. Al cambiar la temperatura, la resistencia de los conductores de metal varía (a temperaturas ordinarias) según la ley $R = R_0 (1 + 0{,}004\vartheta)$, en la cual R_0 es la resistencia a 0° C y ϑ es la temperatura en grados Celsio. (Esta ley es válida para la mayoría de los metales puros.) La resistencia del conductor es igual a 10 ohmios a 0° C, éste se va calentando uniformemente desde $\vartheta_1 = 20°$ hasta $\vartheta_2 = 200°$ durante 10 min. Al mismo tiempo, pasa por el conductor la corriente cuya tensión es igual a 120 V. ¿Cuántos culombios de electricidad pasará por el conductor durante este mismo espacio del tiempo?

2718. La ley de la variación de la tensión de la corriente sinusoidal cuya frecuencia es ω, se expresa con la fórmula siguiente: $E = E_0 \operatorname{sen} (\omega t + \varphi)$, en la cual E_0 es la tensión máxima; φ, la fase; t, el tiempo. Hallar el valor medio del cuadrado de la tensión en 1 período. Mostrar que la corriente alterna desprende en 1 período, siendo la resistencia fija, la misma cantidad de calor que la continua cuya tensión es igual a $\sqrt{(E^2)_{\text{med}}}$. (Debido a ello, la expresión $\sqrt{(E^2)_{\text{med}}}$ se la llama la tensión efectiva de la corriente alterna.)

2719. La tensión de la corriente sinusoidal se expresa con la fórmula

$$E = E_0 \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{T} t\right),$$

y la corriente, con la fórmula

$$I = I_0 \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi t}{T} - \varphi_0\right)$$

en la cual E_0 e I_0 son constantes (los valores máximos de la tensión y de la corriente); T, el período, φ_0, la así llamada diferencia de fase. Calcular el trabajo realizado por la corriente durante el espacio del tiempo desde $t_1 = 0$ hasta $t_2 = T$ y mostrar que este trabajo alcanza su valor máximo cuando la diferencia de fase φ_0 es igual a cero.

2720. Hallar el tiempo durante el cual el aparato eléctrico calienta 1 kg de agua desde 20 hasta 100° C, si la tensión de la corriente es igual a 120 V, la resistencia de la espiral, 14,4 ohmios, la temperatura del aire en la habitación, 20° C, y si también es sabido que 1 kg de agua se enfría desde 40 hasta 30° C en 10 min. (Según la ley de Joule — Lenz, $Q = I^2Rt$, donde Q es la cantidad de calor en julios, I, la corriente en amperios, R, la resistencia en ohmios, t;

el tiempo en segundos; el calor específico del agua es $4190 \frac{\text{julios}}{\text{kg·grados}}$. Además de ello, aplicar la ley de Newton sobre el enfriamiento, véase el ejercicio 2710.)

2721. El aire que ocupa un recipiente cuya cabida es de 3 l, contiene 20% del oxígeno. El recipiente, que tiene dos tubos, recibe a través de uno de ellos, el oxígeno puro, mientras que a través del otro, sale la misma cantidad del aire. ¿Cuánta cantidad del oxígeno va a contener el recipiente después de que hayan pasado por él 10 l del gas?

2722. El aire contiene $a\%$ $(= 8\%)$ CO_2. Se le hace pasar por un recipiente cilíndrico que contiene masa absorbente cuya capa fina absorbe la cantidad del gas proporcional a su concentración y su grosor. a) Si el aire que ha atravesado la capa de H cm $(= 10$ cm$)$ de grosor, contiene $b\%$ $(= 2\%)$ de CO_2, ¿de qué grosor H_1 debe ser la capa absorbente para que el aire después de atravesar el absorbedor, contenga sólo $c\%$ $(= 1\%)$ del ácido carbónico? b) ¿Cuánta cantidad (en %) queda en el aire que ha atravesado la capa absorbente si su grosor es igual a 30 cm?

2723. Cuando la luz atraviesa una capa de agua igual a 3 m, se pierde la mitad de su cantidad inicial. ¿Cuánta cantidad de la luz llega a la profundidad de 30 m? La cantidad de la luz que es absorbida al atravesar una capa fina de agua, es proporcional al grosor de la capa y a la cantidad de la luz que incide sobre su superficie.

2724. Si la cantidad inicial del fermento, igual a 1 g, al cabo de una hora llega a ser igual a 1,2 g, ¿a qué será igual al cabo de 5 horas al comenzar la fermentación si se considera que la velocidad del incremento del fermento es proporcional a su cantidad disponible?

2725. ¿Cuál era la cantidad inicial del fermento si al cabo de dos horas de haber comenzado la fermentación la cantidad disponible del fermento era igual a 2 g, mientras que al cabo de tres horas era igual a 3 g? (Véase el ejercicio anterior.)

2726. 2 kg de la sal se echan en 30 l del agua. Al cabo de 5 min 1 kg de la sal queda disuelto. ¿Cuánto tiempo tarda en disolverse el 99% de la cantidad inicial de la sal? (La velocidad de la disolución es proporcional a la cantidad de la sal no disuelta y a la diferencia entre la concentración de la disolución saturada, igual a 1 kg por 3 l, y la concentración de la disolución en el momento dado.)

Capítulo IX

Series

§ 1. Series numéricas

Convergencia de la serie numérica

En los ejercicios 2727—2736 para cada serie: 1) hallar la suma de los n primeros términos de la serie (S_n), 2) demostrar la convergencia de la serie, partiendo directamente del concepto de convergencia y 3) hallar la suma de la serie (S).

2727*. $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}+\ldots$

2728. $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}+\ldots$

2729. $\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\ldots+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}+\ldots$

2730. $\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{2\cdot 5}+\ldots+\frac{1}{n(n+3)}+\ldots$

2731. $\frac{1}{1\cdot 7}+\frac{1}{3\cdot 9}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)(2n+5)}+\ldots$

2732. $\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}+\ldots$

2733. $\frac{5}{6}+\frac{13}{36}+\ldots+\frac{3^n+2^n}{6^n}+\ldots$

2734. $\frac{3}{4}+\frac{5}{36}+\ldots+\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}+\ldots$

2735. $\frac{1}{9}+\frac{2}{225}+\ldots+\frac{n}{(2n-1)^2(2n+1)^2}+\ldots$

2736. $\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\operatorname{arctg}\frac{1}{8}+\ldots+\operatorname{arctg}\frac{1}{2\cdot n^2}+\ldots$

Series de términos positivos

En los ejercicios 2737—2753 partiendo de los criterios de comparación determinar si las series dadas son convergentes.

2737. $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{3\cdot 2^3}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)\,2^{2n-1}}+\ldots$

2738. $\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}+\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}+\ldots+\operatorname{sen}\frac{\pi}{2^n}+\ldots$

2739. $1+\frac{1+2}{1+2^2}+\ldots+\frac{1+n}{1+n^2}+\ldots$

2740. $\frac{1}{2\cdot 5}+\frac{1}{3\cdot 6}+\ldots+\frac{1}{(n+1)(n+4)}+\ldots$

2741. $\frac{2}{3}+\frac{3}{8}+\ldots+\frac{n+1}{(n+2)\,n}+\ldots$

2742. $\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}+\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}+\ldots+\operatorname{tg}\frac{\pi}{4n}+\ldots$

2743. $\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{n^2+1}+\ldots$

2744. $\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{3n-1}+\ldots$

2745. $\frac{1}{\ln 2}+\frac{1}{\ln 3}+\ldots+\frac{1}{\ln(n+1)}+\ldots$

2746. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2-4n+5}$.

2747. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1+n^2}{1+n^3}\right)^2$.

2748. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+2n}}$.

2749. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{\sqrt[4]{n^5}}$.

2750. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})$.

2751. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{1}{n^4+1}}$.

2752. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1})$.

2753. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2-n+1})$.

En los ejercicios 2754—2762 demostrar la convergencia de las series dadas aplicando el criterio de D'Alembert.

2754. $\frac{1}{3!}+\frac{1}{5!}+\ldots+\frac{1}{(2n+1)!}+\ldots$

2755. $\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\ldots+\frac{n}{2^n}+\ldots$

2756. $\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}+2\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}+\ldots+n\operatorname{tg}\frac{\pi}{2^{n+1}}+\ldots$

2757. $\frac{2}{1}+\frac{2\cdot 5}{1\cdot 5}+\ldots+\frac{2\cdot 5\cdot\ \ldots\ \cdot(3n-1)}{1\cdot 5\cdot\ \ldots\ \cdot(4n-3)}+\ldots$

2758. $\frac{1}{3}+\frac{4}{9}+\ldots+\frac{n^2}{3^n}+\ldots$

2759. $\frac{1}{3}+\frac{1\cdot 3}{3\cdot 6}+\ldots+\frac{1\cdot 3\cdot\ \ldots\ \cdot(2n-1)}{3^n\cdot n!}+\ldots$

2760. $\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}+4\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}+\ldots+n^2\operatorname{sen}\frac{\pi}{2^n}+\ldots$

2761. $\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\ldots+\frac{n}{(n+1)!}+\ldots$

2762. $\frac{2}{2}+\frac{2\cdot 3}{2\cdot 4}+\ldots+\frac{(n+1)!}{2^n\cdot n!}+\ldots$

En los ejercicios 2763—2766 demostrar la convergencia de las series dadas aplicando el criterio de la radical de Cauchy.

2763. $\frac{1}{\ln 2}+\frac{1}{\ln^2 3}+\ldots+\frac{1}{\ln^n(n+1)}+\ldots$

2764. $\frac{1}{3}+\left(\frac{2}{5}\right)^2+\ldots+\left(\frac{n}{(2n+1)}\right)^n+\ldots$

2765. $\operatorname{arcsen} 1+\operatorname{arcsen}^2\frac{1}{2}+\ldots+\operatorname{arcsen}\frac{1}{n}+\ldots+$

2766. $\frac{2}{3}+\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^4}{9}+\ldots+\frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n2}}{3^n}+\ldots$

En los ejercicios 2767—2770 aclarar si las series dadas son convergentes aplicando el criterio de la integral de Cauchy.

2767. $\frac{1}{2\ln^2 2}+\frac{1}{3\ln^2 3}+\ldots+\frac{1}{(n+1)\ln^2(n+1)}+\ldots$

2768. $\frac{1}{2\ln 2}+\frac{1}{3\ln 3}+\ldots+\frac{1}{n\ln n}+\ldots$

2769. $\left(\frac{1+1}{1+1^2}\right)^2+\left(\frac{1+2}{1+2^2}\right)^2+\ldots+\left(\frac{1+n}{1+n^2}\right)^2+\ldots$

2770. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\ln\frac{n+1}{n-1}.$

En los ejercicios 2771—2784 aclarar cuáles de las series dadas son convergentes y cuáles son divergentes.

2771. $\frac{1}{2\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt{3}}+\frac{1}{(n+1)\sqrt{n+1}}+\ldots$

2772. $1+\frac{2}{3}+\ldots+\frac{n}{2n-1}+\ldots$

2773. $\sqrt{2}+\sqrt{\frac{3}{2}}+\ldots+\sqrt{\frac{n+1}{n}}+\ldots$

2774. $1+\frac{4}{1\cdot 2}+\ldots+\frac{n^2}{n!}+\ldots$

2775. $2+\frac{5}{8}+\ldots+\frac{n^2+1}{n^3}+\ldots$

2776. $\frac{1}{1001}+\frac{2}{2001}+\ldots+\frac{n}{1000n+1}+\ldots$

2777. $\frac{1}{1+1^2}+\frac{2}{1+2^2}+\ldots+\frac{n}{1+n^2}+\ldots$

2778. $\frac{1}{3}+\frac{3}{3^2}+\ldots+\frac{2n-1}{3n}+\ldots$

2779. $\operatorname{arctg} 1+\operatorname{arctg}^2\frac{1}{2}+\ldots+\operatorname{arctg}^n\frac{1}{n}+\ldots$

2780. $2+\frac{4}{16}+\ldots+\frac{2^n}{n^4}+\ldots$

2781. $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{6\cdot 7}+\ldots+\frac{1}{(5n-4)(4n-1)}+\ldots$

2782. $\frac{3}{2}+\frac{9}{8}+\ldots+\frac{3^n}{n\cdot 2^n}+\ldots$

2783. $1+\frac{1\cdot 2}{2^2}+\ldots+\frac{n!}{n^n}+\ldots$

2784*. $\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}+\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}+\ldots+\operatorname{sen}\frac{\pi}{2n}+\ldots$

En los ejercicios 2785—2789 demostrar cada una de las relaciones mediante una serie cuyo término común sea la función dada.

2785. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}=0.$ **2786.** $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(2n)!}{a^{n!}}=0 \quad (a>1).$

2787. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^n}{(2n)!}=0.$ **2788.** $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^{n^3}}{(n!)^2}=0.$

2789. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n!)^n}{n^{n^2}}=0.$

Otras series. Convergencia absoluta

En los ejercicios 2790—2799 aclarar cuáles de las series dadas son absolutamente convergentes, cuáles son convergentes de manera no absoluta, cuáles son divergentes.

2790. $1-\frac{1}{3}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{1}{2n-1}+\ldots$

2791. $1-\frac{1}{3^3}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{1}{(2n-1)^3}+\ldots$

2792. $\frac{1}{\ln 2}-\frac{1}{\ln 3}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{1}{\ln(n+1)}+\ldots$

2793. $\frac{\operatorname{sen}\alpha}{1}+\frac{\operatorname{sen}2\alpha}{4}+\ldots+\frac{\operatorname{sen}n\alpha}{n^2}+\ldots$

2794. $\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2^2}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{2^n}+\ldots$

2795. $2-\frac{3}{2}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{n+1}{n}+\ldots$

2796. $-1+\frac{1}{\sqrt{2}}-\ldots+(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n}}+\ldots$

2797. $\frac{1}{2}-\frac{8}{4}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{n^3}{2^n}+\ldots$

2798. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n-\ln n}$. 2799. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2n^2}{n!}$.

2800. Mostrar que si las series $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$ y $\sum_{n=1}^{\infty}b_n^2$ son convergentes, la serie $\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ es absolutamente convergente.

2801. Mostrar que si la serie $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ es absolutamente convergente, la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n}a_n$ también lo será.

§ 2. Series funcionales

Convergencia de las series funcionales

En los ejercicios 2802—2816 determinar los campos de convergencia de las series.

2802. $1 + x + \ldots + x^n + \ldots$

2803. $\ln x + \ln^2 x + \ldots + \ln^n x + \ldots$

2804. $x + x^4 + \ldots + x^{n^2} + \ldots$

2805. $x + \frac{x^2}{2^2} + \ldots + \frac{x^n}{n^2} + \ldots$

2806. $x + \frac{x^2}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{x^n}{\sqrt{n}} + \ldots$

2807. $\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1+x^2} + \ldots + \frac{1}{1+x^n} + \ldots$

2808. $2x + 6x^2 + \ldots + n(n+1)x^n + \ldots$

2809. $\frac{x}{2} + \frac{x^2}{2+\sqrt{2}} + \ldots + \frac{x^n}{n+\sqrt{n}} + \ldots$

2810. $\frac{x}{1+x^2} + \frac{x^2}{1+x^4} + \ldots + \frac{x^n}{1+x^{2n}} + \ldots$

2811. $\operatorname{sen} \frac{x}{2} + \operatorname{sen} \frac{x}{4} + \ldots + \operatorname{sen} \frac{x}{2^n} + \ldots$

2812. $x \operatorname{tg} \frac{x}{2} + x^2 \operatorname{tg} \frac{x}{4} + \ldots + x^n \operatorname{tg} \frac{x}{2^n} + \ldots$

2813. $\operatorname{sen} x + \frac{\operatorname{sen} 2x}{2^2} + \ldots + \frac{\operatorname{sen} nx}{n^2} + \ldots$

2814. $\frac{\cos x}{e^x} + \frac{\cos 2x}{e^{2x}} + \ldots + \frac{\cos nx}{e^{nx}} + \ldots$

2815. $e^{-x} + e^{-4x} + \ldots + e^{-n^2 x} + \ldots$

2816. $\frac{x}{e^x} + \frac{2x}{e^{2x}} + \ldots + \frac{nx}{e^{nx}} + \ldots$

Convergencia uniforme (regular)

En los ejercicios 2817—2820 demostrar que las series dadas son uniformemente (regularmente) convergentes en todo el eje Ox.

2817. $1 + \frac{\operatorname{sen} x}{1!} + \ldots + \frac{\operatorname{sen} nx}{n!} + \ldots$

2818. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2[1+(nx)^2]}$. **2819.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} nx}{2^n}$. **2820.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-n^2x^2}}{n^2}$.

2821. Mostrar que la serie $\frac{1}{1+[\varphi(x)]^2} + \frac{1}{4+[\varphi(x)]^2} + \ldots$
$\ldots + \frac{1}{n^2+[\varphi(x)]^2} + \ldots$

es uniformemente (regularmente) convergente en cualquier intervalo en que viene definida la función $\varphi(x)$.

2822. Mostrar que la serie $\frac{1}{\sqrt{1+x}}+\frac{1}{2\sqrt{1+2x}}+\ldots$ $\ldots+\frac{1}{2^{n-1}\sqrt{1+nx}}+\ldots$
es uniformemente (regularmente) convergente en todo el semieje positivo. ¿Cuántos términos deberíamos tomar para que pudiéramos calcular, para cualquier x no negativa, la suma de la serie con exactitud hasta 0,001?

2823*. Mostrar que la serie $\frac{\ln(1+x)}{x}+\frac{\ln(1+2x)}{2x^2}+\ldots$ $\ldots+\frac{\ln(1+nx)}{nx^n}+\ldots$ es uniformemente convergente en el intervalo $1+\omega\leqslant x<\infty$, donde ω es cualquier número positivo. Quedarse convencido de que para cualquier x del intervalo$(2\leqslant x\leqslant 100)$ es suficiente tomar ocho términos para obtener la suma de la serie con exactitud hasta 0,01.

2824. Mostrar que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} x^n(1-x)$ es convergente de manera no uniforme en el intervalo $[0, 1]$.

2825. La función $f(x)$ viene definida por la igualdad

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{10^n}.$$

Mostrar que la función $f(x)$ está definida y es continua para cualquier x. Hallar $f(0)$, $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$, $f\left(\frac{\pi}{3}\right)$. Quedar convencido de que es suficiente tomar tres términos de la serie para calcular valores aproximados de la función $f(x)$, para cualquier x, con exactitud hasta 0,001. Hallar $f(1)$ y $f(-0{,}2)$ con esta misma exactitud.

2826. La funcin $f(x)$ viene definida por la igualdad

$$f(x)=\frac{1}{1+x^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+(x+n\omega)^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+(x-n\omega)^2}\quad(\omega>0).$$

Mostrar que la función $f(x)$ está definida y es continua para cualquier x. Quedar convencido de que la función $f(x)$ es periódica cuyo período es ω.

Integración y derivación de las series

2827. Mostrar que la serie $x^2+x^6+\ldots+x^{4n-2}+\ldots$ es uniformemente convergente en el intervalo $-1+\omega\leqslant x\leqslant 1-\omega$, donde ω es cualquier número positivo menor que 1. Integrando la serie dada hallar la suma de la serie

$$\frac{x^3}{3}+\frac{x^7}{7}+\ldots+\frac{x^{4n-1}}{4n-1}+\ldots$$

en el intervalo $(-1, 1)$.

2828. Hallar la suma de la serie

$$x+\frac{x^5}{5}+\ldots+\frac{x^{4n-3}}{4n-3}+\ldots$$

2829. Hallar la suma de la serie

$$\frac{x^2}{1\cdot 2}-\frac{x^3}{2\cdot 3}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}+\ldots$$

2830. La función $f(x)$ viene definida por la igualdad

$$f(x)=e^{-x}+2e^{-2x}+\ldots+ne^{-nx}+\ldots$$

Mostrar que la función $f(x)$ es continua en todo el semieje positivo Ox. Calcular $\int\limits_{\ln 2}^{\ln 3} f(x)\,dx$.

2831. La función $f(x)$ viene definida por la igualdad

$$f(x)=1+2\cdot 3x+\ldots+n3^{n-1}x^{n-1}+\ldots$$

Mostrar que la función $f(x)$ es continua en el intervalo $\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$. Calcular $\int\limits_{0}^{0,125} f(x)\,dx$.

2832*. La función $f(x)$ viene definida por la igualdad

$$f(x)=\frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\operatorname{tg}\frac{x}{4}+\ldots+\frac{1}{2^n}\operatorname{tg}\frac{x}{2^n}+\ldots$$

Después de haber quedado convencido de que la función $f(x)$ es continua en el intervalo de integración dado, calcular $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx$.

2833*. La función $f(x)$ viene definida por la serie $f(x)=$ $=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4+x^2}$. Mostrar que la función $f(x)$ es continua en todo el eje numérico. Calcular $\int_0^{\infty} f(x)\,dx$.

2834. Partiendo de la relación $\int_0^1 x^n\,dx=\frac{1}{n+1}$ hallar la suma de la serie:

1) $1-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{(-1)^{n+1}}{3n-2}+\ldots$, 2) $1-\frac{1}{5}+\ldots+\frac{(-1)^{n+1}}{4n-3}+\ldots$

2835. Partiendo de la relación $\int_2^{\infty}\frac{dx}{x^{n+1}}=\frac{1}{n2^n}$ hallar la suma de la serie $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 2^2}+\ldots+\frac{1}{n2^n}+\ldots$

2836. Partiendo de la relación

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2n}x\,dx=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{(2n-1)(2n-3)\ldots 3\cdot 1}{2n(2n-2)\ldots 4\cdot 2},$$

hallar la suma de la serie

$$\frac{1}{2}-\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{1\cdot 3\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\ldots 2n}+\ldots$$

2837. Demostrar que la serie

$$\frac{\operatorname{sen} 2\pi x}{2}+\frac{\operatorname{sen} 4\pi x}{4}+\ldots+\frac{\operatorname{sen} 2^n\pi x}{2^n}+\ldots$$

es uniformemente convergente en todo el eje numérico. Mostrar que esta serie no es susceptible de ser derivada término a término en ninguno de los intervalos.

2838. Partiendo de la igualdad $1+x+x^2+\ldots=\frac{1}{1-x}$ $(|x|<1)$ sumar las series $1+2x+3x^2+\ldots+nx^{n-1}+\ldots$ y $1+3x+\ldots$ $\ldots+\frac{n(n+1)}{2}x^{n-1}+\ldots$ y mostrar que la serie $1+2x+\ldots$ $\ldots+nx^{n-1}+\ldots$ es unifomemente convergente en el intervalo $-\rho,\rho]$, donde $|\rho|<1$.

2839. Mostrar la validez de la igualdad

$$\frac{1}{1+x}+\frac{2x}{1+x^2}+\ldots+\frac{mx^{m-1}}{1+x^m}+\ldots=\frac{1}{1-x},$$

donde $m=2^{n-1}$ y $-1<x<1$.

2840. Mostrar que la función $y=f(x)$ definida por la serie $x+x^2+\frac{x^3}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{(n-1)!}+\ldots$, satisface la relación $xy'=y(x+1)$.

§ 3. Series de potencias

Desarrollo de las funciones en series de potencias

2841. Desarrollar la función $y=\ln x$ en serie de Taylor en el entorno del punto $x=1$ (para $x_0=1$).

2842. Desarrollar la función $y=\sqrt{x^3}$ en serie de Taylor en el entorno del punto $x=1$.

2843. Desarrollar la función $y=1/x$ en serie de Taylor en el entorno del punto $x=3$.

2844. Desarrollar la función $y=\operatorname{sen}\frac{\pi x}{4}$ en serie de Taylor en el entorno del punto $x=2$.

En los ejercicios 2845—2849 desarrollar las funciones dadas en serie de Taylor en el entorno del punto $x=0$ (serie de Maclaurin):

2845. $y=\operatorname{ch} x$. **2846.** $y=x^2e^x$. **2847.** $y=\cos(x+\alpha)$.

2848. $y=e^x\operatorname{sen} x$. **2849.** $y=\cos x\operatorname{ch} x$.

En los ejercicios 2850—2854 hallar los cinco primeros términos de la serie de Taylor para las funciones dadas en el entorno del punto $x=0$.

2850. $y=\ln(1+e^x)$. **2851.** $y=e^{\cos x}$. **2852.** $y=\cos^n x$.

2853. $y=-\ln\cos x$. **2854.** $y=(1+x)^x$.

En los ejercicios 2855—2868 desarrollar las funciones dadas en el entorno del punto $x=0$, aplicando las fórmulas de desarrollo en la serie de Maclaurin de las funciones e^x, $\operatorname{sen} x$, $\cos x$, $\ln(1+x)$ y $(1+x)^m$.

2855. $y=e^{2x}$. **2856.** $y=e^{-x^2}$. **2857.** $y=\begin{cases}\dfrac{e^x-1}{x} & \text{para } x\neq 0,\\ 1 & \text{para } x=0.\end{cases}$

2858. $y=\begin{cases}\dfrac{e^{x^3}-e^{-x^3}}{2x^3} & \text{para } x\neq 0,\\ 1 & \text{para } x=0.\end{cases}$ **2859.** $y=\operatorname{sen}\frac{x}{2}$.

2860. $y = \cos^2 x$. **2861.** $y = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} & \text{para } x \neq 0. \\ 1 & \text{para } x = 0. \end{cases}$

2862. $y = (x - \operatorname{tg} x) \cos x$.

2863. $y = \ln (10 + x)$. **2864.** $y = x \ln (1 + x)$.

2865. $y = \sqrt{1 + x^2}$. **2866.** $y = \sqrt[3]{8 - x^3}$.

2867. $y = \dfrac{1}{\sqrt[3]{1 + x^3}}$. **2868.** $y = \dfrac{x^2}{\sqrt{1 - x^2}}$.

2869. Desarrollar la función $y = \dfrac{1 + x}{(1 - x)^3}$ en el entorno del punto $x = 0$ en serie de Taylor. Valiéndose de este desarrollo, hallar la suma de la serie $1 + \frac{4}{2} + \ldots + \frac{n^2}{2^{n-1}} + \ldots$

2870. Aplicando el desarrollo de la función en serie de Taylor, hallar el valor de:

1) la séptima derivada de la función $y = \dfrac{x}{1 + x^2}$ para $x = 0$,

2) la quinta derivada de la función $y = x^2 \sqrt[4]{1 + x}$ para $x = 0$,
3) la décima derivada de la función $y = x^6 e^x$ para $x = 0$,
4) la curvatura de la línea $y = x [\sqrt[3]{(1 + x)^4} - 1]$ en el origen de coordenadas.

En los ejercicios 2871—2877 calcular los límites, aplicando el desarrollo de las funciones en serie de Taylor:

2871. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x + \ln(\sqrt{1 + x^2} - x)}{x^3}$. **2872.** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2(\operatorname{tg} x - \operatorname{sen} x) - x^3}{x^5}$.

2873. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1 + x + x^2) + \ln(1 - x + x^2)}{x(e^x - 1)}$.

2874. $\lim\limits_{x \to \infty} \left[x - x^2 \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \right]$. **2875.** $\lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{1}{x^2} - \operatorname{ctg}^2 x \right)$.

2876. $\lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{\operatorname{ctg} x}{x} \right)$. **2877.** $\lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{2 + \cos x}{x^3 \operatorname{sen} x} - \frac{3}{x^4} \right)$.

Intervalo de convergencia

En los ejercicios 2878—2889 hallar los intervalos de convergencia de series de potencias.

2878. $10x + 100x^2 + \ldots + 10^n x^n + \ldots$

2879. $x - \frac{x^2}{2} + \ldots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + \ldots$

2880. $x + \frac{x^2}{20} + \ldots + \frac{x^n}{n \cdot 10^{n-1}} + \ldots$

2881. $1+x+\ldots+n!\,x^n+\ldots$
2882. $1+2x^2+\ldots+2^{n-1}x^{2(n-1)}+\ldots$
2883. $x-\frac{x^3}{3\cdot 3!}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)\cdot(2n-1)!}+\ldots$
2884. $1+3x+\ldots+(n-1)\,3^{n-1}x^{n-1}+\ldots$
2885. $\frac{x}{1\cdot 2}+\frac{x^2}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{x^n}{n(n+1)}+\ldots$
2886. $x+\frac{(2x)^2}{2!}+\ldots+\frac{(nx)^n}{n!}+\ldots$ Analizando la convergencia en el extremo derecho del intervalo conviene tomar en cuenta que las factoriales de números grandes pueden ir expresadas aproximadamente por la fórmula de Stirling:

$$n!\approx\left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{2\pi n}.$$

2887. $x+4x^2+\ldots+(nx)^n+\ldots$
2888. $\frac{\ln 2}{2}x^2+\frac{\ln 3}{3}x^3+\ldots+\frac{\ln(n+1)}{n+1}x^{n+1}+\ldots$
2889. $2x+\left(\frac{9}{4}x\right)^2+\ldots+\left[\left(\frac{n+1}{n}\right)^n x\right]^n+\ldots$

2890. Desarrollar la función $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$ en serie de Taylor en el entorno del punto $x=0$ partiendo de la relación

$$\ln(x+\sqrt{1+x^2})=\int_0^x\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$$

e indicar el intervalo de convergencia de la serie obtenida.

2891. Desarrollar la función $y=\ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$ en serie de Taylor en el entorno del punto $x=0$ partiendo de la relación

$$\ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}=\int_0^x\frac{dx}{1-x^2}$$

e indicar el intervalo de convergencia de la serie obtenida.

2892. Desarrollar la función $y=\ln[(1+x)^{1+x}]+\ln[(1-x)^{1-x}]$ en serie de Taylor en el entorno del punto $x=0$ e indicar el intervalo de convergencia de la serie obtenida.

2893. Desarrollar la función $y=(1+x)e^{-x}-(1-x)e^x$ en serie de Taylor en el entorno del punto $x=0$ e indicar el intervalo de convergencia de la serie obtenida. Valiéndose del desarrollo hallar la suma de la serie

$$\frac{1}{3!}+\frac{2}{5!}+\ldots+\frac{n}{(2n+1)!}+\ldots$$

§ 4. Algunas aplicaciones de las series de Taylor

Cálculo de valores aproximados de las funciones

2894. Calcular el valor aproximado de $\sqrt[3]{e}$ tomando tres términos del desarrollo de la función $f(x) = e^x$ en serie de Maclaurin, y calcular el error.

2895. Calcular el valor aproximado del sen 18° tomando tres términos del desarrollo de la función $f(x) = \operatorname{sen} x$ en serie de Maclaurin, y calcular el error.

2896. Calcular el valor aproximado de $\sqrt[3]{10} = 2\sqrt[3]{1{,}25}$ tomando cuatro términos del desarrollo de la función $f(x) = (1+x)^m$ en serie de Maclaurin, y calcular el error.

En los ejercicios 2897—2904 calcular las expresiones que se dan a continuación aplicando la fórmula de desarrollo de las funciones e^x, sen x, cos x en serie de Maclaurin.

2897. e^2 con exactitud hasta 0,001.

2898. $\sqrt{e}$ con exactitud hasta 0,001.

2899. $\frac{1}{e}$ con exactitud hasta 0,0001.

2900. $\frac{1}{\sqrt[4]{e}}$ con exactitud hasta 0,0001.

2901. sen 1° con exactitud hasta 0,0001.

2902. cos 1° con exactitud hasta 0,001.

2903. sen 10° con exactitud hasta 0,00001.

2904. cos 10° con exactitud hasta 0,0001.

En los ejercicios 2905—2911 calcular las raíces que se dan a continuación con exactitud hasta 0,001, aplicando la fórmula del desarrollo de la función $(1+x)^m$ en serie de Maclaurin.

2905. $\sqrt[3]{30}$. **2906.** $\sqrt[3]{70}$. **2907.** $\sqrt[3]{500}$. **2908.** $\sqrt[3]{1{,}015}$.

2909. $\sqrt[5]{250}$. **2910.** $\sqrt[3]{129}$. **2911.** $\sqrt[10]{1027}$.

En los ejercicios 2912—2914 calcular las expresiones dadas aplicando la fórmula del desarrollo de la función $\ln \frac{1+x}{1-x}$ en serie de Maclaurin.

2912. ln 3 con exactitud hasta 0,0001.

2913. $\lg e = \frac{1}{\ln 10}$ con exactitud hasta 0,000001.

2914. lg 5 con exactitud hasta 0,0001.

Resolución de ecuaciones

2915. Sea dada la ecuación $xy' + e^x = y$. Aplicando el método de coeficientes indefinidos hallar el desarrollo de la función y en serie de Taylor en potencias de x. Resolviendo el problema conviene hallar los coeficientes de la serie de Taylor efectuando la derivación sucesiva.

2916. Sea dada la ecuación $y = \ln(1 + x) - xy$. Aplicando el método de coeficientes indefinidos hallar el desarrollo de la función y en serie de Taylor en potencias de x. Resolviendo el problema conviene hallar los coeficientes de la serie de Taylor efectuando la derivación sucesiva.

En los ejercicios 2917—2919 resolver las ecuaciones respecto a y (esto es, hallar la expresión explícita de y) mediante la serie de Taylor de dos maneras, es decir, aplicando el método de coeficientes indefinidos y efectuando la derivación sucesiva.

2917. $y^3 + xy = 1$ (hallar tres términos del desarrollo).

2918. $2 \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y = x - y$ (hallar dos términos del desarrollo).

2919. $e^x - e^y = xy$ (hallar tres términos del desarrollo).

Integracion de las funciones

En los ejercicios 2920—2929 expresar las integrales en forma de series valiéndose del desarrollo de los integrandos en series; indicar los campos de convergencia de las series obtenidas.

2920. $\int \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx.$ **2921.** $\int \frac{\cos x}{x}\, dx.$ **2922.** $\int \frac{e^x}{x}\, dx.$

2923. $\int \frac{e^x}{x^2}\, dx.$ **2924.** $\int_0^x e^{-x^2}\, dx.$ **2925.** $\int_0^x \frac{\operatorname{arctg} x}{x}\, dx.$

2926. $\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}.$ **2927.** $\int_0^x \sqrt{1+x^3}\, dx.$

2928. $\int_0^x \frac{dx}{1-x^9}.$ **2929.** $\int_0^x \frac{\sqrt[4]{1+x^4}-1}{x^2}\, dx.$

En los ejercicios 2930—2934 calcular los valores aproximados de las integrales definidas tomando el número indicado de los términos del desarrollo del integrando en serie; indicar el error.

2930. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{x}\, dx$ (3 términos). **2931.** $\int_0^{\frac{1}{4}} e^{-x^2}\, dx$ (3 términos).

2932. $\int\limits_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}$ (2 términos). **2933.** $\int\limits_{0,1}^{1} \frac{e^x}{x}\,dx$ (6 términos).

2934. $\int\limits_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} x^3 \operatorname{arctg} x\,dx$ (2 términos).

En los ejercicios 2935—2938 calcular las integrales con exactitud hasta 0,001.

2935. $\int\limits_{0,1}^{0,2} \frac{e^{-x}}{x^3}\,dx.$ **2936.** $\int\limits_0^{0,5} \frac{\operatorname{arctg} x}{x}\,dx.$

2937. $\int\limits_0^{0,8} x^{10} \operatorname{sen} x\,dx.$ **2938.** $\int\limits_0^{0,5} \frac{dx}{1+x^4}.$

2939. Mostrar que en el intervalo $(-0,1;\ 0,1)$ la función $\int\limits_0^x e^{-x^2}\,dx$ se diferencia de la función $\operatorname{arctg} x - \frac{x^5}{10}$ no más que en 0,0000001.

2940. Tomando en cuenta la identidad

$$\frac{\pi}{4} = 4 \operatorname{arctg} \frac{1}{5} - \operatorname{arctg} \frac{1}{239},$$

calcular π con 10 cifras exactas.

2941. Desarrollar la función $y = e^{x^2} \int\limits_0^x e^{-x^2}\,dx$ en serie de Taylor de dos maneras, esto es, calculando directamente las derivadas sucesivas, para $x=0$, y multiplicando las series entre sí.

2942*. Calcular la integral $\int\limits_0^1 x^x\,dx.$

2943. Calcular la integral $\int\limits_0^{0,5} e^{\operatorname{sen} x}\,dx$ con exactitud hasta 0,0001.

2944. Calcular la integral $\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{\cos x}\,dx$ con exactitud hasta 0,001.

Diversos problemas

2945. Calcular el área limitada por la línea $y^2 = x^3 + 1$, el eje de ordenadas y la recta $x = 1/2$, con exactitud hasta 0,001.

2946*. Calcular el área del óvalo $x^4 + y^4 = 1$ con exactitud hasta 0,01.

2947. Calcular la longitud de la línea $25y^2 = 4x^5$ desde el pico hasta el punto de intersección con la parábola $5y = x^2$, con exactitud hasta 0,0001.

2948. Calcular la longitud de una semionda de la sinusoide $y = \operatorname{sen} x$ con exactitud hasta 0,001.

2949. La figura limitada por la línea $y = \operatorname{arctg} x$, el eje de abscisas y la recta $x = 1/2$ gira alrededor del eje de abscisas. Calcular el volumen del cuerpo de revolución con exactitud hasta 0,001.

2950. La figura limitada por las líneas $y^3 - x^3 = 1$, $4y + x^3 = 0$, la recta $y = 1/2$ y el eje de ordenadas, gira alrededor del eje de ordenadas. Calcular el volumen del cuerpo de revolución con exactitud hasta 0,001.

2951. Calcular con exactitud hasta 0,001 las coordenadas del centro de gravedad del arco de la hipérbola $y = 1/x$, limitado por los puntos cuyas abscisas son $x_1 = 1/4$, $x_2 = 1/2$.

2952. Calcular con exactitud hasta 0,01 las coordenadas del centro de gravedad del trapecio mixtilíneo limitado por la línea $y = \frac{1}{\ln x}$, las rectas $x = 1,5$ y $x = 2$ y el eje de abscisas.

Capítulo X

Funciones de varias variables. Cálculo diferencial

§ 1. Funciones de varias variables

2953. Expresar el volumen z del cono en función de su generatriz x y la altura y.

2954. Expresar el área S del triángulo en función de sus tres lados x, y, z.

2955. Formar la tabla de los valores de la función $z = 2x - 3y + 1$ dando a las variables independientes los valores desde 0 hasta 5 con intervalo de una unidad.

2956. Formar la tabla de los valores de la función $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ dando a las variables independientes los valores desde 0 hasta 1 con intervalo de 0,1. Calcular los valores de la función con exactitud hasta 0,01.

2957. Hallar los valores de las funciones:

1) $z = \left(\frac{\operatorname{arctg}(x+y)}{\operatorname{arctg}(x-y)}\right)^2$ para $x = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$, $y = \frac{1-\sqrt{3}}{2}$;

2) $z = e^{\operatorname{sen}(x+y)}$ para $x = y = \frac{\pi}{2}$;

3) $z = y^{x^2-1} + x^{y^2-1}$ para $x = 2$, $y = 2$; $x = 1$, $y = 2$; $x = 2$, $y = 1$.

2958. Sea dada la función

$$F(x, y) = \frac{\varphi(x)\,\psi(y) - \psi(x)\,\varphi(y)}{\varphi(xy)\,\psi(xy)}.$$

Hallar $F(a, 1/a)$. En particular, poner $\varphi(u) = u^3$, $\psi(u) = u^2$ y calcular $F(a, 1/a)$.

2959. Sea dada la función $F(x, y) = y^x - \frac{1}{2}x^y$. Si x e y cambian con la misma velocidad, ¿qué función crece con más rapidez (para $x = 3$, $y = 2$): la que se obtiene de F siendo fija y y cambiando sólo x, o la que se obtiene para x fija (cambiando sólo y)?

2960. Sea dada la función

$$\varphi(x, y, z) = y^2 - (y\cos z + z\cos y)\,x + x^{\frac{y+z}{y-z}}.$$

Las variables y y z guardan los valores fijos de y_0 y de z_0 siendo $y_0 = 3z_0$. ¿Qué representa la gráfica de la función $v = \varphi(x, y_0, z_0)$? ¿Es la función $\varphi(x, y, z)$: 1) una función racional de y? de z? 2) una función entera de x?

2961*. La función $z = f(x, y)$, que satisface idénticamente la relación

$$f(mx, my) = m^k f(x, y) \text{ para cualquier } m$$

es llamada función homogénea de k-ésimo orden. Mostrar que la función homogénea de k-ésimo orden $z = f(x, y)$ siempre puede ser representada en forma $z = x^k F\left(\frac{y}{x}\right)$

2962. El carácter homogéneo de una función de cualquier número de variables independientes puede ser determinado de manera análoga a la función de dos variables, por ejemplo, $f(x, y, z)$ es una función homogénea de k-ésimo orden si

$$f(mx, my, mz) = m^k f(x, y, z) \text{ para cualquier } m.$$

También tiene lugar la propiedad:

$$f(x, y, z) = x^k F\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right).$$

Demostrarla.

2963. Probar que la función $z = F(x, y) = xy$ satisface la ecuación diferencial

$$F(ax + bu, cy + dv) = acF(x, y) + bcF(u, y) + a\,dF(x, v) + b\,dF(u, v)$$

2964. Probar que la función $z = F(x, y) = \ln x \ln y$ satisface la ecuación diferencial

$$F(xy, uv) = F(x, u) + F(x, v) + F(y, u) + F(y, v)$$

$(x, y, u, v$ son positivas$)$.

2965. Definir z como función explícita de x e y ateniéndose a la ecuación $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$. ¿Será esta función unívoca?

2966. Sea dada la función compuesta $z = u^v$, donde $u = x + y$, $v = x - y$. Hallar el valor de la función: 1) para $x = 0$, $y = 1$; 2) para $x = 1$, $y = 1$; 3) para $x = 2$, $y = 3$; 4) para $x = 0$, $y = 0$; 5) para $x = -1$, $y = -1$.

2967. $z = \frac{u+v}{uv}$; $u = w^t$, $v = w^{-t}$; $w = \sqrt{x+y}$; $t = 2(x - y)$. Expresar z directamente en forma de la función de x e y. ¿Es z una función racional de u y v, de w y t, de x e y?

2968. Sea dada la función compuesta $z=u^w+w^{u+v}$, donde $u=x+y$, $v=x-y$, $w=xy$. Expresar z directamente en forma de la función de x e y.

2969. $u=(\xi+\eta)^2-\xi^3-\eta^3$; $\xi=\frac{e^\omega+e^\varphi}{2}$; $\eta=\frac{e^\omega+e^\varphi}{2}$, $\omega=$ $=\ln(x^2+y^2+z^2)$, $\varphi=2\ln(x+y+z)$. Expresar u directamente en forma de la función de x, y y z. ¿Es u una función racional entera de ξ y η, de ω y φ, de x, y, z?

2970. Presentar la función compuesta

$$z=\left(\frac{x^2+xy+y^2}{x^2-xy+y^2}\right)^{xy}+x^2+y^2$$

en forma de una «cadena» de dependencias compuesta de dos eslabones.

2971. Investigar la gráfica de la función $z=\frac{1}{2}(x^2-y^2)$ aplicando el método de intersecciones. ¿Qué representan las intersecciones por los planos $x=\text{const}$, $y=\text{const}$, $z=\text{const}$?

2972. Investigar la gráfica de la función $z=xy$ aplicando el método de intersecciones. ¿Qué representan las intersecciones por los planos $x=\text{const}$, $y=\text{const}$, $z=\text{const}$?

2973. Investigar la gráfica de la función $z=y^2-x^3$ aplicando el método de intersecciones.

2974. Investigar la gráfica de la función

$$z^3=ax^2+by^2\ (a>0,\ b>0)$$

aplicando el método de intersecciones.

§ 2. Propiedades más elementales de las funciones

Dominio de definición

2975. El dominio está limitado por el paralelogramo de lados $y=0$, $y=2$, $y=\frac{1}{2}x$, $y=\frac{1}{2}x-1$. La frontera del mismo se elimina. Dar este dominio por desigualdades.

2976. El dominio representa la figura limitada por las parábolas $y=x^2$ y $x=y^2$ (incluyendo las fronteras). Dar este dominio por desigualdades.

2977. Escribir, en forma de desigualdades, un dominio abierto que representa un triángulo equilátero, de lados iguales a a, cuyo vértice se halla situado en el origen de coordenadas. Uno de los lados tiene la misma dirección que el semieje positivo Ox (el triángulo está situado en el primer cuadrante).

2978. El dominio está limitado por un cilindro circular infinito de radio R (eliminadas las fronteras) cuyo eje paralelo al eje Oz pasa por el punto (a, b, c). Dar este dominio mediante las desigualdades.

2979. Escribir, en forma de desigualdades, el dominio limitado por la esfera de radio R cuyo centro se halla en el punto (a, b, c) (incluidas las fronteras).

2980. Los vértices de un triángulo rectángulo se hallan situados dentro del círculo de radio R. El área S del triángulo es función de sus catetos x e y: $S = \varphi(x, y)$. ¿Cuál es el dominio de definición de la función $S = \varphi(x, y)$?

2981. La esfera de radio R lleva inscrita una pirámide de base rectangular cuyo vértice se proyecta ortogonalmente en el punto de intersección de las diagonales de la base. El volumen V de la pirámide es función de los lados x e y de su base. ¿Será esta función unívoca? Presentar su forma analítica. Hallar el dominio de definición de la función.

2982. Una tabla cuadrada ofrece la forma de cuadrícula cuádruple, teniendo dos cuadros blancos y dos negros, como lo muestra la fig. 57. Cada uno de sus lados mide una unidad de longitud. Examinemos el rectángulo cuyos lados x e y son paralelos a los de la tabla y uno de los ángulos coincide con el del cuadro negro. El área de la parte negra del rectángulo será función de x e y. ¿Cuál será su dominio de definición? Presentar su forma analítica.

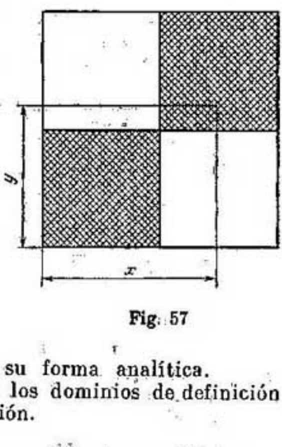

Fig. 57

En los ejercicios 2983—3002 hallar los dominios de definición de las funciones que se dan a continuación.

2983. $z=\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}$. **2984.** $z=\ln(y^2-4x+8)$.

2985. $z=\frac{1}{R^2-x^2-y^2}$. **2986.** $z=\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}$.

2987. $z=\frac{1}{\sqrt{x+y}}+\frac{1}{\sqrt{x-y}}$. **2988.** $z=\operatorname{arcsen}\frac{y-1}{x}$.

2989. $z=\ln xy$. **2990.** $z=\sqrt{x-\sqrt{y}}$.

2991. $z=\operatorname{arcsen}\frac{x^2+y^2}{2}+\operatorname{arcsec}(x^2+y^2)$.

2992. $z=\frac{\sqrt{4x-y^2}}{\ln(1-x^2-y^2)}$. **2993.** $z=\sqrt{\frac{x^2+2x+y^2}{x^2-2x+y^2}}$.

2994. $z=xy\sqrt{\ln\frac{R^2}{x^2+y^2}}+\sqrt{x^2+y^2-R^2}$.

2995. $z=\operatorname{ctg}\pi(x+y)$. **2996.** $z=\sqrt{\operatorname{sen}\pi(x^2+y^2)}$.

2997. $z=\sqrt{x\operatorname{sen}y}$. **2998.** $z=\ln x-\ln\operatorname{sen}y$.

2999. $z=\ln[x\ln(y-x)]$. **3000.** $z=\operatorname{arcsen}[2y(1+x^2)-1]$.

3001. $u=\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{y}}+\frac{1}{\sqrt{z}}$.

3002. $u=\sqrt{R^2-x^2-y^2-z^2}+\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2-r^2}}$ $(R>r)$.

Límite. Continuidad de la función

En los ejercicios 3003—3008 calcular los límites de las funciones que se dan a continuación, estimando que las variables independientes tienden, de manera arbitraria, a sus valores límites.

3003. $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}$. **3004.** $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{\sqrt{x^2y^2+1}-1}{x^2+y^2}$.

3005. $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{\operatorname{sen}(x^3+y^3)}{x^2+y^2}$. **3006.** $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)x^2y^2}$.

3007. $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}}{x^4+y^4}$. **3008.** $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}(1+x^2y^2)^{-\frac{1}{x^2+y^2}}$.

3009. Mostrar que la función $u=\frac{x+y}{x-y}$ para $x\to0$, $y\to0$, puede tender a cualquier límite (dependiendo de cómo tienden a cero x e y). Dar ejemplos que muestren tales variaciones de x e y para que: a) $\lim u=1$, b) $\lim u=2$.

3010. Hallar los puntos de discontinuidad de la función $z=\frac{2}{x^2+y^2}$. ¿Qué variaciones sufre la función en el entorno del punto de discontinuidad?

3011. Hallar los puntos de discontinuidad de la función $z=\frac{1}{\operatorname{sen}^2\pi x+\operatorname{sen}^2\pi y}$.

3012. ¿En qué parte es discontinua la función $z=\frac{1}{x-y}$?

3013. ¿En qué parte es discontinua la función $z=\frac{1}{\operatorname{sen}\pi x}+\frac{1}{\operatorname{sen}\pi y}$?

3014. ¿En qué parte es discontinua la función $z=\frac{y^2+2x}{y^2-2x}$?

3015*. Probar si es continua la función para $x=0$, $y=0$:

1) $f(x, y)=\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}$; $\quad f(0, 0)=0$.

2) $f(x, y)=\frac{xy}{x^2+y^2}$; $\quad f(0, 0)=0$.

3) $f(x, y)=\frac{x^3y^3}{x^2+y^2}$; $\quad f(0, 0)=0$.

4) $f(x, y)=\frac{1}{x^2+y^2}$; $\quad f(0, 0)=0$.

5) $f(x, y)=\frac{x^4-y^4}{x^4+y^4}$; $\quad f(0, 0)=0$.

6) $f(x, y)=\frac{x^2y^2}{x^4+y^4}$; $\quad f(0, 0)=0$.

Líneas y superficies de nivel

3016. Sea dada la función $z=f(x, y)=\frac{1}{x^2+y^2}$. Construir las líneas de nivel de esta función para $z=1, 2, 3, 4$.

3017. La función $z=f(x, y)$ está dada de la manera siguiente: en el punto $P(x, y)$ su valor es igual al ángulo con que se ve desde este punto un segmento AB dado en el plano Oxy. Hallar las líneas de nivel de la función $f(x, y)$.

En los ejercicios 3018—3021 trazar las líneas de nivel de las funciones que se dan a continuación dando a z los valores desde -5 hasta -5 con intervalo igual a una unidad.

3018. $z=xy$. **3019.** $z=x^2y+x$.

3020. $z=y(x^2+1)$. **3021.** $z=\frac{xy-1}{x^2}$.

3022. Construir las líneas de nivel de la función $z=(x^2+y^2)^2-2(x^2-y^2)$ dando a z los valores desde -1 hasta $\frac{3}{2}$ con intervalo igual a $\frac{1}{2}$.

3023. Construir las líneas de nivel de la función z dada implícitamente por la ecuación $\left(\frac{3}{2}\right)^z[(x-5)^2+y^2]=\left(\frac{2}{3}\right)^z[(x+5)^2+y^2]$ dando a z los valores desde -4 hasta 4 con intervalo igual a 1.

3024. Construir las líneas de nivel de la función z dada implícitamente por la ecuación $y^2=2^{-z}(x-z)$ dando a z los valores desde -3 hasta 3 con intervalo igual a 1.

3025. Hallar las líneas de nivel de la función z dada implícitamente por la ecuación $z+x\ln z+y=0$.

3026. En el espacio viene dado el punto A. La distancia que media entre el punto variable M y el punto A es función de las coordenadas del punto M. Hallar las superficies de nivel de esta función las cuales correspondan a las distancias iguales a 1, 2, 3, 4.

3027. La función $u = f(x, y, z)$ está dada de la manera siguiente: en el punto $P(x, y, z)$ su valor es igual a la suma de las distancias

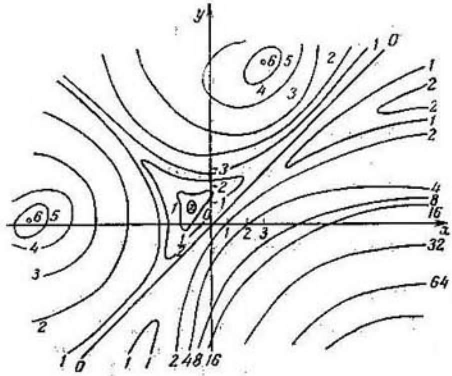

Fig. 58

que median entre el punto mencionado y dos puntos dados: $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$. Indicar las superficies de nivel de la función $f(x, y, z)$.

3028. Hallar las superficies de nivel de la función

$$u = \ln \frac{1+\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{1-\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

3029. Hallar las superficies de nivel de la función $u = \frac{x^2+y^2}{z}$.

3030. Hallar las superficies de nivel de la función:
1) $u = 5^{2x+3y-z}$, 2) $u = \operatorname{tg}(x^2+y^2-2z^2)$.

3031. La fig. 58 muestra las líneas de nivel de la función $z = f(x, y)$. Construir la gráfica de la función:
1) $z = f(x, 0)$; 2) $z = f(x, 4)$; 3) $z = f(1, y)$;
4) $z = f(-5, y)$; 5) $z = f(x, 3x)$; 6) $z = f(x, x^2)$;

§ 3. Derivadas y diferenciales de las funciones de varias variables

Derivadas parciales

3032. El volumen de gas v es función de su temperatura y presión: $v = f(p, T)$. El coeficiente medio de la expansión del gas, a la presión constante y al cambio de la temperatura desde T_1 hasta T_2 se traduce por la expresión $\frac{v_2 - v_1}{v_1(T_2 - T_1)}$. ¿Qué es lo que podríamos denominar el coeficiente de expansión, a la presión constante y a la temperatura dada T_0?

3033. La temperatura en un punto A dado de la barra Ox es función de la abscisa x del punto A y el tiempo t: $\theta = f(x, t)$. ¿Cuál sería la interpretación física de las derivadas parciales $\frac{\partial\theta}{\partial t}$ y $\frac{\partial\theta}{\partial x}$?

3034. El área S del rectángulo se expresa por la fórmula $S = bh$, donde b es la base y h, la altura. Hallar $\frac{\partial s}{\partial h}$, $\frac{\partial s}{\partial b}$ y dar interpretación geomértica de los resultados obtenidos.

3035. Sean dadas dos funciones: $u = \sqrt{a^2 - x^2}$ (a es constante) y $z = \sqrt{y^2 - x^2}$. Hallar $\frac{du}{dx}$ y $\frac{\partial z}{\partial x}$. Comparar los resultados.

En los ejercicios 3036—3084 hallar las derivadas parciales de las funciones que se dan a continuación respecto a cada una de las variables independientes (x, y, z, u, v, t, φ y ψ son variables):

3036. $z = x - y$. **3037.** $z = x^3y - y^3x$.

3038. $\theta = axe^{-t} + bt$ (a, b son constantes).

3039. $z = \frac{u}{v} + \frac{v}{u}$. **3040.** $z = \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}$.

3041. $z = (5x^2y - y^3 + 7)^3$. **3042.** $z = x\sqrt{y} + \frac{y}{\sqrt[3]{x}}$.

3043. $z = \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2})$. **3044.** $z = \operatorname{arctg}\frac{x}{y}$.

3045. $z = \frac{1}{\operatorname{arctg}\frac{y}{x}}$. **3046.** $z = x^y$.

3047. $z = \ln(x^2 + y^2)$. **3048.** $z = \ln\frac{\sqrt{x^2 + y^2} - x}{\sqrt{x^2 + y^2} + x}$.

3049. $z = \operatorname{arcsen} \frac{\sqrt{x^2-y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}$. 3050. $z = \ln \operatorname{tg} \frac{x}{y}$.

3051. $z = e^{-\frac{x}{y}}$. 3052. $z = \ln (x + \ln y)$.

3053. $u = \operatorname{arctg} \frac{v+w}{v-w}$. 3054. $z = \operatorname{sen} \frac{x}{y} \cos \frac{y}{x}$.

3055. $z = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{y}{x}}$. 3056. $z = (1 + xy)^y$.

3057. $z = xy \ln (x + y)$. 3058. $z = x^{xy}$.

3059. $u = xyz$. 3060. $u = xy + yz + zx$.

3061. $u = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

3062. $u = x^3 + yz^2 + 3yx - x + z$

3063. $w = xyz + yzv + zvx + vxy$.

3064. $u = e^{x(x^2+y^2+z^2)}$. 3065. $u = \operatorname{sen} (x^2 + y^2 + z^2)$.

3066. $u = \ln (x + y + z)$.

3067. $u = x^{\frac{y}{z}}$. 3068. $u = x^{y^z}$.

3069. $f(x, y) = x + y - \sqrt{x^2+y^2}$ en el punto (3, 4).

3070. $z = \ln \left(x + \frac{y}{2x}\right)$ en el punto (1, 2).

3071. $z = (2x + y)^{2x+y}$. 3072. $z = (1 + \log_y x)^3$.

3073. $z = xye^{\operatorname{sen} \pi xy}$.

3074. $z = (x^2 + y^2) \frac{1 - \sqrt{x^2+y^2}}{1 + \sqrt{x^2+y^2}}$.

3075. $z = \operatorname{arctg} \sqrt{x^y}$. 3076. $z = 2 \sqrt{\frac{1 - \sqrt{xy}}{1 + \sqrt{xy}}}$.

3077. $z = \ln [xy^2 + yx^2 + \sqrt{1 + (xy^2 + yx^2)^2}]$.

3078. $z = \sqrt{1 - \left(\frac{x+y}{xy}\right)^2} + \operatorname{arcsen} \frac{x+y}{xy}$.

3079. $z = \operatorname{arctg} \left(\operatorname{arctg} \frac{y}{x}\right) - \frac{1}{2} \frac{\operatorname{arctg} \frac{y}{x} - 1}{\operatorname{arctg} \frac{y}{x} + 1} - \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$.

3080. $u = \frac{k}{(x^2+y^2+z^2)^2}$. 3081. $u = \operatorname{arctg} (x-y)^z$.

3082. $u = (\operatorname{sen} x)^{yz}$. 3083. $u = \ln \frac{1 - \sqrt{x^2+y^2+z^2}}{1 + \sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.

3084. $w = \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 (x^2y^2 + z^2v^2 - xyzv) + \ln \cos (x^2y^2 + z^2v^2 - xyzv)$.

3085. $u=\frac{\cos(\varphi-2\psi)}{\cos(\varphi+2\psi)}$. Hallar $\left(\frac{\partial u}{\partial \psi}\right)_{\substack{\varphi=\frac{\pi}{4}\\ \psi=\pi}}$.

3086. $u=\sqrt{az^3-bt^3}$. Hallar $\frac{\partial u}{\partial z}$ y $\frac{\partial u}{\partial t}$ para $z=b,\ t=a$.

3087. $z=\frac{x\cos y-y\cos x}{1+\operatorname{sen} x+\operatorname{sen} y}$. Hallar $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$ para $x=y=0$.

3088. $u=\sqrt{\operatorname{sen}^2 x+\operatorname{sen}^2 y+\operatorname{sen}^2 z}$. Hallar $\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_{\substack{x=0\\ y=0\\ z=\frac{\pi}{4}}}$.

3089. $u=\ln(1+x+y^2+z^3)$. Hallar $u_x+u_y+u_z$ para $x=y=$ $=z=1$.

3090. $f(x, y)=x^3y-y^3x$. Hallar $\left(\dfrac{\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial f}{\partial y}}\right)_{\substack{x=1\\ y=2}}$.

3091. ¿Qué ángulo forma la tangente a la línea $\begin{cases} z=\frac{x^2+y^2}{4}, \\ y=4 \end{cases}$ en el punto $(2, 4, 5)$ con la dirección positiva del eje de abscisas?

3092. ¿Qué ángulo forma la tangente a la línea $\begin{cases} z=\sqrt{1+x^2+y^2} \\ x=1 \end{cases}$ en el punto $(1, 1, \sqrt{3})$ con la dirección positiva del eje de ordenadas?

3093. ¿Qué ángulo se forma al cortarse las líneas planas engendradas por la intersección de las superficies $z=x^2+\frac{y^2}{6}$ y $z=\frac{x^2+x^2}{3}$ por el plano $y=2$?

Diferenciales. Cálculos aproximados

En los ejercicios 3094—3097 hallar las diferenciales parciales de las funciones que se dan a continuación, respecto a cada una de las variables independientes.

3094. $z=xy^3-3x^2y^2+2y^4$.

3095. $z=\sqrt{x^2+y^2}$.

3096. $z=\frac{xy}{x^2+y^2}$.

3097. $u=\ln(x^3+2y^3-z^3)$.

3098. $z=\sqrt[3]{x+y^2}$. Hallar d_yz para $x=2,\ y=5,\ \Delta y=0{,}01$.

3099. $z=\sqrt{\ln xy}$. Hallar d_xz para $x=1,\ y=1{,}2,\ \Delta x=0{,}016$.

3100. $u=p-\frac{qr}{p}+\sqrt{p+q+r}$. Hallar d_pu para $p=1$, $q=3$, $r=5$, $\Delta p=0{,}01$.

En los ejercicios 3101—3109 hallar las diferenciales totales de las funciones que se dan a continuación.

3101. $z=x^2y^4-x^3y^3+x^4y^2$. **3102.** $z=\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$

3103. $z=\frac{x+y}{x-y}$. **3104.** $z=\operatorname{arcsen}\frac{x}{y}$.

3105. $z=\operatorname{sen}(xy)$. **3106.** $z=\operatorname{arctg}\frac{x+y}{1-xy}$.

3107. $z=\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$. **3108.** $z=\operatorname{arctg}(xy)$. **3109.** $u=x^{yz}$.

Aplicaciones a los cálculos

3110. Hallar el valor de la diferencial total de la función $z=x+y-\sqrt{x^2+y^2}$ para $x=3$, $y=4$, $\Delta x=0{,}1$, $\Delta y=0{,}2$.

3111. Hallar el valor de la diferencial total de la función $z=e^{xy}$ para $x=1$, $y=1$, $\Delta x=0{,}15$, $\Delta y=0{,}1$.

3112. Hallar el valor de la diferencial total de la función $z=\frac{xy}{x^2-y^2}$ para $x=2$, $y=1$, $\Delta x=0{,}01$, $\Delta y=0{,}03$.

3113. Calcular aproximadamente la variación de la función $z=\frac{x+3y}{y-3x}$ al variar x desde $x_1=2$ hasta $x_2=2{,}5$ e y desde $y_1=4$ hasta $y_2=3{,}5$.

3114. Calcular aproximadamente $\ln(\sqrt[3]{1{,}03}+\sqrt[4]{0{,}98}-1)$.

3115. Calcular aproximadamente $1{,}04^{2{,}02}$.

3116. Hallar la longitud del segmento de la recta $x=2$, $y=3$ comprendido entre la superficie $z=x^2+y^2$ y su plano tangente en el punto $(1, 1, 2)$.

3117. El cuerpo ha sido pesado en el aire $(4{,}1\pm 0{,}1$ gf) y en el agua $(1{,}8\pm 0{,}2$ gf). Hallar el peso específico del cuerpo e indicar el error del cálculo.

3118. El radio de la base del cono mide $10{,}2\pm 0{,}1$ cm, la generatriz mide $44{,}6\pm 0{,}1$ cm. Hallar el volumen del cono e indicar el error del cálculo.

3119. Para calcular el área S del triángulo por su lado a y los ángulos B, C se usa la fórmula

$$S=\frac{1}{2}a^2\frac{\operatorname{sen}B\operatorname{sen}C}{\operatorname{sen}(B+C)}.$$

Hallar el error relativo δ_S para calcular S si los errores relativos al calcular los elementos mencionados son δ_a, δ_B, δ_C, respectivamente.

3120. Un lado del triángulo mide 2,4 m y aumenta con la velocidad de 10 cm/s. El segundo lado mide 1,5 m y disminuye con la velocidad de 5 cm/s. El ángulo formado por estos dos lados mide 60° y aumenta con la velocidad de 2° al segundo. ¿Cómo varía el área del triángulo y con qué velocidad?

3121. Los radios de las bases de un cono truncado miden $R = 30$ cm, $r = 20$ cm, la altura $h = 40$ cm. ¿Cómo variaría el volumen del cono si aumentásemos R en 3 mm, r, en 4 mm, h, en 2 mm?

3122. Mostrar que para calcular el período T de la oscilación del péndulo, determinado por la fórmula

$$T = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

(siendo l su longitud y g la aceleración de la gravedad) el error relativo es igual a la semisuma de los errores relativos cometidos al calcular los valores de l y g (todos los errores son supuestos bastante pequeños).

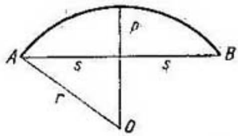

Fig. 59

3123. La fig. 59 muestra el arco AB de una circunferencia. Expresar el error al calcular el radio r de dicho arco tomando en consideración la cuerda $2s$ y la flecha p por los errores ds y dp. Calcular dr para $2s = 19{,}45$ cm $\pm$ 0,5 mm, $p = 3{,}62$ cm $\pm$ 0,3 mm.

§ 4. Derivación de las funciones

Función compuesta

3124. $u = e^{x-2y}$, donde $x = \operatorname{sen} t$, $y = t^3$, $\frac{du}{dt} = ?$

3125. $u = z^2 + y^2 + zy$, $z = \operatorname{sen} t$, $y = e^t$, $\frac{du}{dt} = ?$

3126. $z = \operatorname{arcsen}(x - y)$, $x = 3t$, $y = 4t^3$; $\frac{dz}{dt} = ?$

3127. $z=x^2y-y^2x$, donde $x=u\cos v$, $y=u\operatorname{sen} v$; $\frac{\partial z}{\partial u}=?$ $\frac{\partial z}{\partial v}=?$

3128. $z=x^2\ln y$, $x=\frac{u}{v}$, $y=3u-2v$; $\frac{\partial z}{\partial u}=?$ $\frac{\partial z}{\partial v}=?$

3129. $u=\ln(e^x+e^y)$; $\frac{\partial u}{\partial x}=?$ Hallar $\frac{du}{dx}$ si $y=x^3$.

3130. $z=\operatorname{arctg}(xy)$; hallar $\frac{dz}{dx}$ si $y=e^x$.

3131. $u=\operatorname{arcsen}\frac{x}{z}$, donde $z=\sqrt{x^2+1}$; $\frac{du}{dx}=?$

3132. $z=\operatorname{tg}(3t+2x^2-y)$, $x=\frac{1}{t}$, $y=\sqrt{t}$; $\frac{dz}{dt}=?$

3133. $u=\frac{e^{ax}(y-z)}{a^2+1}$, $y=a\operatorname{sen} x$, $z=\cos x$; $\frac{du}{dx}=?$

3134. $z=\frac{xy\operatorname{arctg}(xy+x+y)}{x+y}$; $dz=?$

3135. $z=(x^2+y^2)e^{\frac{x^2+y^2}{xy}}$; $\frac{\partial z}{\partial x}=?$ $\frac{\partial z}{\partial y}=?$ $dz=?$

3136. $z=f(x^2-y^2,\ e^{xy})$; $\frac{\partial z}{\partial x}=?$ $\frac{\partial z}{\partial y}=?$

3137. Mostrar que la función $z=\operatorname{arctg}\frac{x}{y}$, donde $x=u+v$, $y=u-v$, satisface la relación $\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{u-v}{v^2+u^2}$.

3138. Mostrar que la función $z=\varphi(x^2+y^2)$, donde $\varphi(u)$ es una función derivable, satisface la relación $y\frac{\partial z}{\partial x}-x\frac{\partial z}{\partial y}=0$.

3139. $u=\operatorname{sen} x+F(\operatorname{sen} y-\operatorname{sen} x)$; mostrar que $\frac{\partial u}{\partial y}\cos x+\frac{\partial u}{\partial x}\cos y=\cos x\cos y$, cualquiera que sea la función derivable F.

3140. $z=\frac{y}{f(x^2-y^2)}$; mostrar que $\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{z}{y^2}$ cualquiera que sea la función derivable f.

3141. Mostrar que la función derivable homogénea de orden cero $z=F\left(\frac{y}{x}\right)$ (véase el ejercicio 2961) satisface la relación $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=0$.

3142. Mostrar que la función homogénea de k-ésimo orden $u=x^kF\left(\frac{z}{x};\ \frac{y}{x}\right)$, donde F es una función derivable, satisface la relación $x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+z\frac{\partial u}{\partial z}=ku$.

3143. Comprobar la proposición del ejercicio 3142 para la función $u = x^5 \operatorname{sen} \frac{z^2+y^2}{x^2}$.

3144. Sea dada la función derivable $f(x, y)$. Demostrar que si sustituimos las variables x, y por las funciones lineales homogéneas de X, Y, la función obtenida $F(X, Y)$ estará unida con la función dada por la relación

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = X\frac{\partial F}{\partial X} + Y\frac{\partial F}{\partial Y}.$$

Funciones dadas implícita y paramétricamente

En los ejercicios 3145—3155 hallar la derivada $\frac{dy}{dx}$ de las funciones dadas implícitamente.

3145. $x^3y - y^3x = a^4$.

3146. $x^2y^2 - x^4 - y^4 = a^4$.

3147. $xe^y + ye^x - e^{xy} = 0$.

3148. $(x^2+y^2)^2 - a^2(x^2-y^2) = 0$.

3149. $\operatorname{sen}(xy) - e^{xy} - x^2y = 0$.

3150. $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$.

3151. $xy - \ln y = a$.

3152. $\operatorname{arctg}\frac{x+y}{a} - \frac{y}{a} = 0$.

3153. $yx^2 = e^y$.

3154. $ye^x + e^y = 0$.

3155. $y^x = x^y$.

3156. $F(x, y) = F(y, x)$. Mostrar que la derivada de y respecto a x puede ir expresada mediante una fracción cuyo numerador se obtiene del denominador permutando las letras y y x.

3157. $x^2 + y^2 - 4x - 10y + 4 = 0$. Hallar $\frac{dy}{dx}$ para $x = 6$, $y = 2$ y $x = 6$, $y = 8$. Dar interpretación geométrica de los resultados obtenidos.

3158. $x^4y + xy^4 - ax^2y^2 = a^5$. Hallar $\frac{dy}{dx}$ para $x = y = a$.

3159. Demostrar que de $x^2y^2 + x^2 + y^2 - 1 = 0$ se deduce:

$$\frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} + \frac{dy}{\sqrt{1-y^4}} = 0.$$

3160. Demostrar que de $a + b(x+y) + cxy = m(x-y)$ se deduce:

$$\frac{dx}{a+2bx+cx^2} = \frac{dy}{a+2by+cy^2}.$$

3161. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$; $\frac{\partial z}{\partial x} = ?$ $\frac{\partial z}{\partial y} = ?$

3162. $x^2-2y^2+z^2-4x+2z-5=0;\qquad \frac{\partial z}{\partial x}=?\quad \frac{\partial z}{\partial y}=?$

3163. $z^3+3xyz=a^3;\qquad \frac{\partial z}{\partial x}=?\quad \frac{\partial z}{\partial y}=?$

3164. $e^z-xyz=0;\qquad \frac{\partial z}{\partial x}=?\quad \frac{\partial z}{\partial y}=?$

3165. Mostrar que cualquiera que sea la función derivable φ, de la relación $\varphi(cx-az,\ cy-bz)=0$ se deduce:

$$a\frac{\partial z}{\partial x}+b\frac{\partial z}{\partial y}-c.$$

3166. $F(x,\ y,\ z)=0$. Demostrar que

$$\frac{\partial x}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial x}=1;\qquad \frac{\partial y}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial y}=-1.$$

3167. Hallar la diferencial total de la función z, definida por la ecuación $\cos^2 x+\cos^2 y+\cos^2 z=1$.

3168. La función z viene dada paramétricamente: $x=u+v$, $y=u-v$, $z=uv$. Expresar z como función explícita de x e y.

3169. $x=u+v$, $y=u^2+v^2$, $z=u^3+v^3$. Expresar z como función explícita de x e y.

3170. $x=u\cos v$, $y=u\operatorname{sen} v$, $z=kv$. Expresar z como función explícita de x e y.

En los ejercicios 3171—3175 expresar dz a través de x, y, z, dx y dy de las funciones dadas en forma paramétrica.

3171. $x=\frac{u^2+v^2}{2},\qquad y=\frac{u^2-v^2}{2},\ z=uv.$

3172. $x=\sqrt{a}(\operatorname{sen} u+\cos v),\quad y=\sqrt{a}(\cos u-\operatorname{sen} v),\quad z=1+\operatorname{sen}(u-v)$.

3173. $x=u+v,\ y=u-v,\ z=u^2v^2.$

3174. $x=u\cos v,\ y=u\operatorname{sen} v,\ z=u^2.$

3175. $x=v\cos u-u\cos u+\operatorname{sen} u,\quad y=v\operatorname{sen} u-u\operatorname{sen} u-\cos u,$ $z=(u-v)^2.$

3176. $x=e^u\cos v,\ y=e^u\operatorname{sen} v,\ z=uv$. Expresar dz mediante u, v, dx y dy.

3177. Las relaciones $u=f(x,\ y)$, $v=F(x,\ y)$, donde f y F son funciones derivables de x e y, determinan x e y como funciones derivables de u y v. Demostrar que

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}-\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\right)=1.$$

3178. u y v son funciones de x, y, z que satisfacen las relaciones $uv = 3x - 2y + z$, $v^2 = x^2 + y^2 + z^2$. Mostrar que

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + z\frac{\partial u}{\partial z} = 0.$$

3179. Sean $y = f(x, t)$, $F(x, y, t) = 0$. Comprobar que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial F}{\partial t} - \dfrac{\partial f}{\partial t}\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial f}{\partial t}\dfrac{\partial F}{\partial y} + \dfrac{\partial F}{\partial t}}.$$

3180. Sean $f(x, y, z) = 0$. Comprobar que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial F}{\partial z} - \dfrac{\partial F}{\partial x}\dfrac{\partial f}{\partial z}}{\dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{\partial F}{\partial z} - \dfrac{\partial F}{\partial y}\dfrac{\partial f}{\partial z}}.$$

§ 5. Derivación sucesiva

3181. $z = x^3 + xy^2 - 5xy^3 + y^5$. Mostrar que $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}$.

3182. $z = x^y$. Mostrar que $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}$.

3183. $z = e^x(\cos y + x \operatorname{sen} y)$. Mostrar que $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}$.

3184. $z = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$. Mostrar que $\dfrac{\partial^3 z}{\partial y^2\,\partial x} = \dfrac{\partial^3 z}{\partial x\,\partial y^2}$.

En los ejercicios 3185—3192 hallar $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}$ y $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ de las funciones que se dan a continuación.

3185. $z = \frac{1}{3}\sqrt{(x^2+y^2)^3}$.

3186. $z = \ln(x + \sqrt{x^2+y^2})$.

3187. $z = \operatorname{arctg}\dfrac{x+y}{1-xy}$.

3188. $z = \operatorname{sen}^2(ax + by)$.

3189. $z = e^{xy^y}$.

3190. $z = \dfrac{x-y}{x+y}$.

3191. $z = y^{\ln x}$.

3192. $z = \operatorname{arcsen}(xy)$.

3193. $u = \sqrt{x^2+y^2+z^2-2xz}$; $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial z} = ?$

3194. $z = e^{xy^2}$; $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x^2\,\partial y} = ?$

3195. $z = \ln(x^2+y^2)$; $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x\,\partial y^2} = ?$

3196. $z=\operatorname{sen} xy$; $\quad \frac{\partial^3 z}{\partial x\,\partial y^2}=?$

3197. $w=e^{xyz}$; $\quad \frac{\partial^3 w}{\partial x\,\partial y\,\partial z}=?$

3198. $v=x^m y^n z^p$; $\quad \frac{\partial^6 v}{\partial x\,\partial y^3\,\partial z^2}=?$

3199. $z=\ln(e^x+e^y)$; mostrar que $\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=1$ y que

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\right)^2=0.$$

3200. $u=e^x(x\cos y-y\operatorname{sen} y)$. Mostrar que $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$.

3201. $u=\ln\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$; mostrar que $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$.

3202. $u=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$; mostrar que $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$.

3203. $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$; mostrar que

$$\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 r}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 r}{\partial z^2}=\frac{2}{r},\quad \frac{\partial^2(\ln r)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2(\ln r)}{\partial y^2}+\frac{\partial^2(\ln r)}{\partial z^2}=\frac{1}{r^2}.$$

3204. ¿Para qué valor de la constante a la función $v=x^3+$ $+axy^2$ satisface la ecuación $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0$?

3205. $z=\frac{y}{y^2-a^2x^2}$; mostrar que $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=a^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

3206. $v=\frac{1}{x-y}+\frac{1}{y-z}+\frac{1}{z-y}$; mostrar que

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}+2\left(\frac{\partial^2 v}{vx\,\partial y}+\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial z}+\frac{\partial^2 v}{\partial z\,\partial x}\right)=0.$$

3207. $z=f(x, y)$, $\xi=x+y$, $\eta=x-y$. Comprobar que

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=4\,\frac{\partial^2 z}{\partial\xi\,\partial\eta}.$$

3208. $v=x\ln(x+r)-r$, donde $r^2=x^2+y^2$. Mostrar que

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=\frac{1}{x+r}.$$

3209. Hallar la expresión para la segunda derivada $\frac{d^2y}{dx^2}$ de la función y dada implícitamente por la ecuación $f(x, y)=0$.

3210. $y=\varphi(x-at)+\psi(x+at)$. Mostrar que $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ cualesquiera que sean las funciones φ y ψ derivables dos veces.

3211. $u=\varphi(x)+\psi(y)+(x-y)\psi'(y)$. Comprobar que

$$(x-y)\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial u}{\partial y}$$

(φ y φ son las funciones derivables dos veces).

3212. $z=y\varphi(x^2-y^2)$ .Comprobar que $\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{z}{y^2}$ (φ es la función derivable).

3213. $r=x\varphi(x+y)+y\psi(x+y)$. Mostrar que

$$\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 r}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial^2 r}{\partial y^2}=0$$

(φ y ψ son funciones derivables dos veces).

3214. $u=\frac{1}{y}[\varphi(ax+y)+\psi(ax-y)]$. Mostrar que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{a^2}{y^2}\cdot\frac{\partial}{\partial y}\left(y^2\frac{\partial u}{\partial y}\right).$$

3215. $u=\frac{1}{x}[\varphi(x-y)+\psi(x+y)]$. Mostrar que

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2\frac{\partial u}{\partial x}\right)=x^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

3216. $u=xe^y+ye^x$. Mostrar que

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}+\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}=x\frac{\partial^3 u}{\partial x\,\partial y^2}+y\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\,\partial y}.$$

3217. $u=e^{xyz}$. Mostrar que

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x\,\partial y\,\partial z}=xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}+2x\frac{\partial u}{\partial x}+u.$$

3218. $u=\ln\frac{x^2-y^2}{xy}$. Mostrar que

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}+\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\,\partial y}-\frac{\partial^3 u}{\partial x\,\partial y^2}-\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}=2\left(\frac{1}{y^3}-\frac{1}{x^3}\right).$$

En los ejercicios 3219—3224 hallar las diferenciales de segundo orden de las funciones que se dan a continuación.

3219. $z=xy^2-x^2y$. **3220.** $z=\ln(x-y)$.

3221. $z=\frac{1}{2(x^2+y^2)}$. **3222.** $z=x\operatorname{sen}^2 y$.

3223. $z=e^{xy}$. **3224.** $u=xyz$.

3225. $z=\operatorname{sen}(2x+y)$. Hallar d^3z en los puntos $(0,\pi)$; $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$.

3226. $u = \operatorname{sen}(x+y+z)$; $d^2u = ?$

3227. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$; $d^2z=?$

3228. $z_3 - 3xyz = a^3$; $d^2z = ?$

3229. $3x^2y^2 + 2z^2xy - 2zx^3 + 4zy^3 - 4 = 0$. Hallar d^2z en el punto $(2, 1, 2)$.

Cambio de variables

3230. Transformar la expresión diferencial

$$x^4 \frac{d^2y}{dx^2} + 2x^3 \frac{dy}{dx} + y,$$

poniendo $x = 1/t$.

3231. Transformar la expresión diferencial

$$x^2y'' - 4xy' + y,$$

poniendo $x = e^z$.

3232. Transformar la expresión diferencial

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} + ay,$$

poniendo $x = \operatorname{sen} t$.

3233. Transformar la expresión diferencial $\frac{y''}{y'^3} + y$ tomando y como variable independiente y x, como su función.

3234. Transformar la expresión $y'y''' - 3y''^2$ tomando y como variable independiente.

3235. Transformar la expresión $yy'' - 2(y^2 + y'^2)$ a la nueva función v, poniendo $y = \frac{1}{v}$.

3236. Transformar la ecuación

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{x-y}$$

a las coordenadas polares que están relacionadas con las fórmulas cartesianas $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \operatorname{sen} \varphi$.

3237. Transformar la expresión $k = \frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$ a las coordenadas polares ρ, φ.

3238. La función z depende de x, y. En la expresión $y\frac{\partial z}{\partial x} - x\frac{\partial z}{\partial y}$ efectuar el cambio de las variables independientes con ayuda de las fórmulas $x = u\cos v$, $y = u \operatorname{sen} v$.

3239. Transformar el operador de Laplace $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ a las coordenadas polares.

3240. Transformar la expresión $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+kz$ a las coordenadas polares considerando que $z=\omega(\rho)$ depende solamente de ρ y no depende de φ.

3241. En la expresión $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ cambiar las variables x e y por las variables u y v, y la función z, por la variable w, considerando que estas variables están unidas por las relaciones

$$x=\frac{u+v}{2},\quad y=\frac{u-v}{2};\ z=\frac{u^2-v^2}{4}-w.$$

Capítulo XI

Aplicaciones del cálculo diferencial de las funciones de varias variables

§ 1. Fórmula de Taylor. Extremos de las funciones de varias variables

Fórmula de Taylor

3242. $f(x, y) = x^3 + 2y^3 - xy$; desarrolar la función $f(x+h, y+k)$ en potencias de h y k.

3243. $f(x, y) = x^3 + y^2 - 6xy - 39x + 18y + 4$; hallar el incremento que recibe al pasar las variables independientes de los valores $x = 5$, $y = 6$ a los valores $x = 5 + h$, $y = 6 + k$.

3244. $f(x, y) = \frac{xy^3}{4} - yx^3 + \frac{x^2y^2}{2} - 2x + 3y - 4$;

hallar el incremento que recibe la función al pasar las variables independientes de los valores $x = 1$, $y = 2$ a los valores $x = 1 + h$, $y = 2 + k$. Calcular $f(1{,}02;\ 2{,}03)$ limitándose a los términos de 2° orden inclusive.

3245. $f(x, y, z) = Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Eyz + Fzx$; desarrollar $f(x + h, y + k, z + l)$ en potencias de h, k, l.

3246. Desarrollar $z = \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$ en potencias de $\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ y $\left(y - \frac{\pi}{4}\right)$. Hallar los términos de primero y segundo órdenes y R_2 (término complementario de segundo orden).

3247. Desarrollar la función $z = x^y$ en potencias de $(x - 1)$, $(y - 1)$ hallando los términos hasta el tercer orden inclusive. Aplicar el resultado obtenido para calcular (¡sin recurrir a las tablas!) $1{,}1^{1{,}02}$.

3248. $f(x, y) = e^x \operatorname{sen} y$; desarrollar $f(x + h, y + k)$ en potencias de h y k, limitándose a los términos de segundo orden respecto a h y k. Aplicar el resultado para calcular $e^{0{,}1} \operatorname{sen} 0{,}49\pi$.

3249. Hallar varios primeros términos de desarrollo de la función e^x sen y en serie de Taylor en el entorno del punto (0, 0).

3250. Hallar varios primeros términos de desarrollo de la función $e^x \ln(1+y)$ en serie de Taylor en el entorno del punto (0, 0).

En los ejercicios 3251—3256 desarrollar las funciones que se dan a continuación en serie de Taylor para $x_0 = 0$, $y_0 = 0$.

3251. $z = \frac{1}{1-x-y+xy}$.

3252*. $z = \operatorname{arctg} \frac{x-y}{1+xy}$.

3253. $z = \ln(1-x)\ln(1-y)$.

3254. $z = \ln \frac{1-x-y+xy}{1-x-y}$.

3255. $z = \operatorname{sen}(x^2+y^2)$.

3256. $z = e^x \cos y$.

3257. Hallar varios primeros términos de desarrollo en potencias de $x-1$, $y-1$ de la función z dada implícitamente por la ecuación

$$z^3 + yz - xy^2 - x^3 = 0.$$

La función dada es igual a 1 cuando $x = 1$, $y = 1$.

3258. Obtener la fórmula aproximada

$$\frac{\cos x}{\cos y} \approx 1 - \frac{1}{2}(x^2 - y^2)$$

para los valores suficientemente pequeños de $|x|$, $|y|$.

Extremos

En los ejercicios 3259—3267 hallar los puntos estacionarios de las funciones que se dan a continuación.

3259. $z = 2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2$.

3260. $z = e^{2x}(x + y^2 + 2y)$.

3261. $z = xy(a - x - y)$.

3262. $z = (2ax - x^2)(2by - y^2)$.

3263. $z = \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y + \cos(x+y)$ $\left(0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{4},\ 0 \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{4}\right)$

3264. $z = \frac{a+bx+cy}{\sqrt{1+x^2+y^2}}$.

3265. $z = y\sqrt{1+x} + x\sqrt{1+y}$.

3266. $u = 2x^2 + y^2 + 2z - xy - xz$.

3267. $u = 3\ln x + 2\ln y + 5\ln z + \ln(22 - x - y - z)$.

3268. La fig. 60 muestra las líneas de nivel de la función $z = f(x, y)$. ¿Qué particularidades ofrece la función en los puntos A, B, C, D y en la línea EF?

3269. La función z viene dada en forma implícita: $2x^2 + 2y^2 + z^2 + 8xz - z + 8 = 0$. Hallar sus puntos estacionarios.

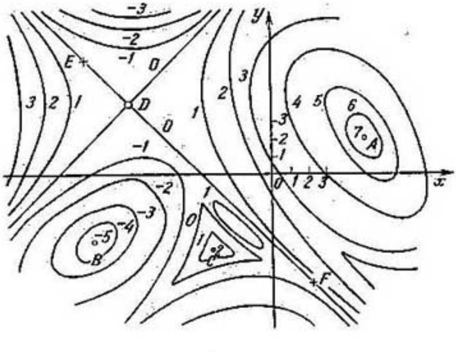

Fig. 60

3270. La función z viene dada en forma implícita: $5x^2 + 5y^2 + 5z^2 - 2xy - 2xz - 2yz - 72 = 0$. Hallar sus puntos estacionarios.

3271. Hallar los puntos extremos de la función $z = 2xy - 3x^2 - 2z^2 + 10$.

3272. Hallar los puntos extremos de la función $z = 4(x - y) - x^2 - y^2$.

3273. Hallar los puntos extremos de la función $z = x^2 + xy + y^2 + x - y + 1$.

3274. Mostrar que la función $z = x^2 + xy + y^2 + \frac{a^3}{x} + \frac{a^2}{y}$ tiene mínimo en el punto $x = y = \frac{a}{\sqrt[3]{3}}$.

3275. Mostrar que la función $z = x^4 + y^4 - 2x^2 - 4xy - 2y^2$ tiene mínimo, cuando $x = \sqrt{2}$, $y = \sqrt{2}$ y $x = -\sqrt{2}$, $y = -\sqrt{2}$

3276. Mostrar que la función $z = x^3 + y^3 - 6xy - 39x + 18y + 20$ tiene mínimo, cuando $x = 5$, $y = 6$.

3277. Hallar los puntos estacionarios de la función $z = x^3y^2(12 - x - y)$ que satisfagan la condición $x > 0$, $y > 0$ y analizar su carácter.

3278. Hallar los puntos estacionarios de la función $z = x^3 + y^3 - 3xy$ y analizar su carácter.

Valores máximos y mínimos

3279. Hallar los valores máximo y mínimo de la función $z = x^2 - y^2$ en el círculo $x^2 + y^2 \leqslant 4$.

3280. Hallar los valores máximo y mínimo de la función $z = x^2 + 2xy - 4x + 8y$ en rectángulo limitado por las rectas

$$x = 0,\ y = 0,\ x = 1,\ y = 2.$$

3281. Hallar el valor máximo de la función $z = x^2y\,(4 - x - y)$ en el triángulo limitado por las rectas $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 6$.

3282. Hallar los valores máximo y mínimo de la función

$$z = e^{-x^2-y^2}(2x^2 + 3y^2)$$

en el círculo $x^2 + y^2 \leqslant 4$.

3283. Hallar los valores máximo y mínimo de la función $z = \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y + \operatorname{sen}(x + y)$ en el rectángulo $0 \leqslant x \leqslant \pi/2$; $0 \leqslant y \leqslant \pi/2$.

3284. Desarrollar el número positivo a en tres sumandos positivos de modo que el producto de éstos tenga el valor máximo.

3285. Representar el número positivo a en forma de producto de cuatro factores positivos cuya suma sea la menor posible.

3286. En el plano Oxy hallar el punto tal que la suma de los cuadrados de distancias que medien entre las tres rectas $x = 0$, $y = 0$, $x + 2y - 16 = 0$ y el punto buscado sea la menor posible.

3287. Trazar un plano de modo que pase por el punto (a, b, c) y que el volumen del tetraedro recortado por dicho plano del triedro coordenado sea el menor posible.

3288. Sean dados n puntos: $A_1(x_1, y_1, z_1), \ldots, A_n(x_n, y_n, z_n)$. En el plano Oxy hallar el punto tal que la suma de los cuadrados de distancias que medien entre todos los puntos dados y el punto buscado, sea la menor posible.

3289. Sean dados tres puntos $A(0, 0, 12)$, $B(0, 0, 4)$ y $C(8, 0, 8)$. En el plano Oxy hallar un punto D tal que la esfera que pase por estos tres puntos tenga el menor radio posible.

3290. Inscribir en la esfera dada de diametro $2R$ un paralelepípedo rectangular que tenga el mayor volumen posible.

Extremos condicionados

En los ejercicios 3291—3296 analizar si las funciones que se dan a continuación tienen extremos.

3291. $z = x^m + y^m\ (m > 1)$ para $x + y = 2\ (x \geqslant 0, y \geqslant 0)$.

3292. $z = xy$ para $x^2 + y^2 = 2a^2$.

3293. $z=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ para $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=\frac{1}{a^2}$.

3294. $z=a\cos^2 x+b\cos^2 y$ para $y-x=\frac{\pi}{4}$.

3295. $u=x+y+z$ para $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1$.

3296. $u=xyz$ para $\begin{cases} 1)\ x+y+z=5, \\ 2)\ xy+xz+yz=8. \end{cases}$

3297*. Demostrar que la siguiente relación es válida
$$\frac{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2}{n}\geqslant\left(\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}\right)^2.$$

3298. $f(x, y)=x^3-3xy^2+18y$, siendo $3x^2y-y^3-6x=0$. Demostrar que la función $f(x, y)$ alcanza su extremo en los puntos $x=y=\pm\sqrt{3}$.

3299. Hallar el mínimo de la función $u=ax^2+by^2+cz^2$, donde a, b, c son constantes positivas y x, y, z están unidas por la relación $x+y+z=1$.

3300. Hallar los valores máximo y mínimo de la función $u=y^2+4z^2-4yz-2xz-2xy$ para $2x^2+3y^2+6z^2=1$.

3301. En el plano $3x-2z=0$ hallar el punto tal que la suma de los cuadrados de las distancias que medien entre dicho punto y los puntos $A(1, 1, 1)$ y $B(2, 3, 4)$ sea la menor posible.

3302. En el plano $x+y-2z=0$ hallar el punto tal que la suma de los cuadrados de las distancias que medien entre dicho punto y los planos $x+3z=6$ e $y+3z=2$ sea la menor posible.

3303. Sean dados los puntos $A(4, 0, 4)$, $B(4, 4, 4)$; $C(4, 4, 0)$. En la superficie de la esfera $x^2+y^2+z^2=4$ hallar el punto S tal que el volumen de la pirámide $SABC$ sea: a) el mayor posible, b) el menor posible. Comprobar la respuesta de manera geométrica elemental.

3304. Hallar el paralelepípedo rectangular de volumen dado V que tenga la menor área posible.

3305. Hallar el paralelepípedo rectangular de área dada S el cual tenga el mayor volumen posible.

3306. Hallar el volumen del mayor paralelepípedo rectangular que sea susceptible de ser inscrito en el elipsoide de semiejes a, b, c.

3307. La tienda de campaña tiene la forma de cilindro rematado por un cono. ¿Cuáles deberían ser las relaciones entre sus dimensiones lineales para que la cantidad de tela necesaria para su fabricación sea mínima siendo el volumen dado?

3308. La sección del canal presenta la forma de trapecio isósceles de área dada (véase la fig. 61). ¿Cuáles deberían ser sus dimensiones para que la superficie lavada del canal sea la menor posible?

3309. De todos los paralelepípedos rectangulares que tienen la diagonal dada hallar el que tenga el mayor volumen posible.

3310. Calcular las dimensiones exteriores que debería tener un cajón abierto (sin la tapa) de forma de paralelepípedo rectangular, del que se dan el espesor de paredes α y el volumen V, para que al fabricarlo se gaste la menor cantidad posible de material.

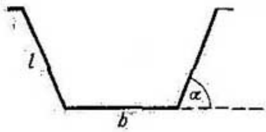

Fig. 61

3311. Hallar el volumen máximo del paralelepípedo siendo la suma de todas sus aristas igual a $12a$.

3312. Circunscribir en torno a una elipse dada un triángulo de base paralela al eje mayor cuya área sea la menor posible.

3313. En la elipse $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ hallar los puntos tales que las distancias entre éstos y la recta $3x + y - 9 = 0$ sean mínimas y máximas.

3314. En la parábola $x^2 + 2xy + y^2 + 4y = 0$ hallar el punto tal que la distancia entre éste a la recta $3x - 6y + 4 = 0$ sea la menor posible.

3315. En la parábola $2x^2 - 4xy + 2y^2 - x - y = 0$ hallar el punto más próximo a la recta $9x - 7y + 16 = 0$.

3316. Hallar la distancia máxima que media entre los puntos de la superficie

$$2x^2 + 3y^2 + 2z^2 + 2xz = 6$$

y el plano $z = 0$.

3317. Hallar los lados de un triángulo rectángulo cuyo perímetro sea mínimo siendo dada su área S.

3318. El cono recto elíptico cuyos semiejes de la base miden a y b y cuya altura es H, lleva inscrito un prisma de base rectangular de tal modo que los lados de la base son paralelos a los ejes y la intersección de las diagonales de la base se halla en el centro de la elipse. ¿Cuáles deberían ser los lados de la base y la altura del prisma para que su volumen sea el mayor posible? ¿A qué sería igual este volumen mayor?

3319. Hallar la pirámide regular triangular de volumen dado tal que la suma de sus aristas sea la menor posible.

3320. Sean dados dos puntos en la elipse. Hallar uno tercero en la misma elipse tal que el área del triángulo que tiene los dos primeros puntos por sus vértices, sea la mayor posible.

3321. Trazar la normal a la elipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ de modo que la distancia que medie entre el origen de coordenadas y la normal buscada sea la mayor posible.

3322. En el elipsoide de revolución $\frac{x^2}{96}+y^2+z^2=1$ hallar los puntos las distancias entre los cuales y el plano $3x+4y+12z=$ $=288$ sean la mayor posible y la menor posible.

3323. Sean dadas las líneas planas $f(x, y)=0$ y $\varphi(x, y)=0$. Mostrar que el extremo de distancia entre los puntos (α, β) y (ξ, η) que se hallan en estas líneas, respectivamente, se verifica si se cumple la siguiente condición

$$\frac{\alpha-\xi}{\beta-\eta}=\frac{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{\substack{x=\alpha\\ y=\beta}}}{\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{\substack{x=\alpha\\ y=\beta}}}=\frac{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_{\substack{x=\xi\\ y=\eta}}}{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)_{\substack{x=\xi\\ y=\eta}}}.$$

Valiéndose de ello, hallar la distancia mínima entre la elipse $x^2+2xy+5y^2-16y=0$ y la recta $x+y-8=0$.

§ 2. Líneas planas

Tangentes y normales

En los ejercicios 3324—3327 escribir las ecuaciones de la tangente y de la normal a las líneas en los puntos que se indican.

3324. $x^3y+y^3x=3-x^2y^2$ en el punto $(1, 1)$.

3325. $a^2(x^4+y^4)-x^3y^3=9a^6$ en el punto $(a, 2a)$.

3326. $\cos xy=x+2y$ en el punto $(1, 0)$.

3327. $2x^3-x^2y+3x^2+4xy-5x-3y+6=0$ en el punto de su intersección con el eje Oy.

Puntos singulares

En los ejercicios 3328—3340 hallar los puntos singulares de las líneas.

3328. $y^2=x^2(x-1)$. **3329.** $a^2x^2=(x^2+y^2)y^2$.

3330. $y^2=ax^2+bx^5$. **3331.** $y^2=x(x-a)^2$.

3332. $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$. **3333.** $x^4+y^4-8x^2-10y^2+16=0$.

3334. $x^4+12x^3-6y^3+36x^2+27y^2-81=0$.

3335. $x^3+y^3+3axy=0$. **3336.** $x^2+y^2=y^4+y^4$.

3337. $y=x\ln x$. **3338.** $y^2=\operatorname{sen}^3 x$.

3339. $y^2=(x-a)^3$. **3340.** $x^5=(y-x^2)^2$.

Envolventes

3341. Escribir la ecuación de la envolvente de la familia de rectas $y=ax+f(a)$. En particular, poner $f(a)=\cos a$.

3342. Hallar la envolvente de la familia de rectas $y=2mx+m^4$.

3343. Un haz de rectas está trazado de tal modo que pasa por el punto $A(a, 0)$. Hallar la envolvente de la familia de normales trazadas a las rectas del haz en los puntos de su intersección con el eje Oy.

3344. Hallar la envolvente de la familia de parábolas $y^2=a(x-a)$.

3345. Hallar la envolvente de la familia de parábolas $ax^2+a^2y=1$.

3346. Hallar la envolvente de la familia de parábolas $y=a^2(x-a)^2$.

3347. Hallar la envolvente de la familia de parábolas semicúbicas $(y-a)^2=(x-a)^3$.

3348. Hallar la envolvente de la familia de líneas $x^2+ay^2=a^3$.

3349. Hallar la envolvente de la familia de elipses $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ siendo la suma de semiejes de cada elipse igual a d.

3350. Los radios de la circunferencia son proyectados a sus dos diámetros perpendiculares entre sí. En las proyecciones, que sirven de semiejes, son trazadas las elipses. Hallar la envolvente de la familia de elipses obtenida.

3351. Hallar la envolvente de la familia de circunferencias que tienen sus centros sobre la parábola $y=bx^2$ y que pasan por su vértice.

3352. La recta se desplaza de tal modo que la suma de longitudes de los segmentos cortados por la recta en los ejes de coordenadas sigue constante e igual a a. Hallar la envolvente de la familia de rectas obtenida.

3353. Hallar la envolvente del diámetro del círculo que rueda, sin deslizarse, sobre una recta dada (el radio del círculo es igual a R).

3354. Las cuerdas de un círculo (cuyo radio es igual a R) paralelas a la dirección dada que sirven de diámetros, llevan circunscritas unas circunferencias. Hallar la envolvente de esta familia de circunferencias.

3355. La recta se desplaza de tal modo que el producto de los segmentos cortados por ésta en los ejes de coordenadas, es igual a la magnitud constante a. Hallar la envolvente de estas rectas.

3356. Mostrar que toda línea es envolvente de la familia de sus tangentes.

3357. Mostrar que la evoluta de la línea es la envolvente de la familia de sus normales. Hallar la evoluta de la parábola $y^2 = 2px$ como lugar geométrico de los centros de curvatura y como envolvente de la familia de normales. Comparar los resultados.

3358. Demostrar el teorema: si la línea (A) es la envolvente de la familia de rectas $x \cos t + y \operatorname{sen} t - f(t) = 0$, la evoluta de la línea (A) es la envolvente de la familia de rectas $-x \operatorname{sen} t + y \cos t - f'(t) = 0$.

3359. El radio vector $\overline{OM}$ de cierto punto M de la hipérbola equilátera $xy = 1$ es proyectado sobre las asíntotas de la hipérbola. Hallar la envolvente de las elipses trazadas en las proyecciones $\overline{OM}$ sirviendo éstas de semiejes.

§ 3. Función vectorial del argumento escalar. Líneas alabeadas. Superficies

Función vectorial del argumento escalar

3360. Demostrar las siguientes fórmulas de derivación

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{uv}) = \boldsymbol{u}\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} + \boldsymbol{v}\frac{d\boldsymbol{u}}{dt}, \quad \frac{d}{dt}(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) = \boldsymbol{u} \times \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} + \frac{d\boldsymbol{u}}{dt} \times \boldsymbol{v}.$$

Aquí $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{v}$ son funciones vectoriales del argumento escalar t.

3361. Sea dado $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$. Hallar las derivadas.

$$\text{a)}\ \frac{d}{dt}(\boldsymbol{r}^2);\quad \text{b)}\ \frac{d}{dt}\left(\boldsymbol{r}\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right);\quad \text{c)}\ \frac{d}{dt}\left(\boldsymbol{r} \times \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right);\quad \text{d)}\ \frac{d}{dt}\left(\boldsymbol{r}\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}\right).$$

3362. Los vectores $\boldsymbol{r}(t)$ y $\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}$ son dados como colineares para todos los valores de t. Demostrar que los vectores $\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}, \frac{d^3\boldsymbol{r}}{dt^3}, \ldots, \frac{d^n\boldsymbol{r}}{dt^n}$ son también colineares al vector $\boldsymbol{r}(t)$.

3363. Demostrar que si el módulo $|\boldsymbol{r}|$ de la función $\boldsymbol{r}(t)$ sigue constante para todos los valores de t, se tiene $\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} \perp \boldsymbol{r}$. (¿Cuál sería la interpretación geomértica de este hecho?) ¿Se verifica el teorema inverso?

3364. Sea dado $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{a}\cos\omega t+\boldsymbol{b}\operatorname{sen}\omega t$, donde $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ son vectores constantes. Demostrar que

1) $\boldsymbol{r}\times\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}=\omega\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ y 2) $\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}+\omega^2\boldsymbol{r}=0$.

3365. Demostrar que si $\boldsymbol{e}$ es vector unitario de la dirección del vector $\boldsymbol{E}$, se tiene $\boldsymbol{e}\times d\boldsymbol{e}=\frac{\boldsymbol{E}\times d\boldsymbol{E}}{E^2}$.

3366. Demostrar que si $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{a}e^{\omega t}+\boldsymbol{b}e^{-\omega t}$, donde $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ son vectores constantes, se tiene $\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}-\omega^2\boldsymbol{r}=0$.

3367. $\boldsymbol{u}=\alpha(x,\ y,\ z,\ t)\,\boldsymbol{i}+\beta(x,\ y,\ z,\ t)\,\boldsymbol{j}+\gamma(x,\ y,\ z,\ t)\,\boldsymbol{k}$, donde x, y, z son funciones de t. Demostrar que

$$\frac{d\boldsymbol{u}}{dt}=\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial t}+\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial y}\frac{dy}{dt}+\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial z}\frac{dz}{dt}.$$

3368. Sea dado $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u)$, $u=\varphi(x)$. Expresar las derivadas $\frac{d\boldsymbol{r}}{dx}$, $\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dx^2}$, $\frac{d^3\boldsymbol{r}}{dx^3}$ por medio de $\frac{d\boldsymbol{r}}{du}$, $\frac{d^2\boldsymbol{r}}{du^2}$, $\frac{d^3\boldsymbol{r}}{du^3}$.

3369. Demostrar que si para la función vectorial $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$ se verifica la relación $\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}=\alpha\cdot\boldsymbol{r}$, donde $\alpha=\text{const}$, la hodógrafa de la función $\boldsymbol{r}(t)$ es un rayo que sale del polo.

3370. Sea $\boldsymbol{r}(t)$ una función definida, continua y derivable en el intervalo $(t_1,\ t_2)$, siendo $\boldsymbol{r}(t_1)=\boldsymbol{r}(t_2)$. Aplicar el teorema de Rolle a la función $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r}$, donde $\boldsymbol{a}$ es cualquier vector constante. Dar interpretación geométrica del resultado.

3371. Sea dado el radio vector de un punto móvil $\boldsymbol{r}\{a\operatorname{sen}t,\ -a\cos t,\ bt^2\}$ (donde t es el tiempo, a y b son constantes). Hallar las hodógrafas de la velocidad y la aceleración.

3372. Hallar la trayectoria del movimiento para el cual el radio vector del punto móvil satisfaga la condición $\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{r}$, donde $\boldsymbol{a}$ es vector constante.

3373. El punto material se desplaza de acuerdo con la ley $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{v}_0t+\frac{1}{2}\boldsymbol{g}t^2$ ($\boldsymbol{r}$ es el radio vector del mismo punto en el momento t, $\boldsymbol{v}_0$ y $\boldsymbol{g}$ son vectores dados). Mostrar que: 1) la energía cinética del punto material es una función cuadrática del tiempo; 2) $\boldsymbol{v}_0$ es la velocidad inicial (esto es, el valor del vector de la velocidad en el momento $t=0$); 3) el movimiento se efectúa siendo la aceleración constante e igual al vector $\boldsymbol{g}$; 4) el movimiento se efectúa sobre la parábola (a no ser colineares los vectores $\boldsymbol{v}_0$ y $\boldsymbol{g}$) cuyo eje es paralelo al vector $\boldsymbol{g}$.

3374. La ley del movimiento del punto material se da por la fórmula

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{a}\cos t+\boldsymbol{b}\operatorname{sen}t+\boldsymbol{c},$$

donde los vectores $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ son perpendiculares entre sí. Determinar la trayectoria del movimiento. ¿En qué momentos sería extremada la velocidad del movimiento? ¿En qué momentos sería extremada la aceleración?

3375. Las fórmulas para pasar de las coordenadas cartesianas a las esféricas presentan la siguiente forma: $x = \rho \operatorname{sen} \theta \cos \varphi$, $y = \rho \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \varphi$, $z = \rho \cos \theta$, donde ρ es la distancia que media entre el punto dado y el polo, θ es su latitud, φ es el ácimut, o sea, la longitud. Hallar los componentes de la velocidad del movimiento del punto material dirigidos hacia los vectores ortogonales unitarios e_ρ, e_θ, e_φ.

Líneas alabeadas

En los ejercicios 3376—3383 formar las ecuaciones de la recta tangente y del plano normal para las líneas dadas en los puntos indicados.

3376. $\boldsymbol{r}\left(\frac{t^4}{4}, \frac{t^3}{3}, \frac{t^2}{2},\right)$ esto es, $x=\frac{t^4}{4}$, $x=\frac{t^3}{3}$, $y=\frac{t^2}{2}$ en un punto cualquiera.

3377. $x = a \cos \varphi$, $y = a \operatorname{sen} \varphi$, $z = \frac{k}{2\pi} \varphi$ en el punto dado $\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}, \frac{a\sqrt{2}}{2}, \frac{k}{8}\right)$.
Demostrar que la tangente en todos los puntos de la línea forma un mismo ángulo con el eje Oz.

3378. $x = at$, $y = \frac{1}{2} at^2$, $z = \frac{1}{3} at^3$ en el punto $(6a, 18a, 72a)$.

3379. $x = t - \operatorname{sen} t$, $y = 1 - \cos t$, $z = 4 \operatorname{sen} \frac{t}{2}$ en el punto $(\pi/2 - 1, 1, 2\sqrt{2})$.

3380. $y^2 + z^2 = 25$, $x^2 + y^2 = 10$ en el punto $(1, 3, 4)$.

3381. $2x^2 + 3y^2 + z^2 = 47$, $x^2 + 2y^2 = z$ en el punto $(-2, 1, 6)$.

3382. $x^2 + y^2 = z^2$, $x = y$ en el punto (x_0, y_0, z_0)

3383. $x^3 + z^3 = a^3$, $y^3 + z^3 = b^3$ en un punto cualquiera.

3384. En la línea $\boldsymbol{r}\{\cos t, \operatorname{sen} t, e^t\}$ hallar el punto en el cual la tangente sea paralela al plano $\sqrt{3}x + y - 4 = 0$.

En los ejercicios 3385—3387 formar las ecuaciones del plano osculador, la normal principal y binormal a las líneas dadas en los puntos indicados.

3385. $y^2 = x$, $x^2 = z$ en los puntos $(1, 1, 1)$.

3386. $x^2 = 2az$, $y^2 = 2bz$ en un punto cualquiera.

3387. $\boldsymbol{r}\{e^t, e^{-t}, t\sqrt{2}\}$ en el punto $(e, e^{-1}, \sqrt{2})$.

3388. Mostrar que las tangentes, las normales principales y binormales de la línea $\boldsymbol{r}\{e^t \cos t, e^t \operatorname{sen} t, e^t\}$ forman ángulos constantes con el eje Oz.

En los ejercicios 3389—3392 formar las ecuaciones de la recta tangente, el plano normal, la binormal, el plano osculador, la normal principal y el plano rectificante a las líneas dadas en los puntos indicados.

3389. $x = t^2$, $y = 1 - t$, $z = t^3$ en el punto $(1, 0, 1)$.

3390. $x^2 + y^2 + z^2 = 3$, $x^2 + y^2 = 2$ en el punto $(1, 1, 1)$.

3391. $\boldsymbol{r}\,\{\operatorname{sen} t, \cos t, \operatorname{tg} t\}$ en el punto $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right)$.

3392. $\boldsymbol{r}\,\{t^3 - t^2 - 5,\ 3t^2 + 1,\ 2t^3 - 16\}$ en el punto correspondiente al valor del parámetro $t = 2$.

3393. Mostrar que la línea $\boldsymbol{r}\,\{2t + 3,\ 3t - 1,\ t^2\}$ tiene en todos los puntos un mismo plano osculador. Interpretar este hecho desde el punto de vista geométrico.

3394. Demostrar que la línea

$$\boldsymbol{r}\,\{a_1t^2 + b_1t + c_1,\ a_2t^2 + b_2t + c_2,\ a_3t^2 + b_3t + c_3\}$$

es plana y formar la ecuación del plano en que se halla situada.

3395. Hallar el radio de torsión de la línea $\boldsymbol{r}\,\{\cos t, \operatorname{sen} t, \operatorname{ch} t\}$.

3396. Hallar el radio de curvatura de la línea $\boldsymbol{r}\,\{\ln \cos t, \ln \operatorname{sen} t, \sqrt{2}t\}$, $0 < t < \pi/2$. Mostrar que la torsión en cualquier punto suyo es igual a la curvatura en este punto.

3397. Mostrar que para la línea $\boldsymbol{r}\,\{e^t \cos t,\ e^t \operatorname{sen} t,\ e^t\}$ (véase el ejercicio 3388) la relación entre la curvatura y la torsión se mantiene constante para todos los puntos de la curva.

3398. ¿Cómo podría ser expresada la curvatura de la línea alabeada dada por las ecuaciones $y = \varphi(x)$, $z = \psi(x)$?

3399. Expresar los vectores $\boldsymbol{\tau}_1$, $\boldsymbol{\nu}_1$, $\boldsymbol{\beta}_1$ por medio de las derivadas del radio vector del punto en la curva $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$.

3400. Expresar cada uno de los vectores $\boldsymbol{\tau}_1$, $\boldsymbol{\nu}_1$, $\boldsymbol{\beta}_1$ por medio de los otros dos.

3401. Hallar el vector $\boldsymbol{\omega}(s)$ (vector de Darboux) que satisfaga las siguientes condiciones:

$$\frac{d\boldsymbol{\tau}_1}{ds} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\tau}_1;\quad \frac{d\boldsymbol{\nu}_1}{ds} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\nu}_1;\quad \frac{d\boldsymbol{\beta}_1}{ds} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\beta}_1.$$

Longitud del arco de la línea alabeada

En los ejercicios 3402—3409 hallar la longitud del arco de las líneas que se indican.

3402. $\boldsymbol{r}\,\{2t, \ln t, t^2\}$ desde $t = 1$ hasta $t = 10$.

3403. $\boldsymbol{r}\,\{a \cos t, a \operatorname{sen} t, a \ln \cos t\}$ desde el punto $(a, 0, 0)$ hasta el punto $\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}, \frac{a\sqrt{2}}{2}, -\frac{a}{2} \ln 2\right)$.

3404. $\mathbf{r}\{e^t\cos t, e^t \operatorname{sen} t, e^t\}$ desde el punto $(1, 0, 1)$ hasta el punto correspondiente al parámetro t.

3405. $x^2=3y$, $2xy=9z$ desde el punto $(0, 0, 0)$ hasta el punto $(3, 3, 2)$.

3406. $z^2=2ax$, $9y^2=16xz$, desde el punto $(0, 0, 0)$ hasta el punto $(2a, 8a/3, 2a)$.

3407. $4ax=(y+z)^2$, $4x^2+3y^2=3z^2$ desde el origen de coordenadas hasta el punto (x, y, z).

3408. $y=\sqrt{2ax-x^2}$, $z=a\ln\frac{2a}{2a-x}$ desde el origen de coordenadas hasta el punto (x, y, z).

3409. $y=a\arcsen\frac{x}{a}$, $z=\frac{1}{4}a\ln\frac{a+x}{a-x}$ desde el origen de coordenadas hasta el punto $\left(\frac{a}{2}, \frac{a\pi}{6}, \frac{a}{4}\ln 3\right)$.

Superficies

En los ejercicios 3410—3419 escribir las ecuaciones de los planos tangentes y las normales en los puntos indicados, para las superficies dadas.

3410. $z=2x^2-4y^2$ en el punto $(2, 1, 4)$.

3411. $z=xy$ en el punto $(1, 1, 1)$.

3412. $z=\frac{x^3-3axy+y^3}{a^2}$ en el punto $(a, a, -a)$.

3413. $z=\sqrt{x^2+y^2}-xy$ en el punto $(3, 4, -7)$.

3414. $z=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$ en el punto $\left(1, 1, \frac{\pi}{4}\right)$.

3415. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ en el punto $\left(\frac{a\sqrt{3}}{3}, \frac{b\sqrt{3}}{3}, \frac{c\sqrt{3}}{3}\right)$.

3416. $x^3+y^3+z^3+xyz-6=0$ en el punto $(1, 2, -1)$.

3417. $3x^4-4y^3z+4z^2xy-4z^3x+1=0$ en el punto $(1, 1, 1)$.

3418. $(z^2-x^2)xyz-y^5=5$ en el punto $(1, 1, 2)$.

3419. $4+\sqrt{x^2+y^2+z^2}=x+y+z$ en el punto $(2, 3, 6)$.

3420. Mostrar que la ecuación del plano tangente al elipsoide $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ en cualquier punto suyo $M_0(x_0, y_0, z_0)$ tiene la siguiente forma:

$$\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}+\frac{z_0z}{c^2}=1.$$

3421. Trazar el plano tangente al elipsoide $x^2+2y^2+z^2=1$, de tal modo que sea paralelo al plano $x-y+2z=0$.

3422. Trazar el plano tangente al elipsoide $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ de tal modo que corte segmentos de igual longitud en los semiejes positivos.

3423. Mostrar que las superficies $x+2y-\ln z+4=0$ y $x^2-xy-8x+z+5=0$ son tangentes, esto es, tienen un plano común tangente, en el punto $(2, -3, 1)$.

3424. Demostrar que todos los planos tangentes a la superficie $z=xf\left(\frac{y}{x}\right)$ se cortan en un mismo punto.

3425. Escribir las ecuaciones del plano tangente y de la normal a la esfera $\boldsymbol{r}\,\{u\cos v,\ u \operatorname{sen} v,\ \sqrt{a^2-u^2}\}$ en el punto $\boldsymbol{r}_0\,\{x_0, y_0, z_0\}$.

3426. Escribir las ecuaciones del plano tangente y de la normal al paraboloide hiperbólico $\boldsymbol{r}\,\{a(u+v),\ b(u-v),\ uv\}$ en un punto cualquiera $\{x_0, y_0, z_0\}$.

3427. Demostrar que las superficies $x^2+y^2+z^2=ax$ y $x^2+y^2+z^2=by$ son ortogonales entre sí.

3428. Mostrar que el plano tangente a la superficie $xyz=a^3$ en cualquier punto suyo forma un tetraedro de volumen constante con los planos de coordenadas. Determinar este volumen.

3429. Mostrar que los planos tangentes a la superficie $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=\sqrt{a}$ cortan, en los ejes de coordenadas, segmentos cuya suma es igual a a.

3430. Escribir la ecuación del plano tangente perpendicular a la recta $\frac{x+2}{2}=\frac{y+2}{2}=\frac{z-1}{-1}$ para la superficie $z=xy$.

3431. Mostrar que la longitud del segmento de la normal entre la superficie $x^2+y^2+z^2=y$ y el plano xOy es igual a la distancia que media entre el origen de coordenadas y la proyección de la normal en este plano.

3432. Demostrar que la normal a la superficie del elipsoide de revolución $\frac{x^2+z^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1$ en cualquier punto suyo $P(x, y, z)$ forma ángulos iguales con las rectas PA y PB, si $A(0, -4, 0)$ y $B(0, 4, 0)$.

3433. Demostrar que todas las normales a la superficie de revolución

$$z=f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$$

cortan el eje de revolución.

3434. Trazar un plano tangente a la superficie $x^2-y^2-3z=0$ de tal modo que pase por el punto $A(0, 0, -1)$ y que sea paralelo a la recta $\frac{x}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z}{2}$.

3435. En la superficie $x^2 + y^2 + z^2 - 6y + 4z = 12$ hallar los puntos en los cuales los planos tangentes sean paralelos a los planos coordenados.

3436. Formar la ecuación del plano tangente a la superficie $x = u + v$, $y = u^2 + v^2$, $z = u^3 + v^3$ en un punto cualquiera. Expresar los coeficientes de esta ecuación

a) a través de los valores de los parámetros u_0 y v_0,

b) a través de las coordenadas x_0, y_0, z_0 del punto de tangencia.

3437. Hallar el lugar geométrico de las bases de las perpendiculares bajadas desde el origen de coordenadas a los planos tangentes al paraboloide de revolución $2pz = x^2 + y^2$.

3438. Hallar el lugar geométrico de las bases de las perpendiculares bajadas desde el origen de coordenadas a los planos tangentes a la superficie $xyz = a^3$.

§ 4. Campo escalar. Gradiente. Derivada respecto a la dirección

Gradiente

3439. 1) $\psi(x, y) = x^2 - 2xy + 3y - 1$. Hallar las proyecciones del gradiente en el punto (1, 2).

2) $u = 5x^2y - 3xy^3 + y^4$. Hallar las proyecciones del gradiente en un punto cualquiera.

3440. 1) $z = x^2 + y^2$. Hallar grad z en el punto (3, 2).

2) $z = \sqrt{4 + x^2 + y^2}$. Hallar grad z en el punto (2, 1).

3) $z = \operatorname{arctg} \frac{x}{y}$. Hallar **grad** x en el punto (x_0, y_0).

3441. 1) Hallar la pendiente más pronunciada que caracteriza la superficie ascendiente $z = \ln(x^2 + 4y^2)$ en el punto (6, 4, ln 100).

2) Hallar la pendiente más pronunciada de la superficie $z = x^y$ en el punto (2, 2, 4).

3442. ¿Cuál es la dirección de la mayor variación de la función $\varphi(x, y, z) = x \operatorname{sen} z - y \cos z$ en el origen de coordenadas?

3443. 1) $z = \arcsen \frac{x}{x+y}$. Hallar el ángulo entre los gradientes de esta función en los puntos (1, 1) y (3, 4).

2) Sean dadas las funciones $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ y $z = x - 3y + \sqrt{3xy}$. Hallar el ángulo entre los gradientes de estas funciones en el punto (3, 4).

3444. 1) Hallar el punto en el cual el gradiente de la función $z = \ln\left(x + \frac{1}{y}\right)$ sea igual a $\mathbf{i} - \frac{16}{9}\mathbf{j}$.

2) Hallar los puntos en los cuales el módulo del gradiente de la función $z = (x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}$ sea igual a 2.

3445. Demostrar las siguientes relaciones (φ y ψ son funciones derivables, c es constante):

$$\operatorname{grad}(\varphi + \psi) = \operatorname{grad}\varphi + \operatorname{grad}\psi;\ \operatorname{grad}(c + \varphi) = \operatorname{grad}\varphi;$$
$$\operatorname{grad}(c\varphi) = c\operatorname{grad}\varphi;\ \operatorname{grad}(\varphi\psi) = \varphi\operatorname{grad}\psi + \psi\operatorname{grad}\varphi;$$
$$\operatorname{grad}(\varphi^n) = n\varphi^{n-1}\operatorname{grad}\varphi;\ \operatorname{grad}[\varphi(\psi)] = \varphi'(\psi)\operatorname{grad}\psi.$$

3446. $z = \varphi(u, v)$, $u = \psi(x, y)$, $v = \zeta(x, y)$. Mostrar que

$$\operatorname{grad} z = \frac{\partial\varphi}{\partial u}\operatorname{grad} u + \frac{\partial\varphi}{\partial v}\operatorname{grad} v.$$

3447. 1) $u(x, y, z) = x^2y^2z$. Hallar las proyecciones de grad $\boldsymbol{u}$ en el punto (x_0, y_0, z_0).

2) $u(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Hallar grad u.

3448. Mostrar que la función $u = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$ satisface la relación $u = 2\ln 2 - \ln(\operatorname{grad} u)^2$.

3449. Demostrar que si x, y, z son funciones de t, se tiene

$$\frac{d}{dt} f(x, y, z) = \operatorname{grad} f \cdot \frac{d\boldsymbol{r}}{dt},$$

donde $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$.

3450. Aplicar la relación demostrada en el ejercicio anterior para hallar el gradiente de la función:

1) $f = \boldsymbol{r}^2$; 2) $f = |\boldsymbol{r}|$; 3) $f = F(\boldsymbol{r}^2)$; 4) $f = (\boldsymbol{a}\boldsymbol{r})(\boldsymbol{b}\boldsymbol{r})$; 5) $f = (\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}\boldsymbol{r})$;

donde $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ son vectores constantes.

Derivada respecto a la dirección

3451. 1) Hallar la derivada de la función $z = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 + 1$ en el punto $M(3, 1)$ en la dirección que va desde este punto hasta el punto (6, 5).

2) Hallar la derivada de la función $z = \operatorname{arctg} xy$ en el punto (1, 1) en la dirección de la bisectriz del primer ángulo coordenado.

3) Hallar la derivada de la función $z = x^2y^2 - xy^3 - 3y - 1$ en el punto (2, 1) en la dirección que va desde éste al origen de coordenadas.

4) Hallar la derivada de la función $z = \ln(e^x + e^y)$ en el origen de coordenadas en la dirección del rayo que forma el ángulo α con el eje de abscisas.

3452. Hallar la derivada de la función $z = \ln(x + y)$ en el punto $(1, 2)$ perteneciente a la parábola $y^2 = 4x$ en la dirección de ésta.

3453. Hallar la derivada de la función $z = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$ en el punto $\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, perteneciente a la circunferencia $x^2 + y^2 - 2x = 0$, en la dirección de ésta.

3454. Demostrar que la derivada de la función $z = \frac{y^2}{x}$ en cualquier punto de la elipse $2x^2 + y^2 = 1$ en la dirección de la normal hacia la elipse, es igual a cero.

3455. 1) Hallar la derivada de la función $u = xy^2 + z^3 - xyz$ en el punto $M(1, 1, 2)$ en la dirección que forma ángulos de $60°$, $45°$, $60°$, respectivamente, con los ejes de coordenadas.

2) Hallar la derivada de la función $w = xyz$ en el punto $A(5, 1, 2)$ en la dirección que va desde este punto al punto $B(9, 4, 14)$.

3456. Hallar la derivada de la función $u = x^2y^2z^2$ en el punto $A(1, -1, 3)$ en la dirección que va desde este punto al punto $B(0, 1, 1)$.

3457. Demostrar que la derivada de la función $u = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$ en cualquier punto $M(x, y, z)$ en la direccion que va desde éste al origen de coordenadas, es igual a $-\frac{2u}{r}$, donde $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

3458. Demostrar que la derivada de la función $u = f(x, y, z)$ en la dirección de su gradiente es igual al módulo de éste.

3459. Hallar la derivada de la función

$$u = \frac{1}{r}, \text{ donde } r^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

en la dirección de su gradiente.

Capítulo XII

Integrales múltiples e integración múltiple

§ 1. Integrales dobles y triples

3460. Una placa fina (se prescinde de su espesor) se halla en el plano xOy ocupando el dominio D. La densidad de la placa es función del punto $\gamma = \gamma(P) = \gamma(x, y)$. Hallar la masa de la placa.

3461. Por la misma placa (véase el ejercicio anterior) está distribuida la carga eléctrica de densidad superficial $\sigma = \sigma(P) = \sigma(x, y)$. Formar la expresión para la carga global de la placa.

3462. La misma placa (véase el ejercicio 3460) gira alrededor del eje Ox con la velocidad angular ω. Formar la expresión para la energía cinética de la placa.

3463. El calor específico de la placa (véase el ejercicio 3460) varía de acuerdo con la ley $c = c(P) = c(x, y)$. Hallar la cantidad de calor que recibió la placa al ser calentada desde la temperatura t_1 hasta t_2.

3464. El cuerpo ocupa un cierto dominio Ω en el espacio. Su densidad es función del punto $\gamma = \gamma(P) = \gamma(x, y, z)$. Hallar la masa del cuerpo.

3465. Por el mismo cuerpo (véase el ejercicio 3464) está distribuida, de manera no homogénea, la carga eléctrica cuya densidad es función del punto $\delta = \delta(x, y, z)$. Hallar la carga global del cuerpo.

Evaluar las integrales en los ejercicios 3466—3476.

3466. $\iint\limits_D (x+y+10)\,d\sigma$, donde D es el círculo $x^2+y^2 \leqslant 4$.

3467. $\iint\limits_D (x^2+4y^2+9)\,d\sigma$, donde D es el círculo $x^2+y^2 \leqslant 4$.

3468. $\iint\limits_D (x+y+1)\,d\sigma$, donde D es el rectángulo $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 2$.

3469. $\iint\limits_D (x+xy-x^2-y^2)\,d\sigma$, donde D es el rectángulo $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 2$.

3470. $\iint\limits_D xy(x+y)\,d\sigma$, donde D es el cuadrado $0 \leqslant x \leqslant 2$, $0 \leqslant y \leqslant 2$.

3471. $\iint\limits_D (x+1)^y\,d\sigma$, donde D es el cuadrado $0 \leqslant x \leqslant 2$, $0 \leqslant y \leqslant 2$.

3472. $\iint\limits_D (x^2+y^2-2\sqrt{x^2+y^2}+2)\,d\sigma$, donde D es el cuadrado $0 \leqslant x \leqslant 2$, $0 \leqslant y \leqslant 2$.

3473. $\iint\limits_D (x^2+y^2-4x-4y+10)\,d\sigma$, donde D es el dominio acotado por la elipse $x^2+4y^2-2x-16y+13=0$ (incluyendo la frontera).

3474. $\iiint\limits_\Omega (x^2+y^2+z^2)\,dv$, donde Ω es la esfera $x^2+y^2+z^2 \leqslant \leqslant R^2$.

3475. $\iiint\limits_\Omega (x+y+z)\,dv$, donde Ω es el cubo $x \geqslant 1$, $y \geqslant 1$, $z \geqslant 1$, $x \leqslant 3$, $y \leqslant 3$, $z \leqslant 3$.

3476. $\iiint\limits_\Omega (x+y-z+10)\,dv$, donde Ω es la esfera $x^2+y^2+ +z^2 \leqslant 3$.

§ 2. Integración múltiple

Integral doble. Dominio rectangular

En los ejercicios 3477—3484 calcular las integrales dobles tomadas sobre los dominios rectangulares de integración D, dados por los datos indicados entre paréntesis.

3477. $\iint\limits_D xy\,dx\,dy \qquad (0 \leqslant x \leqslant 1,\quad 0 \leqslant y \leqslant 2)$.

3478. $\iint\limits_D e^{x+y}\,dx\,dy \qquad (0 \leqslant x \leqslant 1,\quad 0 \leqslant y \leqslant 1)$.

3479. $\iint\limits_D \frac{x^2}{1+y^2}\,dx\,dy$ $\quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \quad 0 \leqslant y \leqslant 1)$

3480. $\iint\limits_D \frac{dx\,dy}{(x+y+1)^2}$ $\quad (0 \leqslant x \leqslant 1, \quad 0 \leqslant y \leqslant 1).$

3481. $\iint\limits_D \frac{y\,dx\,dy}{(1+x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$ $\quad (0 \leqslant x \leqslant 1, \quad 0 \leqslant y \leqslant 1)$

3482. $\iint\limits_D x \operatorname{sen}(x+y)\,dx\,dy$ $\quad \left(0 \leqslant x \leqslant \pi, \quad 0 \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}\right)$

3483. $\iint\limits_D x^2 y e^{xy}\,dx\,dy$ $\quad (0 \leqslant x \leqslant 1, \quad 0 \leqslant y \leqslant 2).$

3484. $\iint\limits_D x^2 y \cos(xy^2)\,dx\,dy$ $\quad \left(0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leqslant y \leqslant 2\right).$

Integral doble. Cualquier dominio

En los ejercicios 3485—3497 hallar los límites de la integral iterada de segundo orden $\iint\limits_D f(x, y)\,dx\,dy$ siendo dados los dominios finitos de integración D.

3485. Paralelogramo cuyos lados son
$x = 3, \quad x = 5, \quad 3x - 2y + 4 = 0, \quad 3x - 2y + 1 = 0.$

3486. Triángulo cuyos lados son $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 2$.

3487. $x^2 + y^2 \leqslant 1$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$.

3488. $x + y \leqslant 1$, $x - y \leqslant 1$, $x \geqslant 0$.

3489. $y \geqslant x^2$, $y \leqslant 4 - x^2$.

3490. $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \leqslant 1$. 3491. $(x-2)^2 + (y-3)^2 \leqslant 4$.

3492. D está limitado por las parábolas $y = x^2$ e $y = \sqrt{x}$.

3493. Triángulo cuyos lados son $y = x$, $y = 2x$, $x + y = 6$.

3494. Paralelogramo cuyos lados son $y = x$, $y = x + 3$, $y = -2x + 1$, $y = -2x + 5$.

3495. $y - 2x \leqslant 0$, $2y - x \geqslant 0$, $xy \leqslant 2$.

3496. $y^2 \leqslant 8x$, $y \leqslant 2x$, $y \leqslant 4x - 24 \leqslant 0$.

3497. D está limitado por la hipérbola $y^2 - x^2 = 1$ y por la circunferencia $x^2 + y^2 = 9$ (se tiene en cuenta el dominio que contiene el origen de coordenadas).

En los ejercicios 3498—3503 cambiar el orden de integración.

3498. $\int\limits_0^1 dy \int\limits_y^{\sqrt{y}} f(x, y)\,dx.$ 3499. $\int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y)\,dy.$

3500. $\int\limits_0^r dx \int\limits_x^{\sqrt{2rx-x^2}} f(x, y)\,dy.$ **3501.** $\int\limits_{-2}^{2} dx \int\limits_{-\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{4-x^2}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{4-x^2}} f(x, y)\,dy.$

3502. $\int\limits_1^2 dx \int\limits_x^{2x} f(x, y)\,dy.$ **3503.** $\int\limits_0^2 dx \int\limits_{2x}^{6-x} f(x, y)\,dy.$

3504. Cambiando el orden de integración escribir la expresión dada en forma de una integral iterada de segundo orden:

1) $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^x f(x, y)\,dy + \int\limits_1^2 dx \int\limits_0^{2-x} f(x, y)\,dy;$

2) $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{x^2} f(x, y)\,dy + \int\limits_1^3 dx \int\limits_0^{\frac{3-x}{2}} f(x, y)\,dy;$

3) $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{x^{2/3}} f(x, y)\,dy + \int\limits_1^2 dx \int\limits_0^{1-\sqrt{4x-x^2-3}} f(x, y)\,dy.$

3505. Representar la integral doble $\iint\limits_D f(x, y)\,dx\,dy$, donde D son los dominios indicados en las figs. 62, 63, 64, 65, en forma de

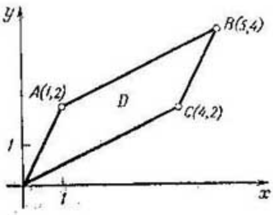

Fig. 62

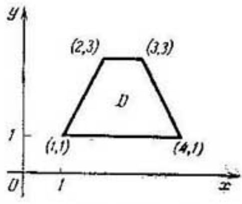

Fig. 63

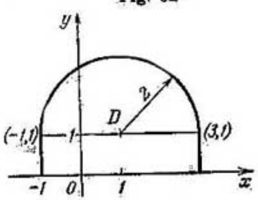

Fig. 64

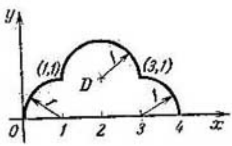

Fig. 65

la suma de las integrales iteradas de segundo orden (con el menor número posible de sumandos). Las figuras de las ilustraciones 64 y 65 representan rectas y arcos de circunferencias.

En los ejercicios 3506—3512 calcular las integrales dadas.

3506. 1) $\int\limits_0^a dx \int\limits_0^{\sqrt{x}} dy$; 2) $\int\limits_2^4 dx \int\limits_x^{2x} \frac{y}{x} dy$; 3) $\int\limits_1^2 dy \int\limits_0^{\ln y} e^x dx$.

3507. $\iint\limits_D x^3y^2\,dx\,dy$, D es el círculo $x^2+y^2 \leqslant R^2$.

3508. $\iint\limits_D (x^2+y)\,dx\,dy$, D es un dominio acotado por las parábolas $y=x^2$ e $y^2=x$.

3509. $\iint\limits_D \frac{x^2}{y^2}\,dx\,dy$, D es un dominio acotado por las rectas $x=2$, $y=x$ y la hipérbola $xy=1$.

3510. $\iint\limits_D \cos(x+y)\,dx\,dy$, D es un dominio acotado por las rectas $x=0$, $y=\pi$ e $y=x$.

3511. $\iint\limits_D \sqrt{1-x^2-y^2}\,dx\,dy$, D es la cuarta parte del círculo $x^2+y^2 \leqslant 1$ que se halla en el primer cuadrante.

3512. $\iint\limits_D x^2y^2\sqrt{1-x^3-y^3}\,dx\,dy$, D es un dominio acotado por la línea $x^3+y^3=1$ y los ejes de coordenadas.

3513. Hallar el valor medio de la función $z = 12 - 2x - 3y$ en el dominio acotado por las rectas $12 - 2x - 3y = 0$, $x = 0$, $y = 0$.

3514. Hallar el valor medio de la función $z = 2x + y$ en el triángulo limitado por los ejes de coordenadas y la recta $x + y = 3$.

3515. Hallar el valor medio de la función $z = x + 6y$ en el triángulo limitado por las rectas $y = x$, $y = 5x$ y $x = 1$.

3516. Hallar el valor medio de la función $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ en el círculo $x^2 + y^2 \leqslant R^2$.

Integral triple

En los ejercicios 3517—3524 calcular las integrales.

3517. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^2 dy \int\limits_0^3 dz$. 3518. $\int\limits_0^a dx \int\limits_0^b dy \int\limits_0^c (x+y+z)\,dz$.

3519. $\int\limits_0^a dx \int\limits_0^x dy \int\limits_0^y xyz\,dz.$ **3520.** $\int\limits_0^a dx \int\limits_0^x dy \int\limits_0^{xy} x^3y^3z\,dz.$

3521. $\int\limits_0^{e-1} dx \int\limits_0^{e-x-1} dy \int\limits_e^{x+y+e} \frac{\ln(z-x-y)}{(x-e)(x+y-e)}\,dz.$

3522. $\iiint\limits_\Omega \frac{dx\,dy\,dz}{(x+y+z+1)^3}$, Ω es un dominio limitado por los planos $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x+y+z=1$.

3523. $\iiint\limits_\Omega xy\,dx\,dy\,dz$, Ω es un dominio limitado por el paraboloide hiperbólico $z=xy$ y los planos $x+y=1$ y $z=0$ $(z \geqslant 0)$.

3524. $\iiint\limits_\Omega y\cos(z+x)\,dx\,dy\,dz$, Ω es un dominio limitado por el cilindro $y=\sqrt{x}$ y los planos $y=0$, $z=0$ y $x+z=\pi/2$.

§ 3. Integrales en los sistemas de coordenadas polares, cilíndricas y esféricas

Integral doble

En los ejercicios 3525—3531 pasar a las coordenadas polares ρ y φ $(x=\rho\cos\varphi,\ y=\rho\,\mathrm{sen}\,\varphi)$ en la integral doble $\iint\limits_D f(x, y)\,dx\,dy$ y apuntar los límites de integración.

3525. D es el círculo: 1) $x^2+y^2 \leqslant R^2$; 2) $x^2+y^2 \leqslant ax$; 3) $x^2+y^2 \leqslant by$.

3526. D es un dominio limitado por las circunferencias $x^2+y^2=4x$, $x^2+y^2=8x$ y las rectas $y=x$, $y=2x$.

3527. D es el dominio que es la parte común de dos círculos $x^2+y^2 \leqslant ax$, $x^2+y^2 \leqslant by$.

3528. D es un dominio limitado por las rectas

$$y=x, \quad y=0 \quad \text{y} \quad x=1.$$

3529. D es el menor de los segmentos en que es cortado el círculo $x^2+y^2 \leqslant 4$ por la recta $x+y=2$.

3530. D es la parte interior del lazo derecho de la lemniscata de Bernoulli $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$.

3531. D es un dominio definido por las desigualdades $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $(x^2+y^2)^3 \leqslant 4a^2x^2y^2$.

En los ejercicios 3532—3535 transformar las integrales dobles a las coordenadas polares.

3532. $\int\limits_0^R dx \int\limits_0^{\sqrt{R^2-x^2}} f(x, y)\, dy.$ **3533.** $\int\limits_{\frac{R}{2}}^{2R} dy \int\limits_0^{\sqrt{2Ry-y^2}} f(x, y)\, dx.$

3534. $\int\limits_0^R dx \int\limits_0^{\sqrt{R^2-x^2}} f(x^2+y^2)\, dy.$

3535. $\int\limits_0^{\frac{R}{\sqrt{1+R^2}}} dx \int\limits_0^{Rx} f\left(\frac{x}{y}\right) dy + \int\limits_{\frac{R}{\sqrt{1+R^2}}}^{R} dx \int\limits_0^{\sqrt{R^2-x^2}} f\left(\frac{y}{x}\right) dy.$

En los ejercicios 3536—3540 calcular las integrales dobles pasando a las coordenadas polares.

3536. $\int\limits_0^R dx \int\limits_0^{\sqrt{R^2-x^2}} \ln(1+x^2+y^2)\, dy.$

3537. $\iint\limits_D \sqrt{\frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}}\, dx\, dy$, donde el dominio D viene determinado por las desigualdades $x^2+y^2 \leqslant 1$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$.

3538. $\iint\limits_D (h-2x-3y)\, dx\, dy$, donde D es el círculo $x^2+y^2 \leqslant R^2$.

3539. $\iint\limits_D \sqrt{R^2-x^2-y^2}\, dx\, dy$, donde D es el círculo $x^2+y^2 \leqslant Rx$.

3540. $\iint\limits_D \operatorname{arctg} \frac{y}{x}\, dx\, dy$, donde D es una parte del círculo

$$x^2+y^2 \geqslant 1,\ x^2+y^2 \leqslant 9,\ y \geqslant \frac{x}{\sqrt{3}},\ y \leqslant x\sqrt{3}.$$

3541. Partiendo de razonamientos geométricos mostrar que si las coordenadas cartesianas se transforman de acuerdo con las fórmulas $x = a\rho \cos \varphi$, $y = b\rho \operatorname{sen} \varphi$ (a y b son constantes), el elemento de área será el siguiente:

$$d\sigma = ab\rho\, d\rho\, d\varphi.$$

En los ejercicios 3542—3544 transformar las integrales dobles aplicando el resultado del ejercicio anterior y seleccionando a y b de manera conveniente.

3542. $\iint\limits_D f(x, y)\,dx\,dy$, donde el dominio D está limitado por la elipse $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$.

3543. $\iint\limits_D f(x, y)\,dx\,dy$, donde el dominio D está limitado por la línea $\left(x^2+\frac{y^2}{3}\right)^2=x^2y$.

3544. $\iint\limits_D f\left(\sqrt{4-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\right)dx\,dy$, donde D es una parte del anillo elíptico limitada por las elipses $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, $\frac{x^2}{4a^2}+\frac{y^2}{4b^2}=1$ y situada en el primer cuadrante.

3545. Calcular la integral $\iint\limits_D xy\,dx\,dy$, donde D es un dominio limitado por la elipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ y situado en el primer cuadrante.

3546. Calcular la integral $\iint\limits_D \sqrt{xy}\,dx\,dy$, donde D es un dominio limitado por la línea $\left(\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{3}\right)^4=\frac{xy}{\sqrt{6}}$ y situado en el primer cuadrante.

Integral triple

En los ejercicios 3547—3551 pasar a las coordenadas cilíndri cas ρ, φ, z ($x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\,\mathrm{sen}\,\varphi$, $z=z$) o a las coordenadas esféricas ρ, θ, φ ($x=\rho\cos\varphi\,\mathrm{sen}\,\theta$, $y=\rho\,\mathrm{sen}\,\varphi\,\mathrm{sen}\,\theta$, $z=\rho\cos\theta$) en la integral triple $\iiint\limits_\Omega f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz$ e indicar los límites de integración.

3547. Ω es un dominio que se halla situado en el primer octante y limitado por el cilindro $x^2+y^2=R^2$ y los planos $z=0$, $z=1$, $y=x$, $y=\sqrt{3}$.

3548. Ω es un dominio limitado por el cilindro $x^2+y^2=2x$, el plano $z=0$ y el paraboloide $z=x^2+y^2$.

3549. Ω es una parte de la esfera $x^2+y^2+z^2\leqslant R^2$ situada en el primer octante.

3550. Ω es una parte de la esfera $x^2+y^2+z^2\leqslant R^2$ situada dentro del cilindro $(x^2+y^2)^2=R^2(x^2-y^2)$ $(x\geqslant 0)$.

3551. Ω es la parte común de dos esferas

$$x^2+y^2+z^2\leqslant R^2 \quad \text{y} \quad x^2+y^2+(z-R)^2\leqslant R^2.$$

En los ejercicios 3552—3558 calcular las integrales pasando a las coordenadas cilíndricas o a las esféricas.

3552. $\displaystyle\int_0^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_0^a dz.$

3553. $\displaystyle\int_0^2 dx \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} dy \int_0^a z\sqrt{x^2+y^2}\, dz.$

3554. $\displaystyle\int_{-R}^{R} dx \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} dy \int_0^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} (x^2+y^2)\, dz$

3555. $\displaystyle\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} \sqrt{x^2+y^2+z^2\, dz.}$

3556. $\displaystyle\iiint\limits_{\Omega} (x^2+y^2)\, dx\, dy\, dz$, donde el dominio Ω viene determinado por las desigualdades $z\geqslant 0$, $r^2\leqslant x^2+y^2+z^2\leqslant R^2$.

3557. $\displaystyle\iiint\limits_{\Omega} \frac{dx\, dy\, dz}{\sqrt{x^2+y^2+(z-2)^2}}$, donde Ω es la esfera x^2+y^2+ $+z^2\leqslant 1$.

3558. $\displaystyle\iiint\limits_{\Omega} \frac{dx\, dy\, dz}{\sqrt{x^2+y^2+(z-2)^2}}$, donde Ω es el cilindro $x^2+y^2\leqslant$ $\leqslant 1$, $-1\leqslant z\leqslant 1$.

§ 4. Aplicaciones de integrales dobles y triples

Volumen del cuerpo. I

En los ejercicios 3559—3596 hallar los volúmenes de los cuerpos limitados por las superficies que se indican, aplicando la integración doble (los parámetros que se indican en los ejercicios se consideran positivos).

3559. Por los planos de coordenadas, los planos $x = 4$ e $y = 4$ y el paraboloide de revolución $z = x^2 + y^2 + 1$.

3560. Por los planos de coordenadas, los planos $x = a$, $y = b$, y el paraboloide elíptico $z = \frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2q}$.

3561. Por el plano $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ y los planos coordenados (pirámide).

3562. Por los planos $y = 0$, $z = 0$, $3x + y = 6$, $3x + 2y = 12$ y $x + y + z = 6$.

3563. Por el paraboloide de revolución $z = x^2 + y^2$, los planos coordenados y el plano $x + y = 1$.

3564. Por el paraboloide de revolución $z = x^2 + y^2$ y los planos $z = 0$, $y = 1$, $y = 2x$, $y = 6 - x$.

3565. Por los cilindros $y = \sqrt{x}$, $y = 2\sqrt{x}$, y los planos $z = 0$, $x + z = 6$.

3566. Por los planos coordenados, el plano $2x + 3y - 12 = 0$ y el cilindro $z = y^2/2$.

3567. Por el cilindro $z = 9 - y^2$, los planos coordenados y el plano $3x + 4y = 12$ $(y \geqslant 0)$.

3568. Por el cilindro $z = 4 - x^2$, los planos coordenados y el plano $2x + y = 4$ $(x \geqslant 0)$.

3569* Por el cilindro $2y^2 = x$, los planos $\frac{x}{4} + \frac{y}{2} + \frac{z}{4} = 1$ y $z = 0$.

3570. Por el cilindro circular de radio r cuyo eje es el de ordenadas, por los planos coordenados y por el plano $\frac{x}{r} + \frac{y}{a} = 1$.

3571. Por el cilindro elíptico $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$, los planos $z = 12 - 3x - 4y$ y $z = 1$.

3572. Por los cilindros $x^2 + y^2 = R^2$ y $x^2 + z^2 = R^2$.

3573. Por los cilindros $z = 4 - y^2$, $y = \frac{x^2}{2}$ y el plano $z = 0$.

3574. Por los cilindros $x^2 + y^2 = R^2$, $z = \frac{x^3}{a^2}$ y el plano $z = 0$ $(x \geqslant 0)$.

3575. Por el paraboloide hiperbólico $z = x^2 - y^2$ y los planos $z = 0$, $x = 3$.

3576. Por el paraboloide hiperbólico $z = xy$, el cilindro $y = \sqrt{x}$ y los planos $x + y = 2$, $y = 0$ y $z = 0$.

3577. Por el paraboloide $z = x^2 + y^2$, el cilindro $y = x^2$ y los planos $y = 1$ y $z = 0$.

3578. Por el cilindro elíptico $\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ y los planos $y = \frac{b}{a} x$, $y = 0$ y $z = 0$ $(x \geqslant 0)$.

3579. Por el paraboloide $z = \frac{a^2 - x^2 - 4y^2}{a}$ y el plano $z = 0$.

3580. Por los cilindros $y = e^x$, $x = e^{-x}$, $z = e^2 - y^2$ y el plano $z = 0$.

3581. Por los cilindros $y = \ln x$, $y = \ln^2 x$ y los planos $z = 0$ e $y + z = 1$.

3582*. Por los cilindros $z = \ln x$ y $z = \ln y$ y los planos $z = 0$ y $x + y = 2e$ $(x \geqslant 1)$.

3583. Por los cilindros $y = x + \operatorname{sen} x$, $y = x - \operatorname{sen} x$ y $z = \frac{(x + y)}{4}$ (cilindro parabólico cuyas generatrices son paralelas a la recta $x - y = 0$, $z = 0$) y el plano $z = 0$ $(0 \leqslant x \leqslant \pi, y \geqslant 0)$.

3584. Por la superficie cónica $z^2 = xy$ (véase la fig. 66), el cilindro $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$ y el plano $z = 0$.

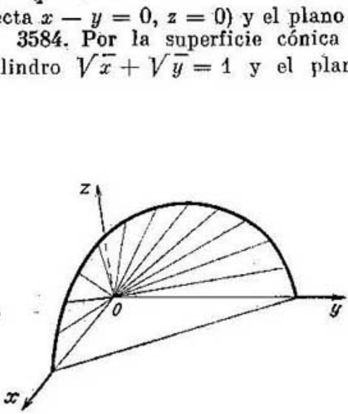

Fig. 66

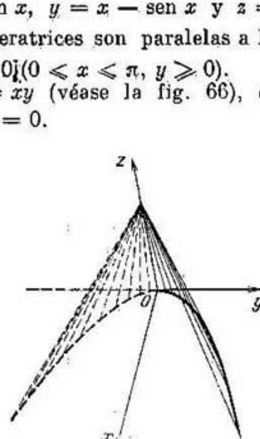

Fig. 67

3585. Por la superficie cónica $4y^2 = x(2 - z)$ (cono parabólico, véase la fig. 67) y los planos $z = 0$ y $x + z = 2$.

3586. Por la superficie $z = \cos x \cdot \cos y$ y los planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ y $x + y = \pi/2$.

3587. Por el cilindro $x^2 + y^2 = 4$, los planos $z = 0$ y $z = x + y + 10$.

3588. Por el cilindro $x^2 + y^2 = 2x$, los planos $2x - z = 0$ y $4x - z = 0$.

3589. Por el cilindro $x^2 + y^2 = R^2$, el paraboloide $Rz = 2R^2 + x^2 + y^2$ y el plano $z = 0$.

3590. Por el cilindro $x^2 + y^2 = 2ax$, el paraboloide $z = \frac{x^2 + y^2}{a}$ y el plano $z = 0$.

3591. Por la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ y el cilindro $x^2 + y^2 = ax$. (Problema de Viviani).

3592. Por el paraboloide hiperbólico $z = \frac{xy}{a}$, el cilindro $x^2 + y^2 = ax$ y el plano $z = 0$ $(x \geqslant 0,\ y \geqslant 0)$.

3593. Por los cilindros $x^2 + y^2 = x$ y $x^2 + y^2 = 2x$, el paraboloide $z = x^2 + y^2$ y los planos $x + y = 0$, $x - y = 0$ y $z = 0$.

3594. Por los cilindros $x^2 + y^2 = 2x$, $x^2 + y^2 = 2y$ y por los planos $z = x + 2y$ y $z = 0$.

3595. Por la superficie cónica $z^2 = xy$ y el cilindro $(x^2 + y^2)^2 = 2xy$ $(x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ z \geqslant 0)$.

3596. Por el helicoide («escalera de caracol») $z = h \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$, el cilindro $x^2 + y^2 = R^2$ y los planos $x = 0$, $z = 0$ $(x \geqslant 0,\ y \geqslant 0)$.

Area de la figura plana

En los ejercicios 3597—3608 hallar las áreas de los dominios que se indican efectuando la integración doble.

3597. Del dominio limitado por las rectas $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 1$.

3598. Del dominio limitado por las rectas $y = x$, $y = 5x$, $x = 1$.

3599. Del dominio limitado por la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

3600. Del dominio comprendido entre la parábola $y^2 = \frac{b^2}{a} x$ y la recta $y = \frac{b}{a} x$.

3601. Del dominio limitado por las parábolas $y = \sqrt{x}$, $y = 2\sqrt{x}$, y la recta $x = 4$.

3602*. Del dominio limitado por la línea $(x^2 + y^2)^2 = 2ax^3$.

3603. Del dominio limitado por la línea $(x^2 + y^2)^3 = x^4 + y^4$.

3604. Del dominio limitado por la línea $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2 (x^2 - y^2)$ (lemniscata de Bernoulli).

3605. Del dominio limitado por la línea $x^3 + y^3 = 2xy$ situada en el primer cuadrante (lazo).

3606. Del dominio limitado por la línea $(x+y)^3 = xy$ situada en el primer cuadrante (lazo).

3607. Del dominio limitado por la línea $(x+y)^5 = x^2y^2$ situada en el primer cuadrante (lazo).

3608*. Del dominio limitado por la línea

1) $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^2=\frac{xy}{c^2}$; 2) $\left(\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}\right)^2=\frac{x^2+y^2}{25}$.

Volumen del cuerpo. II

En los ejercicios 3609—3625 calcular los volúmenes de los cuerpos limitados por las superficies dadas efectuando la integración triple (los parámetros que se indican en los ejercicios se consideran positivos).

3609. Por los cilindros $z = 4 - y^2$ y $z = y^2 + 2$ y por los planos $x = -1$ y $x = 2$.

3610. Por los paraboloides $z = x^2 + y^2$ y $z = x^2 + 2y^2$ y los planos $y = x$, $y = 2x$ y $x = 1$.

3611. Por los paraboloides $z = x^2 + y^2$ y $z = 2x^2 + 2y^2$, el cilindro $y = x^2$ y el plano $y = x$.

3612. Por los cilindros $z = \ln(x+2)$ y $z = \ln(6-x)$ y los planos $x = 0$, $x + y = 2$ y $x - y = 2$.

3613*. Por el paraboloide $(x-1)^2 + y^2 = z$ y el plano $2x + z = 2$.

3614*. Por el paraboloide $z = x^2 + y^2$ y el plano $z = x + y$.

3615*. Por la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ y el paraboloide $x^2 + y^2 = 3z$.

3616. Por la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ y el paraboloide $x^2 + y^2 = R(R - 2z)$ $(z \geqslant 0)$.

3617. Por el paraboloide $z = x^2 + y^2$ y el cono $z^2 = xy$.

3618. Por la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4Rz - 3R^2$ y el cono $z^2 = 4(x^2 + y^2)$ (se tiene en cuenta la parte de la esfera situada dentro del cono).

3619*. $(x^2+y^2+z^2)^2 = a^3x$. **3620.** $(x^2+y^2+z^2)^2 = axyz$.

3621. $(x^2+y^2+z^2)^3 = a^2z^4$. **3622.** $(x^2+y^2+z^2)^3 = \frac{a^6z^2}{x^2+y^2}$.

3623. $(x^2 + y^2 + z^2)^3 = a^2(x^2 + y^2)^2$.

3624. $(x^2 + y^2)^2 + z^4 = a^3z$.

3625. $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x^2 + y^2 + z^2 = 16$, $z^2 = x^2 + y^2$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ $(x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ z \geqslant 0)$.

Area de la superficie

3626. Calcular la parte del plano $6x + 3y + 2z = 12$ que está situada en el primer octante.

3627. Calcular el área de la parte de la superficie $z^2 = 2xy$ la cual se halla por encima del rectángulo situado en el plano $z = 0$ y limitado por las rectas $x = 0$, $y = 0$, $x = 3$, $y = 6$.

3628. Hallar el área de la parte del cono $z^2 = x^2 + y^2$ situada por encima del plano Oxy y recortada por el plano $z = \sqrt{2}\left(\frac{x}{2} + 1\right)$.

En los ejercicios 3629—3639 hallar las áreas de las partes indicadas de las superficies dadas.

3629. De la parte $z^2 = x^2 + y^2$ recortada por el cilindro $z^2 = 2py$.

3630. De la parte $y^2 + z^2 = x^2$ situada dentro del cilindro $x^2 + y^2 = R^2$.

3631. De la parte $y^2 + z^2 = x^2$ recortada por el cilindro $x^2 - y^2 = a^2$ y los planos $y = b$, $y = -b$.

3632. De la parte $z^2 = 4x$ recortada por el cilindro $y^2 = 4x$ y el plano $x = 1$.

3633. De la parte $z = xy$ recortada por el cilindro $x^2 + y^2 = R^2$.

3634. De la parte $2z = x^2 + y^2$ recortada por el cilindro $x^2 + y^2 = 1$.

3635. De la parte $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ recortada por el cilindro $x^2 + y^2 = R^2$ $(R \leqslant a)$.

3636. De la parte $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ recortada por el cilindro $x^2 + y^2 = Rx$.

3637. De la parte $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ recortada por la superficie $(x^2 + y^2)^2 = R^2(x^2 - y^2)$.

3638. De la parte $z = \frac{x+y}{x^2+y^2}$ recortada por las superficies $x^2 + y^2 = 1$, $x^2 + y^2 = 4$ que está situada en el primer octante.

3639. De la parte $(x \cos \alpha + y \operatorname{sen} \alpha)^2 + z^2 = a^2$ situada en el primer octante $(\alpha < \pi/2)$.

3640*. Calcular el área de la superficie terrestre (considerándola esférica y siendo su radio $R \approx 6400$ km) comprendida entre los meridianos $\varphi = 30°$, $\varphi = 60°$ y los paralelos $\theta = 45°$ y $\theta = 60°$.

3641. Calcular el área total de la superficie del cuerpo limitado por la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 3a^2$ y el paraboloide $x^2 + y^2 = 2az$ $(z \geqslant 0)$.

3642. Los ejes de dos cilindros iguales, de radio R, se cortan formando el ángulo recto. Hallar el área de la parte de la superficie de uno de los dos cilindros, la cual se halla dentro del otro cilindro.

Momentos y centro de gravedad

En los ejercicios 3643—3646 hallar los momentos estáticos de las figuras planas homogéneas aplicando la integración doble (la densidad $\gamma = 1$).

3643. Del rectángulo de lados a y b, respecto al lado a.

3644. Del semicírculo respecto al diámetro.

3645. Del círculo respecto a una tangente.

3646. Del hexágono regular respecto a su lado.

3647. Demostrar que el momento estático del triángulo de base a, respecto a esta base depende sólo de la altura del mismo.

En los ejercicios 3648—3652 hallar los centros de gravedad de las figuras planas homogéneas efectuando la integración doble.

3648. De la figura limitada por la mitad superior de la elipse la cual se apoya en el eje mayor.

3649. De la figura limitada por la sinusoide $y = \operatorname{sen} x$, el eje Ox y la recta $x = \pi/4$.

3650. Del sector circular correspondiente al ángulo central α (el radio del círculo es igual a R).

3651. Del segmento circular correspondiente al ángulo central α (el radio del círculo es igual a R).

3652. De la figura limitada por la línea cerrada $y^2 = x^2 - x^4$ $(x \geqslant 0)$.

En los ejercicios 3653—3659 hallar los momentos de inercia de las figuras planas homogéneas (la densidad $\gamma = 1$).

3653. Del círculo de radio R, con respecto a su tangente.

3654. Del cuadrado, de lado a, con respecto a su vértice.

3655. De la elipse con respecto a su centro.

3656. Del rectángulo, de lados a y b, con respecto al punto de intersección de las diagonales.

3657. Del triángulo isósceles, de base a y la altura h, con respecto a su vértice.

3658. Del círculo de radio R con respecto al punto situado sobre su circunferencia.

3659. Del segmento de la parábola cuya cuerda es perpendicular al eje, con respecto al vértice de la parábola (la longitud de la cuerda es igual a a, la flecha, h).

3660. Demostrar que el momento de inercia del anillo circular, con respecto al centro, es dos veces mayor que el momento de inercia con respecto a cualquier eje que pasa por el centro del anillo y se halla situado en su plano.

3661. Demostrar que la suma de los momentos de inercia de la figura plana F, con respecto a cualquier par de ejes perpendiculares entre sí, que se hallan situados en el mismo plano que la figura y que pasan por un punto inmóvil O, es una magnitud constante.

3662*. Demostrar que el momento de inercia de la figura plana, con respecto a un eje es igual a $Md^2 + I_c$, donde M es la masa distribuida por la superficie, d es la distancia que media entre el eje y el centro de gravedad de la figura, I_c es el momento de inercia con respecto al eje que es paralelo al eje dado y que pasa por el centro de gravedad de la figura (teorema de Steiner).

En los ejercicios 3663—3665 hallar los momentos estáticos de los cuerpos homogéneos (la densidad $\gamma = 1$).

3663. Del paralelepípedo recto, de aristas a, b y c, con respecto a sus caras.

3664. Del cono circular recto (el radio de la base es R, la altura H), con respecto al plano que pasa por el vértice siendo paralelo a la base.

3665. Del cuerpo limitado por el elipsoide $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ y el plano Oxy con respecto a este mismo.

En los ejercicios 3666—3672 hallar los centros de gravedad de los cuerpos homogéneos limitados por los planos dados.

3666. Por los planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x = 2$, $y = 4$ y $x + y + z = 8$ (paralelepípedo truncado).

3667. Por el elipsoide $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ y los planos coordenados (se tiene en cuenta el cuerpo situado en el primer octante).

3668. Por el cilindro $z = \frac{y^2}{2}$ y los planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ y $2x + 3y - 12 = 0$.

3669. Por los cilindros $y = \sqrt{x}$, $y = 2\sqrt{x}$ y los planos $z = 0$ y $x + z = 6$.

3670. Por el paraboloide $z = \frac{x^2+y^2}{2a}$ y la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 3a^2$ ($z \geqslant 0$).

3671. Por la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ y el cono $z \operatorname{tg} \alpha = \sqrt{x^2 + y^2}$ (sector esférico).

3672. $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^3 z$.

En los ejercicios 3673—3674 hallar los centros de gravedad de las superficies homogéneas.

3673. De la parte de la esfera situada en el primer octante.

3674. De la parte del paraboloide $x^2 + y^2 = 2z$ recortada por el plano $z = 1$.

En los ejercicios 3675—3680 hallar los momentos de inercia de los cuerpos homogéneos cuya masa es igual a M.

3675. Del paralelepípedo recto, de aristas a, b, y c, con respecto a cada una de las mismas y con respecto al centro de gravedad.

3676. De la esfera con respecto a una tangente recta.

3677. Del elipsoide $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ con respecto a cada uno de sus tres ejes.

3678. Del cilindro circular recto (el radio de la base es R, la altura, H), con respecto al diámetro de la base y con respecto al diámetro de su sección media.

3679. De la esfera vacía cuyo radio exterior es igual a R y el interior, r, con respecto al diámetro.

3680. Del paraboloide de revolución (de radio de la base R y de altura H), con respecto al eje que pasa por su centro de gravedad y es perpendicular al eje de revolución (momento ecuatorial).

En los ejercicios 3681—3683 calcular los momentos de inercia de las partes indicadas de las superficies homogéneas (la masa de cada parte es igual a M).

3681. De la superficie lateral del cilindro (de radio de la base R y la altura H), con respecto al eje que pasa por su centro de gravedad y es perpendicular al eje del cilindro.

3682. De la parte del paraboloide $x^2+y^2=2cz$ recortada por el plano $z=c$, con respecto al eje Oz.

3683. De la superficie lateral del cono truncado (los radios de la base son iguales a R y r, la altura H), con respecto a su eje.

Diversos problemas

3684. Hallar la masa de una lámina cuadrada, de lado $2a$, si la densidad del material de la misma es proporcional al cuadrado de distancia a partir del punto de intersección de las diagonales y en las esquinas del cuadrado es igual a 1.

3685. Un anillo plano está limitado por dos circunferencias concéntricas cuyos radio son de R y r ($R>r$). Tomando en consideración que la densidad del material es inversamente proporcional a la distancia desde el centro de las circunferencias, hallar la masa del anillo. La densidad sobre la circunferencia del círculo interior es igual a 1.

3686. Una figura, limitada por una elipse de semiejes a y b, lleva distribuida sobre sí una masa de tal modo que su densidad es proporcional a la distancia desde el eje mayor, siendo igual a γ a la unidad de distancia del mismo eje. Hallar toda la masa.

3687. El cuerpo está limitado por dos superficies esféricas concéntricas cuyos radios son iguales a r y R ($R>r$). Teniendo en cuenta que la densidad del material es inversamente proporcional a la distancia desde el centro de las esferas y que a la distancia igual a la unidad, la densidad es igual a γ, hallar toda la masa del cuerpo.

3688. Calcular la masa del cuerpo limitado por un cilindro circular recto de radio R y de altura H si su densidad en cualquier punto es numéricamente igual al cuadrado de distancia que media entre este mismo punto y el centro de la base del cilindro.

3689*. Calcular la masa del cuerpo limitado por un cono circular cuya altura es igual a h y el ángulo formado entre el eje y la generatriz es igual a α. Se debe tener en cuenta que la densidad es proporcional al n-ésimo grado de distancia desde el plano trazado por el vértice del cono paralelamente a la base siendo igual a γ, a la distancia igual a la unidad ($n > 0$).

3690. Hallar la masa de la esfera de radio R teniendo en cuenta que la densidad es proporcional al cubo de distancia desde el centro e igual a γ, a la distancia igual a la unidad.

3691. Hallar la masa del cuerpo limitado por el paraboloide $x^2 + y^2 = 2az$ y la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 3a^2$ ($z > 0$), si la densidad en cada punto es igual a la suma de los cuadrados de coordenadas.

3692*. La densidad de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 2Rz$ en cualquier punto suyo numéricamente es igual al cuadrado de distancia que media entre este punto y el origen de coordenadas. Hallar las coordenadas del centro de gravedad de la esfera.

3693*. Hallar el momento estático de la parte común de las esferas $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant R^2$ y $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 2Rz$ respecto al plano Oxy. La densidad en cualquier punto del cuerpo numéricamente es igual a la distancia que media entre este punto y el plano xOy.

3694*. Demostrar que el momento de inercia de un cuerpo con respecto a cualquier eje es igual a $Md^2 + I_c$, donde M es la masa del cuerpo, d, la distancia desde el eje hasta el centro de gravedad del cuepro, e I_c es el momento de inercia con respecto al eje que es paralelo al eje dado y que pasa por el centro de gravedad del cuerpo (teorema de Steiner; compárese con el ejercicio 3662).

Resolver los problemas de los ejercicios 3695—3698 basándose en la ley de gravitación universal de Newton (véase la indicación ante el ejercicio 2670).

3695. Sea dada una esfera homogénea de radio R y de densidad γ. Calcular la fuerza con la cual atrae el punto material de la masa m que se encuentra a la distancia igual a a ($a > R$) de su centro. Mostrar que la fuerza de interacción es tal cual si toda la masa de la esfera estuviese concentrada en su centro.

3696*. Demostrar que la fuerza de interacción newtoniana entre dos esferas homogéneas es tal cual si las masas de las esferas estuviesen concentradas en sus centros.

3697. Sea dada la esfera maciza heterogénea $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant R^2$ cuya densidad varía de acuerdo con la ley $\gamma = \lambda z^2$. Calcular la fuerza con la cual atrae el punto material de masa m, si éste se halla en el eje z, a la distancia igual a $2R$ del centro de la esfera.

3698. Sea dado un cuerpo homogéneo limitado por dos esferas concéntricas (capa esférica). Demostrar que la atracción que ejerce esta capa sobre un punto situado dentro de la cavidad del cuerpo, es igual a cero.

Se llama el centro de presión al punto de aplicación de la resultante de todas las fuerzas de presión sobre la figura plana dada (todas las fuerzas de presión son perpendiculares al plano de la figura). Determinando las coordenadas del centro de presión se parte del concepto de que el momento estático de la resultante (es decir, de la presión sobre toda la superficie) respecto a cualquier eje es igual a la suma de los momentos estáticos de cada fuerza por separado respecto al mismo eje. Partiendo de todo lo sobredicho resolver los problemas de los ejercicios 3699—3701.

3699. Hallar el centro de presión del rectángulo de lados a y b $(a > b)$ cuyo lado mayor se halla situado a lo largo de la superficie libre del líquido, y el plano del rectángulo es perpendicular a esta superficie.

Mostrar que la posición del centro de presión, respecto al rectángulo, no sufrirá ningún cambio si el plano del rectángulo está inclinado hacia la superficie del líquido formando el ángulo α $(\alpha \neq 0)$.
¿Cómo cambiarían los resultados anteriores si el lado mayor a estuviese situado no en la superficie del líquido sino a la profundidad h (siguiendo paralelo a la superficie)?

3700. Un triángulo de altura h se halla situado en el plano inclinado hacia la superficie libre del líquido formando el ángulo α. ¿A qué profundidad se halla el centro de presión de este triángulo si:

a) la base del triángulo está en la superficie del líquido;

b) el vértice está en la superficie y la base es paralela a ésta?

3701. Hallar el centro de presión de la figura limitada por una elipse de semiejes a y b $(a > b)$, si el eje mayor es perpendicular a la superficie del líquido y el extremo superior del mismo eje se encuentra a la distancia h de la superficie.

3702*. Demostrar que la presión del líquido sobre una superficie plana sumergida libremente al agua es igual al peso de la columna cilíndrica de este líquido situado encima de la superficie si ésta está situada horizontalmente a la profundidad de su centro de gravedad.

§ 5. Integrales impropias Integrales dependientes del parámetro

Integrales impropias dobles y triples

En los ejercicios 3703—3711 calcular las integrales impropias o probar su divergencia.

3703. $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dx\,dy}{1+x^2+y^2}$.　　**3704.** $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dx\,dy}{(1+x^2+y^2)^{\frac{2}{3}}}$.

3705. $\int\limits_{0}^{\infty}\int\limits_{\infty}^{\infty}\frac{dx\,dy}{(x^2+y^2+a^2)^2}$.　　**3706.** $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-|x|-|y|}\,dx\,dy$.

3707. $\int\limits_{0}^{\infty}\int\limits_{0}^{\infty}(x+y)\,e^{-(x+y)}\,dx\,dy$.　　**3708.** $\int\limits_{0}^{\infty}\int\limits_{0}^{\infty}xye^{-x^2-y^2}\,dx\,dy$.

3709*. $\int\limits_{0}^{\infty}\int\limits_{0}^{\infty}e^{-(x^2+2xy\cos\alpha+y^2)}\,dx\,dy$.

3710*. $\int\limits_{0}^{\infty}dx\int\limits_{x}^{\infty}e^{-y^2}\,dy$.　　**3711*.** $\int\limits_{0}^{\infty}dx\int\limits_{0}^{\infty}xe^{-y}\frac{\operatorname{sen} y}{y^2}\,dx$.

En los ejercicios 3712—3715 esclarecer cuáles de las integrales impropias tomadas a lo largo del círculo de radio R con el centro en el origen de coordenadas, son convergentes.

3712. $\iint\limits_{D}\ln\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy$.　　**3713.** $\iint\limits_{D}\frac{e^{-x^2-y^2}}{x^2+y^2}\,dx\,dy$.

3714. $\iint\limits_{D}\frac{\operatorname{sen}(x^2+y^2)}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}\,dx\,dy$.　　**3715.** $\iint\limits_{D}\frac{\cos(x^2+y^2)}{x^2+y^2}\,dx\,dy$.

3716. ¿Podría ser seleccionado el número m de tal modo que la integral impropia $\iint\frac{dx\,dy}{\sqrt{(x^2+y^2)^m}}$ extendida por todo el plano sea convergente?

En los ejercicios 3717—3719 calcular las integrales impropias.

3717. $\int\limits_{0}^{\infty}\int\limits_{0}^{\infty}\int\limits_{0}^{\infty}\frac{dx\,dy\,dz}{\sqrt{(1+x+y+z)^7}}$　　**3718.** $\int\limits_{0}^{\infty}\int\limits_{0}^{\infty}\int\limits_{0}^{\infty}\frac{xy\,dx\,dy\,d}{(1+x^2+y^2+z^2)^3}$.

3719*. $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2-y^2-z^2}\,dx\,dy\,dz.$

En los ejercicios 3720—3722 esclarecer si son convergentes las integrales impropias tomadas sobre la esfera Ω de radio R con el centro en el origen de coordenadas.

3720. $\iiint\limits_{\Omega} \frac{dx\,dy\,dz}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}\ln\sqrt[3]{x^2+y^2+z^2}}.$

3721. $\iiint\limits_{\Omega} \frac{\ln\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{x^2+y^2+z^2}\,dx\,dy\,dz.$

3722. $\iiint\limits_{\Omega} \frac{xyz}{(x^2+y^2+z^2)^3}\,dx\,dy\,dz.$

3723. Calcular la integral $\iiint\limits_{\Omega} \ln(x^2+y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz,$ donde el dominio Ω es una esfera de radio R con el centro en el origen de coordenadas.

3724*. Calcular el volumen del sólido limitado por la superficie $z=(x^2+y^2)\,e^{-(x^2+y^2)}$ y el plano $z=0$.

3725. Calcular el volumen del sólido limitado por la superficie $z=x^2y^2e^{-(x^2+y^2)}$ y el plano $z=0$.

3726. Calcular el volumen del sólido limitado por el plano $z=0$ y por una parte de la superficie $z=xe^{-(x^2+y^2)}$ situada por encima de este plano.

3727. Sea dado un sólido homogéneo limitado por un cilindro circular recto (cuyo radio de base es R, la altura, H, y la densidad, γ). Hallar la fuerza que obra sobre el punto de masa m situado en el centro de la base del cilindro.

3728. Sea dado un sólido homogéneo limitado por un cono circular recto (cuyo radio de base es R, la altura, H, y la densidad, γ). Calcular la fuerza con que este sólido atrae el punto de masa m situado en el vértice del cono.

3729. Sea dada una esfera maciza heterogénea de radio R cuya densidad γ y la distancia desde el centro r están unidas por la relación $\gamma=a-br$ $(a>0,\ b>0)$.

a) Hallar las constantes a y b si es sabido que la densidad media de la esfera es γ_m, y la densidad sobre la superficie de la esfera es γ_0.

b) Calcular la fuerza de atracción ejercida por la esfera sobre el punto de masa m situado sobre la superficie de la esfera.

Integrales dependientes del parámetro. Regla de Leibniz

3730. Hallar el dominio de definición de la función $f(x) = \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{x^2+z^2}}$.

3731. Hallar la curvatura de la línea $y = \int_\pi^{2\pi} \frac{\operatorname{sen} \alpha x}{\alpha} d\alpha$ en el punto cuya abscisa es $x = 1$.

3732. Valiéndose de la igualdad $\int_0^b \frac{dx}{1+ax} = \frac{1}{a} \ln(1+ab)$, obtener la siguiente fórmula derivando respecto al parámetro:

$$\int_0^b \frac{x\,dx}{(1+ax)^2} = \frac{1}{a^2} \ln(1+ab) - \frac{b}{a(1+ab)}.$$

3733. Partiendo de la igualdad $\int_0^b \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{b}{a}$ calcular la integral $\int_0^b \frac{dx}{(x^2+a^2)^3}$.

3734. Partiendo de la igualdad $\int_0^\infty \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{\pi}{2a}$ calcular la integral $\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+a^2)^n}$ (n es un entero positivo).

3735. Calcular el valor de la integral $\int_0^\infty e^{-ax} x^{n-1}\,dx$ (n es un entero positivo) para $a > 0$, después de haber hallado $\int_0^\infty e^{-ax}\,dx$.

3736*. Partiendo de la igualdad (véase el ejercicio 2318) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{a^2 \cos^2 x + b^2 \operatorname{sen}^2 x} = \frac{\pi}{2|ab|}$ hallar $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{(a^2 \cos^2 x + b^2 \operatorname{sen}^2 x)^2}$.

En los ejercicios 3737—3749 calcular las integrales derivando respecto al parámetro.

3737. $\int\limits_0^{\infty} \frac{1-e^{-ax}}{xe^x}\,dx \ (a>-1)$. **3738.** $\int\limits_0^{\infty} \frac{1-e^{-ax^2}}{xe^{x^2}}\,dx \ (a>-1)$.

3739. $\int\limits_0^{1} \frac{\operatorname{arctg} ax}{x\sqrt{1-x^2}}\,dx$. **3740.** $\int\limits_0^{1} \frac{\ln(1-a^2x^2)}{x^2\sqrt{1-x^2}}\,dx \ (a^2<1)$.

3741. $\int\limits_0^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} ax}{x(1+x^2)}\,dx$. **3742.** $\int\limits_0^{1} \frac{\ln(1-a^2x^2)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \ (a^2<1)$.

3743. $\int\limits_0^{\pi} \frac{\ln(1+a\cos x)}{\cos x}\,dx \ (a^2<1)$.

3744. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\frac{1+a\operatorname{sen} x}{1-a\operatorname{sen} x}\right)\frac{dx}{\operatorname{sen} x} \ (a^2<1)$.

3745. $\int\limits_0^{\infty} \frac{1-e^{-ax^2}}{x^2}\,dx \ (a>0)$ sabiendo que $\int\limits_0^{\infty} e^{-ax^2}\,dx=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$ $(a>0)$. (véase el ejercicio 2439).

3746*. $\int\limits_0^{\infty} \frac{e^{-ax^2}-e^{-bx^2}}{x^2}\,dx \quad (a>0,\ b>0)$.

3747*. $\int\limits_0^{\infty} e^{-ax}\,\frac{\operatorname{sen} bx-\operatorname{sen} cx}{x}\,dx \quad (a>0)$.

3748. $\int\limits_0^{\infty} e^{-ax}\,\frac{\cos bx-\cos cx}{x}\,dx \quad (a>0)$.

3749*. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^2\cos^2 x+b^2\operatorname{sen}^2 x)\,dx$.

3750. Después de calcular la integral $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{arctg}(a\operatorname{tg} x)}{\operatorname{tg} x}\,dx$, hallar $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{\operatorname{tg} x}\,dx$.

3751. Valiéndose de la igualdad $\int\limits_0^1 x^n\,dx = \frac{1}{n+1}$, calcular la integral

$$\int\limits_0^1 \frac{x^\beta - x^\alpha}{\ln x}\,dx \quad (\alpha > -1,\ \beta > -1).$$

3752. Valiéndose de la igualdad $2a\int\limits_0^\infty e^{-a^2x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$ (véase el ejercicio 2439), calcular la integral $\int\limits_0^\infty \left(e^{-\frac{a^2}{x^2}} - e^{-\frac{b^2}{x^2}}\right)dx$.

3753. Deducir la igualdad $\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^\infty e^{-z^2x}\,dz$ $(x > 0)$ de la relación $\int\limits_0^\infty e^{-z^2}\,dz = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ (integral de Poisson) y utilizarla para calcular las integrales (integrales de difracción o de Fresnel):

a) $\int\limits_0^\infty \frac{\cos x\,dx}{\sqrt{x}}$; b) $\int\limits_0^\infty \frac{\operatorname{sen} x\,dx}{\sqrt{x}}$.

Diversos problemas

3754. Sea la función $f(x)$ continua para $x \geqslant 0$, y cuando $x \to 0$ la función $f(x)$ tiende al límite finito $f(\infty)$. Tomando todo esto en consideración demostrar que si $a > 0$ y $b > 0$, se tiene $\int\limits_0^\infty \frac{f(ax) - f(bx)}{x}\,dx = [f(\infty) - f(0)]\ln\frac{a}{b}$.

En los ejercicios 3755—3756 calcular las integrales aplicando el resultado del ejercicio 3754.

3755. $\int\limits_0^\infty \frac{\operatorname{arctg} ax - \operatorname{arctg} bx}{x}\,dx$. **3756.** $\int\limits_0^\infty \frac{e^{-ax^n} - e^{-bx^n}}{x}\,dx$ $(n > 0)$.

3757*. Sea la función $f(x)$ continua para $x \geqslant 0$ y la integral $\int\limits_A^\infty \frac{f(x)}{x}\,dx$ convergente para cualquier $A > 0$. Demostrar, tomando en consideración todo esto, que si $a > 0$ y $b > 0$, se tiene $\int\limits_0^\infty \frac{f(ax) - f(bx)}{x}\,dx = f(0)\ln\frac{b}{a}$. (Compárese con el ejercicio 3754.)

En los ejercicios 3758—3762 calcular las integrales aplicando el resultado del ejercicio 3757 ($a > 0$, $b > 0$).

3758. $\int\limits_0^{\infty} \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\,dx$. **3759.** $\int\limits_0^{\infty} \frac{\cos ax-\cos bx}{x}\,dx$.

3760. $\int\limits_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen} ax \cdot \operatorname{sen} bx}{x}\,dx$. **3761.** $\int\limits_0^{\infty} \frac{b \operatorname{sen} ax - a \operatorname{sen} bx}{x^2}\,dx$.

3762*. $\int\limits_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen}^3 x}{x^2}\,dx$.

3763*. La función de Laplace se define así: $\Phi(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^x e^{-t^2}\,dt$ (esta función desempeña un papel muy importante en la teoría de probabilidad). Demostrar las relaciones:

1) $\int\limits_0^x \Phi(az)\,dz=\frac{e^{-a^2x^2}-1}{a\sqrt{\pi}}+x\Phi(ax)$; 2) $\int\limits_0^{\infty}[1-\Phi(x)]\,dx=\frac{1}{\sqrt{\pi}}$.

3764*. Las funciones $\operatorname{si}(x)$ y $\operatorname{ci}(x)$ suelen ser definidas del modo siguiente:

$\operatorname{si}(x)=-\int\limits_x^{\infty}\frac{\operatorname{sen} t}{t}\,dt$ («seno integral») y $\operatorname{ci}(x)=-\int\limits_x^{\infty}\frac{\cos t}{t}\,dt$ («coseno integral»). Demostrar que

$$\int\limits_0^{\infty}\operatorname{sen} x\operatorname{si}(x)\,dx=\int\limits_0^{\infty}\cos x\operatorname{ci}(x)\,dx=-\frac{\pi}{4}.$$

3765*. La función $J_0(x)$ definida por la igualdad

$$J_0(x)=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(x\operatorname{sen}\theta)\,d\theta$$

se llama función de Bessel de orden cero. Demostrar que:

1) $\int\limits_0^{\infty}e^{-ax}J_0(x)\,dx=\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}\quad(a>0)$;

2) $$\int\limits_0^{\infty}\frac{\operatorname{sen} ax}{x}J_0(x)\,dx=\begin{cases}\frac{\pi}{2}, & \text{si } a\geqslant 1;\\ \operatorname{arcsen} a, & \text{si } |a|\leqslant 1;\\ -\frac{\pi}{2}, & \text{si } a\leqslant -1.\end{cases}$$

3766. Demostrar que la función $y=\int\limits_0^\infty \frac{e^{-xz}}{1+z^2}\,dz$ satisface la ecuación diferencial $y''+y=1/x$.

3767*. Demostrar que la función $y=\int\limits_{-1}^{1}(z^2-1)^{n-1}e^{xz}\,dz$ satisface la ecuación diferencial $xy''+2ny'-xy=0$.

3768*. Demostrar que la función $y=\int\limits_0^\infty \frac{e^{-xz}}{(1+z^2)^{n+1}}\,dz$ satisface la ecuación diferencial $xy''-2ny'+xy=1$.

3769*. Demostrar que la función de Bessel de orden cero $J_0(x)=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(x\operatorname{sen}\theta)\,d\theta$ satisface la ecuacion diferencial $J_0''(x)+\frac{J_0'(x)}{x}+J_0(x)=0$.

Capítulo XIII

Integrales curvilíneas e integrales de superficie

§ 1. Integrales curvilíneas de primer género*)

Cálculo de integrales

En los ejercicios 3770—3775 calcular las integrales curvilíneas.

3770. $\int\limits_L \frac{ds}{x-y}$, donde L es un segmento de la recta $y=\frac{1}{2}x-2$ comprendido entre los puntos $A(0, -2)$ y $B(4, 0)$.

3771. $\int\limits_L xy\,ds$, donde L es el contorno de un rectángulo cuyos vértices son $A(0, 0)$, $B(4, 0)$, $C(4, 2)$ y $D(0, 2)$.

3772. $\int\limits_L y\,ds$, donde L es un arco de la parábola $y^2 = 2px$, recortado por la parábola $x^2 = 2py$.

3773. $\int\limits_L (x^2+y^2)^n ds$, donde L es la circunferencia

$$x = a\cos t, \quad y = a \operatorname{sen} t.$$

3774. $\int\limits_L xy\,ds$, donde L es la cuarta parte de la elipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ situada en el primer cuadrante.

3775. $\int\limits_L \sqrt{2y}\,ds$, donde L es el primer arco de la cicloide

$$x = a(t - \operatorname{sen} t), \quad y = a(1 - \cos t).$$

3776. Deducir la fórmula para calcular la integral $\int\limits_L F(x, y)\,ds$ en coordenadas polares, si la línea L viene dada por la ecuación $\rho = \rho(\varphi)$ $(\varphi_1 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_2)$.

---

*) Así denominaremos las integrales de tipo $\int f(x, y)\,ds$, donde s es la longitud. (*Nota del T.*)

3777*. Calcular la integral $\int\limits_L (x-y)\,ds$, donde L es la circunferencia $x^2+y^2=ax$.

3778. Calcular la integral $\int\limits_L x\sqrt{x^2-y^2}\,ds$, donde L es una línea dada por la ecuación $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$ $(x\geqslant 0)$ (mitad de la lemniscata).

3779. Calcular la integral $\int\limits_L \operatorname{arctg}\frac{y}{x}\,ds$, donde L es una parte de la espiral de Arquímedes $\rho=2\varphi$, comprendida dentro de un círculo de radio R con el centro en el origen de coordenadas.

3780. Calcular la integral $\int\limits_L \frac{z^2\,ds}{x^2+y^2}$, donde L es la primera espira de la hélice $x=a\cos t$, $y=a\operatorname{sen} t$, $z=at$.

3781. Calcular la integral $\int\limits_L xyz\,ds$, donde L es una cuarta parte de la circunferencia $x^2+y^2+z^2=R^2$, $x^2+y^2=\frac{R^2}{4}$, situada en el primer octante.

3782. Calcular la integral $\int\limits_L \left(2z-\sqrt{x^2+y^2}\right)ds$, donde L es la primera espira de la línea helicoidal cónica

$$x=t\cos t,\qquad y=t\operatorname{sen} t,\qquad z=t.$$

3783. Calcular la integral $\int\limits_L (x+y)\,ds$, donde L es una cuarta parte de la circunferencia $x^2+y^2+z^2=R^2$, $y=x$, situada en el primer octante.

Aplicaciones de las integrales

3784. Hallar la masa de un fragmento de la línea $y=\ln x$ comprendido entre los puntos cuyas abscisas son x_1 y x_2, si la densidad de la línea en cada punto es igual al cuadrado de la abscisa del punto.

3785. Hallar la masa de un fragmento de la catenaria $y=a\operatorname{ch}\frac{x}{a}$ comprendido entre los puntos cuyas abscisas son $x_1=0$ y $x_2=a$, si la densidad de la línea en cada punto es inversamente proporcional a la ordenada del punto siendo la densidad en el punto $(0, a)$ igual a δ.

3786. Hallar la masa de una cuarta parte de la elipse $x = a \cos t$, $y = b \operatorname{sen} t$, situada en el primer cuadrante si la densidad en cada punto es igual a la ordenada de este punto.

3787. Hallar la masa de la primera espira de la hélice $x = a \cos t$, $y = a \operatorname{sen} t$, $z = bt$, cuya densidad en cada punto es igual al cuadrado del radio polar de este punto.

3788. Hallar la masa del arco de la línea $x = e^t \cos t$, $y = e^t \operatorname{sen} t$, $z = e^t$ desde el punto correspondiente a $t = 0$ hasta un punto cualquiera si la densidad del arco es inversamente proporcional al cuadrado del radio polar y en el punto $(1, 0, 1)$ es igual a 1.

3789. Hallar las coordenadas del centro de gravedad de la primera semiespira de la hélice $x = a \cos t$, $y = a \operatorname{sen} t$, $z = bt$, considerando la densidad constante.

3790. Calcular el momento estático de la primera espira de la línea helicoidal cónica $x = t \cos t$, $y = t \operatorname{sen} t$, $z = t$ con respecto al plano Oxy, considerando la densidad proporcional al cuadrado de distancia desde este plano $\rho = kz^2$.

3791. Calcular los momentos de inercia, con respecto a los ejes de coordenadas, de la primera espira de la hélice $x = a \cos t$, $y = a \operatorname{sen} t$, $z = \frac{h}{2\pi} t$.

En los ejercicios 3792—3797 calcular las áreas de las partes de las superficies cilíndricas comprendidas entre el plano Oxy y las superficies indicadas.

3792. $x^2+y^2=R^2, \quad z=R+\frac{x^2}{R}$.

3793. $y^2=2px, \quad z=\sqrt{2px-4x^2}$.

3794. $y^2=\frac{4}{9}(x-1)^3, \quad z=2-\sqrt{x}$.

3795. $x^2+y^2=R^2, \quad 2Rz=xy$.

3796. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \quad z=kx$ y $z=0$ $(z \geqslant 0)$ ("herradura cilíndrica").

3797. $y=\sqrt{2px}, \quad z=y$ y $x=\frac{8}{9}p$.

3798. Calcular el área de la superficie recortada de un cilindro circular de radio R por otro cilindro semejante si los ejes de estos dos cilindros se cortan formando el ángulo recto (compárese con la solución del problema en el ejercicio 3642).

3799. Hallar el área de una parte de la superficie del cilindro $x^2 + y^2 = Rx$ comprendida dentro de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

De acuerdo con la ley Biot — Savart; el elemento de corriente ejerce la acción sobre la masa magnética m con la fuerza igual a $\frac{mI \operatorname{sen}\alpha\, ds}{r^2}$, donde I es la corriente, ds es el elemento de longitud del conductor, r es la distancia que media entre el elemento de corriente y la masa magnética, α es el ángulo formado entre la dirección de la recta que une la masa magnética y el elemento de corriente, y la dirección del mismo elemento de corriente. Dicha fuerza está dirigida, siguiendo la normal, hacia el plano que contiene el elemento de corriente y el punto en que se halla situada la masa magnética. La dirección de la fuerza se establece de acuerdo con la regla de Ampère (también la regla del sacacorchos). Partiendo de esta ley, resolver los problemas de los ejercicios 3800—3805.

3800. Hallar la fuerza con que la corriente I en un conductor rectilíneo infinito ejerce su acción sobre el punto de masa magnética m situado a la distancia a desde el conductor.

3801. Por el circuito de forma cuadrada cuyo lado es a, pasa la corriente I. ¿Con qué fuerza dicha corriente actúa sobre el punto de masa magnética m situado en el centro del cuadrado?

3802. Mostrar que la corriente I que pasa por el arco de la línea cuya ecuación en las coordenadas polares presenta la forma $\rho = \rho(\varphi)$, ejerce la acción sobre el punto de masa magnética situado en el polo aplicando la fuerza

$$f = mI \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{d\varphi}{\rho}.$$

3803. ¿Con qué fuerza actúa la corriente I que pasa por un circuito cerrado elíptico, sobre el punto de masa magnética m situado en el foco de la elipse?

3804. ¿Con qué fuerza actúa la corriente I que pasa por un circuito parabólico infinito, sobre el punto de masa magnética m situado en el foco de la parábola? La distancia que media entre el vértice y el foco es igual a $p/2$.

3805. ¿Con qué fuerza actúa la corriente I que pasa por un circuito circular de radio R sobre el punto de masa magnética m situado en el punto P que se halla a la distancia h desde el plano del círculo y en la perpendicular levantada en el centro del mismo? ¿Para qué valor de P esta fuerza sería máxima siendo h dada?

§ 2. Integrales curvilíneas de segundo género*)

Cálculo de integrales

En los ejercicios 3806—3821 calcular las integrales curvilíneas.

3806. $\int\limits_L x\,dy$, donde L es el contorno de un triángulo formado por los ejes de coordenadas y la recta $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=1$ en dirección positiva (es decir, en sentido contrario al de las agujas del reloj).

3807. $\int\limits_L x\,dy$, donde L es un segmento de la recta $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ desde el punto de su intersección con el eje de abscisas hasta el punto de su intersección con el eje de ordenadas.

3808. $\int\limits_L (x^2-y^2)\,dx$, donde L es el arco de la parábola desde el punto (0, 0) hasta el punto (2, 4).

3809. $\int\limits_L (x^2+y^2)\,dy$, donde L es el contorno de un cuadrilátero cuyos vértices se hallan en los puntos A (0, 0), B (2, 0), C (4, 4) y D (0, 4), indicados según el orden de recorrido.

3810. $\int\limits_{(0,\,0)}^{(\pi,\,2\pi)} -x\cos y\,dx+y\,\mathrm{sen}\,x\,dy$ a lo largo del segmento que une los puntos (0, 0) y $(\pi,\ 2\pi)$.

3811. $\int\limits_{(0,\,0)}^{(1,\,1)} xy\,dx+(y-x)\,d$ a lo largo de la línea 1) $y=x$, 2) $y=x^2$, 3) $y^2=x$, 4) $y=x^3$.

3812. $\int\limits_{(0,\,0)}^{(1,\,1)} 2xy\,dx+x^2\,dy$ a lo largo de la línea 1) $y=x$, 2) $y=x^2$, 3) $y=x^3$, 4) $y^2=x$.

3813. $\int\limits_L y\,dx+x\,dy$, donde L es el cuadrante de la circunferencia $x=R\cos t$, $y=R\,\mathrm{sen}\,t$ desde $t_1=0$ hasta $t_2=\pi/2$.

---

* Así denominaremos las integrales de tipo $\int\limits_L P(x,\ y)\,dx+Q(x,\ y)\,dy$. (*Nota del T.*)

3814. $\int\limits_L y\,dx - x\,dy$, donde L es la elipse $x = a\cos t$, $y = b\,\mathrm{sen}\,t$ recorrida en sentido positivo.

3815. $\int\limits_L \frac{y^2\,dx - x^2\,dy}{x^2+y^2}$, donde L es la semicircunferencia $x = a\cos t$, $y = a\,\mathrm{sen}\,t$ desde $t_1 = 0$ hasta $t_2 = \pi$.

3816. $\int\limits_L (2a - y)\,dx - (a - y)\,dy$, donde L es el primer arco (desde el origen de coordenadas) de la cicloide $x = a\,(t - \mathrm{sen}\,t)$, $y = a\,(1 - \cos t)$.

3817. $\int\limits_L \frac{x^2\,dy - y^2\,dx}{x^{\frac{5}{3}} + y^{\frac{5}{3}}}$, donde L es la cuarta parte de la astroide $x = R\cos^3 t$, $y = R\,\mathrm{sen}^3\,t$ desde el punto $(R, 0)$ hasta el punto $(0, R)$.

3818. $\int\limits_L x\,dx + y\,dy + (x + y - 1)\,dz$, donde L es un segmento de la recta desde el punto $(1, 1, 1)$ hasta el punto $(2, 3, 4)$.

3819. $\int\limits_L yz\,dx + zx\,dy + xy\,dz$, donde L es un arco de la hélice $x = R\cos t$, $y = R\,\mathrm{sen}\,t$, $z = \frac{at}{2\pi}$ desde el punto de la intersección de la hélice con el plano $z = 0$ hasta el punto de su intersección con el plano $z = a$.

3820. $\int\limits_{(1,\,1,\,1)}^{(4,\,4,\,4)} \frac{x\,dx + y\,dy + z\,dz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2-x-y+2z}}$ a lo largo de la recta.

3821. $\int\limits_L y^2\,dx + z^2\,dy + x^2\,dz$, donde L es la línea de intersección de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ y del cilindro $x^2 + y^2 = Rx$ $(R > 0,\ z \geqslant 0)$, siendo recorrida, en el proceso de integración, en sentido contrario al de las agujas del reloj si se mira desde el origen de coordenadas.

Fórmula de Green

En los ejercicios 3822—3823 transformar las integrales curvilíneas tomadas a lo largo de los contornos cerrados L, en sentido positivo, en las integrales dobles sobre los dominios limitados por estos mismos contornos.

3822. $\int\limits_L (1 - x^2)\,y\,dx + x\,(1 + y^2)\,dy$.

3823. $\int\limits_L (e^{xy} + 2x\cos y)\,dx + (e^{xy} - x^2 \operatorname{sen} y)\,dy.$

3824. Calcular la integral del ejercicio 3822 de dos modos considerando la circunferencia $x^2 + y^2 = R^2$ como contorno de integración L:

1) directamente, 2) aplicando la fórmula de Green.

3825. Calcular la integral $\int\limits_L (xy + x + y)\,dx + (xy + x - y)\,dy$, donde L es: 1) la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$; 2) la circunferencia $x^2 + y^2 = ax$. La integración debe efectuarse en sentido positivo. (Calcular la integral de dos modos: 1) directamente, 2) aplicando la fórmula de Green).

3826. Demostrar que la integral

$$\int\limits_L (yx^3 + e^y)\,dx + (xy^3 + xe^y - 2y)\,dy$$

es igual a cero, si L es una línea cerrada y simétrica respecto al eje de coordenadas.

3827. Valiéndose de la fórmula de Green calcular la diferencia entre las integrales

$$I_1 = \int\limits_{AmB} (x+y)^2\,dx - (x-y)^2\,dy$$

y

$$I_2 = \int\limits_{AnB} (x+y)^2\,dx - (x-y)^2\,dy,$$

donde AmB es un segmento de la recta que une los puntos $A\ (0,\ 0)$ y $B\ (1,\ 1)$ y AnB es el arco de la parábola $y = x^2$.

3828. Mostrar que la integral

$$\int\limits_L \{x\cos(N,\ x) + y \operatorname{sen}(N,\ x)\}\,ds,$$

donde $(N,\ x)$ es un ángulo formado por la normal exterior a la línea y por la dirección positiva del eje de abscisas, calculada sobre el contorno cerrado L en sentido positivo, es igual al área doble de la figura limitada por el contorno L.

3829. Demostrar que la magnitud de la integral $\int\limits_L (2xy - y)\,dx + x^2\,dy$, donde L es un contorno cerrado, es igual al área del dominio limitado por este contorno.

3830. Demostrar que la integral $\int\limits_L \varphi(y)\,dx + [x\varphi'(y) + x^3]\,dy$ es igual al momento de inercia triple de una figura plana homogénea limitada por el contorno L, respecto al eje de ordenadas.

Independencia de la integral del contorno de integración. Métodos para hallar la función primitiva

En los ejercicios 3831—3835 probar que las integrales tomadas a lo largo de los contornos cerrados son iguales a cero cualesquiera que fuesen las funciones que forman parte de los integrandos.

3831. $\int\limits_L \varphi(x)\,dx + \psi(y)\,dy$.

3832. $\int\limits_L f(xy)(y\,dx + x\,dy)$.

3833. $\int\limits_L f\left(\frac{y}{x}\right)\frac{x\,dy - y\,dx}{x^2}$.

3834. $\int\limits_L [f(x+y) + f(x-y)]\,dx + [f(x+y) - f(x-y)]\,dy$.

3835. $\int\limits_L f(x^2+y^2+z^2)(x\,dx + y\,dy + z\,dz)$.

3836*. Demostrar que la integral $\int\limits_L \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2+y^2}$ tomada a lo largo de cualquier contorno cerrado que encierre el origen de coordenadas, en sentido positivo, es igual a 2π.

3837. Calcular la integral $\int\limits_L \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2+4y^2}$ a lo largo de la circunferencia $x^2+y^2=1$ en sentido positivo.

En los ejercicios 3838—3844 calcular las integrales curvilíneas de las diferenciales totales.

3838. $\int\limits_{(-1,\,2)}^{(2,\,3)} y\,dx + x\,dy$. **3839.** $\int\limits_{(0,\,0)}^{(2,\,1)} 2xy\,dx + x^2\,dy$.

3840. $\int\limits_{(3,\,4)}^{(5,\,12)} \frac{x\,dx + y\,dy}{x^2+y^2}$ (el origen de coordenadas no se halla en el contorno de integración).

3841. $\int\limits_{(P_1)}^{(P_2)} \frac{x\,dx + y\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ donde los puntos P_1 y P_2 están situados sobre las circunferencias concéntricas cuyos centros se hallan en el origen de coordenadas y los radios son iguales a R_1 y R_2, respectivamente (el origen de coordenadas no se halla en el contorno de integración).

3842. $\int\limits_{(1,\,-1,\,2)}^{(2,\,1,\,3)} x\,dx - y^2\,dy + z\,dz.$

3843. $\int\limits_{(1,\,2,\,3)}^{(3,\,2,\,1)} yz\,dx + zx\,dy + xy\,dz.$

3844. $\int\limits_{(7,\,2,\,3)}^{(5,\,3,\,1)} \frac{zx\,dy + xy\,dz - yz\,dx}{(x-yz)^2}$ (el contorno de integración no corta la superficie $z = \frac{x}{y}$.

En los ejercicios 3845—3852 hallar las funciones siendo dadas las diferenciales totales.

3845. $du = x^2\,dx + y^2\,dy.$ **3846.** $du = 4(x^2 - y^2)(x\,dx - y\,dy).$

3847. $du = \frac{(x+2y)\,dx + y\,dy}{(x+y)^2}.$

3848. $du = \frac{x}{y\sqrt{x^2+y^2}}\,dx - \left(\frac{x^2+\sqrt{x^2+y^2}}{y^2\sqrt{x^2+y^2}}\right)dy.$

3849. $du = \left[\frac{x-2y}{(y-x)^2} + x\right]dx + \left[\frac{y}{(y-x)^2} - y^2\right]dy.$

3850. $du = (2x\cos y - y^2 \operatorname{sen} x)\,dx + (2y\cos x - x^2 \operatorname{sen} y)\,dy.$

3851. $du = \frac{2x(1-e^y)}{(1+x^2)^2}\,dx + \left(\frac{e^y}{1+x^2} + 1\right)dy.$

3852. $du = \frac{(3y-x)\,dx + (y-3x)\,dy}{(x+y)^3}.$

3853. Seleccionar el número n de tal modo que la expresión $\frac{(x-y)\,dx + (x+y)\,dy}{(x^2+y^2)^n}$ sea la diferencial total. Hallar la función correspondiente.

3854. Seleccionar las a y b constantes de tal modo que la expresión $\frac{(y^2+2xy+ax^2)\,dx - (x^2+2xy+by)^2\,dy}{(x^2+y^2)^2}$ sea la diferencial total. Hallar la función correspondiente.

En los ejercicios 3855-3860 hallar las funciones siendo dadas las diferenciales totales.

3855. $du = \frac{dx+dy+dz}{x+y+z}.$

3856. $du = \frac{x\,dx + y\,dy + z\,dz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$ **3857.** $du = \frac{yz\,dx + xz\,dy + xy\,dz}{1+x^2y^2z^2}.$

3858. $du=\frac{2(zx\,dy+xy\,dz-yz\,dx)}{(x-yz)^2}$.

3859. $du=\frac{dx-3\,dy}{z}+\frac{3y-x+z^3}{z^2}\,dz$.

3860. $du=e^{\frac{y}{x}}\,dx+$

$$+\left(\frac{e^{\frac{y}{z}}(x+1)}{z}+ze^{yz}\right)dy+\left(-\frac{e^{\frac{y}{z}}(x+1)\,y}{z^2}+ye^{yz}+e^{-z}\right)dz.$$

Aplicaciones de las integrales

En los ejercicios 3861—3868 calcular las áreas de las figuras limitadas por las líneas cerradas, mediante la integral curvilínea.

3861. Por la elipse $x=a\cos t$, $y=b\,\mathrm{sen}\,t$.

3862. Por la astroide $x=a\cos^3 t$, $y=a\,\mathrm{sen}^3\,t$.

3863. Por la cardioide $x=2a\cos t-a\cos 2t$, $y=2a\,\mathrm{sen}\,t-a\,\mathrm{sen}\,2t$.

3864*. Por el lazo del folio de Descartes $x^3+y^3-3axy=0$.

3865. Por el lazo de la línea $(x+y)^3=xy$.

3866. Por el lazo de la línea $(x+y)^4=x^2y$.

3867*. Por la lemniscata de Bernoulli $(x^2+y^2)^2=2a^2(x^2-y^2)$.

3868. Por el lazo de la línea $(\sqrt{x}+\sqrt{y})^{12}=xy$.

Trabajo

3869. En cada punto del plano, sobre el punto material actúa una fuerza cuyo valor es constante e igual a F y cuya dirección sigue la del eje positivo de abscisas. Hallar el trabajo efectuado por esta fuerza cuando el punto se desplaza a lo largo del arco de la circunferencia $x^2+y^2=R^2$, situado en el primer cuadrante.

3870. En cada punto del plano, sobre el punto material actúa la fuerza F cuyas proyecciones sobre los ejes de coordenadas son iguales a $X=xy$, $Y=x+y$. Calcular el trabajo de la fuerza F al desplazarse el punto desde el origen de coordenadas hasta el punto (1, 1) a lo largo de: 1) la recta $y=x$; 2) la parábola $y=x^2$, 3) una línea quebrada de dos eslabones cuyos lados son paralelos a los ejes de coordenadas (considerar dos casos).

3871. En cada punto M de la elipse $x=a\cos t$, $y=b\,\mathrm{sen}\,t$ está aplicada la fuerza F cuyo valor es igual a la distancia que media entre el punto M y el centro de la elipse, y dirigida hacia el centro de la elipse. a) Calcular el trabajo de la fuerza F al desplazarse el punto a lo largo del arco de la elipse situado en el primer cuadrante. b) Hallar el trabajo cuando el punto recorre toda la elipse.

3872. Las proyecciones de la fuerza sobre los ejes de coordenadas son dadas por las fórmulas $X=2xy$ y $Y=x^2$. Mostrar que el trabajo de la fuerza, al desplazarse el punto, depende sólo de su posición inicial y final y no depende de la forma del trayecto. Calcular la magnitud del trabajo al desplazarse desde el punto (1, 0) hasta el punto (0, 3).

3873. La magnitud de la fuerza es inversamente proporcional a la distancia que media entre el punto de su aplicación y el plano xOy. Dicha fuerza está dirigida hacia el origen de coordenadas. Calcular el trabajo, al desplazarse el punto bajo la acción de esta fuerza a lo largo de la recta $x = at$, $y = bt$, $z = ct$ desde el punto $M(a, b, c)$ hasta el punto $N(2a, 2b, 2c)$.

3874. La magnitud de la fuerza es inversamente proporcional a la distancia que media entre el punto de su aplicación y el eje Oz. Dicha fuerza es perpendicular a este eje y está dirigida hacia él. Hallar el trabajo de la fuerza al desplazarse el punto bajo la acción de dicha fuerza a lo largo de la circunferencia $x = \cos t$, $y = 1$, $z = \operatorname{sen} t$ desde el punto $M(1, 1, 0)$ hasta el punto $N(0, 1, 1)$.

3875. Demostrar que el trabajo de la fuerza de gravitación de dos masas puntuales, efectuado al desplazarse una de ellas no depende de la forma del trayecto. La magnitud de la fuerza de atracción F la establece la ley de Newton $F = \frac{km_1m_2}{r^2}$, donde r es la distancia entre los puntos, m_1 y m_2 son las masas concentradas en dichos puntos, k es la constante de gravitación.

§ 3. Integrales de superficie

Integrales de superficie de primer género

En los ejercicios 3876—3884 calcular las integrales.

3876. $\iint\limits_S \left(z+2x+\frac{4}{3}y\right) dq$, donde S es una parte del plano $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{4}=1$ situada en el primer octante.

3877. $\iint\limits_S xyz\,dq$, donde S es una parte del plano $x+y+z=1$ situada en el primer octante.

3878. $\iint\limits_S x\,dq$, donde S es una parte de la esfera $x^2+y^2=z^2=$ $=R^2$, situada en el primer octante.

3879. $\iint\limits_S y\,dq$, donde S es la semiesfera $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$.

3880. $\iint\limits_S \sqrt{R^2-x^2-y^2}\,dq$, donde S es la semiesfera $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$.

3881. $\iint\limits_S x^2y^2\,dq$, donde S es la semiesfera $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$.

3882. $\iint\limits_S \frac{dq}{r^2}$, donde S es el cilindro $x^2+y^2=R^2$, limitado por los planos $z=0$ y $z=H$, r es la distancia que media entre el punto de superficie y el origen de coordenadas.

3883. $\iint\limits_S \frac{dq}{r^n}$, donde S es la esfera $x^2+y^2+z^2=R^2$, r es la distancia que media entre el punto de la esfera y el punto fijo $P(0, 0, c)$ $(c>R)$.

3884. $\iint\limits_S \frac{dq}{r}$, donde S es una parte de la superficie del paraboloide hiperbólico $z=xy$, recortada por el cilindro $x^2+y^2=R^2$, r es la distancia que media entre el punto de la superficie y el eje Oz.

3885*. Hallar la masa de una esfera si la densidad de superficie en cada punto es igual a la distancia que media entre dicho punto y cierto diámetro fijo de la esfera.

3886. Hallar la masa de una esfera si la densidad de superficie en cada punto es igual al cuadrado de distancia que media entre dicho punto y cierto diámetro fijo de la esfera.

Integrales de superficie de segundo género

En los ejercicios 3887—3893 calcular las integrales de superficie.

3887. $\iint\limits_S x\,dy\,dz+y\,dx\,dz+z\,dx\,dy$, donde S es el lado positivo del cubo formado por los planos $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x=1$, $y=1$, $z=1$.

3888. $\iint\limits_S x^2y^2z\,dx\,dy$, donde S es el lado positivo de la mitad inferior de la esfera $x^2+y^2+z^2=R^2$.

3889. $\iint\limits_S z\,dx\,dy$, donde S es la cara exterior del elipsoide $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

3890. $\iint\limits_S z^2\,dx\,dy$, donde S es la cara exterior del elipsoide $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

3891. $\iint\limits_S xz\,dx\,dy + xy\,dy\,dz + yz\,dx\,dz$, donde S es la cara exterior de la pirámide formada por los planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ y $x + y + z = 1$.

3892. $\iint\limits_S yz\,dx\,dy + xz\,dy\,dz + xy\,dx\,dz$, donde S es la cara exterior de la superficie situada en el primer octante y formada por el cilindro $x^2 + y^2 = R^2$ y los planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ y $z = H$.

3893. $\iint\limits_S y^2 z\,dx\,dy + xz\,dy\,dz + x^2y\,dx\,dz$, donde S es la cara exterior de la superficie situada en el primer octante y formada por el paraboloide de revolución $z = x^2 + y^2$, por el cilindro $x^2 + y^2 = 1$ y los planos de coordenadas (véase la fig. 68).

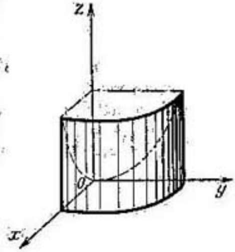

Fig. 68

Fórmula de Stokes

3894. Aplicando la fórmula de Stokes, transformar la integral $\int\limits_L (y^2 + z^2)\,dx + (x^2 + z^2)\,dy + (x^2 + y^2)\,dz$ tomada a lo largo de cierto contorno cerrado, en la integral de superficie «tendida» sobre este contorno.

3895. Calcular la integral $\int\limits_L x^2y^3\,dx + dy + z\,dz$, donde el contorno L es la circunferencia $x^2 + y^2 = R^2$, $z = 0$: a) directamente y b) aplicando la fórmula de Stokes y considerando la semiesfera $z = +\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ como superficie. La integración, a lo largo de la circunferencia en el plano xOy, debe efectuarse en sentido positivo.

Fórmula de Ostrogradski

3896. Aplicando la fórmula de Ostrogradski transformar la integral sobre la superficie cerrada en una integral triple sobre el volumen del cuerpo limitado por esta superficie:

$$\iint\limits_S x^2\,dy\,dz + y^2\,dx\,dz + z^2\,dx\,dy.$$

La integración debe efectuarse sobre la cara exterior de la superficie S.

3897. Aplicando la fórmula de Ostrogradski transformar la integral sobre la superficie cerrada en una integral triple sobre el volumen del cuerpo limitado por esta superficie:

$$\iint_S \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,\{\cos(N,\ x)+\cos(N,\ y)+\cos(N,\ z)\}\,d\sigma,$$

donde N es la normal exterior a la superficie S.

3898. Calcular la integral del ejercicio 3897, si S es la esfera de radio R cuyo centro se halla situado en el origen de coordenadas.

3899. Calcular la integral

$$\iint_S [x^3\cos(N,\ x)+y^3\cos(N,\ y)+z^3\cos(N,\ z)]\,d\sigma,$$

donde S es la esfera de radio R cuyo centro se halla situado en el origen de coordenadas y N es la normal exterior.

3900. Aplicando la fórmula de Ostrogradski calcular las integrales de los ejercicios 3891—3893.

Capítulo XIV

Ecuaciones diferenciales

§ 1. Ecuaciones de primer orden

Ecuaciones con variables separables

En los ejercicios 3901—3910 hallar las soluciones generales de las ecuaciones diferenciales.

3901. $(xy^2 + x)\,dx + (y - x^2y)\,dy = 0.$

3902. $xyy' = 1 - x^2.$ **3903.** $yy' = \frac{1-2x}{y}.$

3904. $y' \operatorname{tg} x - y = a.$ **3905.** $xy' + y = y^2.$

3906. $y' + \sqrt{\frac{1-y^2}{1-x^2}} = 0.$

3907. $\sqrt{1-y^2}\,dx + y\sqrt{1-x^2}\,dy = 0.$

3908. $e^{-s}\left(1 + \frac{ds}{dt}\right) = 1.$ **3909.** $y' = 10^{x+y}.$

3910. $y' + \operatorname{sen}\frac{x+y}{2} = \operatorname{sen}\frac{x-y}{2}.$

3911. La balística establece la dependencia entre la velocidad v del proyectil y la distancia l recorrida por éste en el cañón del arma mediante la siguiente ecuación:

$v = \frac{al^n}{b+l^n}$, donde $v = \frac{dl}{dt}$ y $n < 1$. Hallar la dependencia entre el tiempo t del movimiento del proyectil y la distancia l recorrida por dentro del cañón.

3912. Si x es la cantidad de ácido yodhídrico HJ que se ha descompuesto para el momento de tiempo t, la velocidad de descomposición $\left(\frac{dx}{dt}\right)$ la determina la ecuación diferencial $\frac{dx}{dt} = k_1 \times \times \left(\frac{1-x}{v}\right)^2 - k_2\left(\frac{x}{v}\right)^2$, donde k_1, k_2 y v son constantes. Integrar esta ecuación.

En los ejercicios 3913—3916 hallar las soluciones particulares de las ecuaciones diferenciales que satisfagan las condiciones iniciales dadas.

3913. $y' \operatorname{sen} x = y \ln y$; $y|_{x=\frac{\pi}{2}} = e$.

3914. $y' = \frac{1+y^2}{x+x^2}$; $y|_{x=0} = 1$.

3915. $\operatorname{sen} y \cos x \, dy = \cos y \operatorname{sen} x \, dx$; $y|_{x=0} = \frac{\pi}{4}$.

3916. $y - xy' = b\,(1 + x^2 y')$; $y|_{x=1} = 1$.

3917. Hallar la línea que pase por el punto (2, 3) y cuya propiedad sea la siguiente: el segmento de cualquier tangente suya comprendido entre los ejes de coordenadas se divide en dos partes iguales en el punto de contacto.

3918. Hallar la línea que pase por el punto (2, 0) y cuya propiedad sea la siguiente: el segmento de la tangente entre el punto de contacto y el eje de ordenadas tiene la longitud constante e igual a dos.

3919. Hallar todas las líneas para las cuales el segmento de la tangente comprendido entre el punto de contacto y el eje de abscisas se divide en dos partes iguales en el punto de intersección con el eje de ordenadas.

3920. Hallar todas las líneas para las cuales la subtangente sea proporcional a la abscisa del punto de contacto (el coeficiente de proporcionalidad es igual a k).

3921. Hallar la línea que pase por el punto $(a, 1)$ y cuya subtangente tenga la longitud constante e igual a a.

3922. Hallar la línea para la cual la longitud de la normal (su segmento desde el punto de la misma hasta el eje de abscisas) sea la magnitud constante a.

3923. Hallar la línea para la cual la suma de las longitudes de la tangente y de la subtangente en cualquier punto suyo sea proporcional al producto de las coordenadas del punto de contacto (el coeficiente de proporcionalidad es igual a k).

3924. Hallar la línea $y = f(x)$ ($f(x) \geqslant 0$, $f(0) = 0$) que limite el trapecio mixtilíneo de base $[0, x]$ y cuya área sea proporcional al grado $(n + 1)$ de $f(x)$. Es sabido que $f(x) = 1$.

3925. El punto material cuya masa es igual a 1g, efectúa el movimiento rectilíneo bajo la acción de la fuerza directamente proporcional al tiempo calculado a partir del momento $t = 0$ e inversamente proporcional a la velocidad del movimiento de dicho punto. En el momento $t = 10$ s la velocidad era igual a 0,5 m/s, y la fuerza, $4 \cdot 10^{-5}$ N. ¿A qué será igual la velocidad al cabo de 1 min de comenzar el movimiento?

3926. Un punto material efectúa el movimiento rectilíneo siendo su energía cinética, en el momento t, directamente proporcional a la velocidad media del movimiento en el intervalo de tiempo desde el cero hasta t. Es sabido que siendo $t = 0$ el trayecto es $s = 0$. Mostrar que el movimiento es uniforme.

3927. Una lancha automóvil se desplaza a la velocidad de $v = 10$ km/h, estando las aguas tranquilas. En plena marcha su motor fue desconectado. Al cabo de $t = 20$ s la velocidad de la lancha bajó hasta $v_1 = 6$ km/h. Considerando que la fuerza de resistencia del agua al movimiento de la lancha es proporcional a la velocidad de ésta, hallar la velocidad de la lancha a los dos minutos de parar el motor. Hallar también la distancia recorrida por la lancha durante un minuto después de parar el motor.

3928. Un recipiente cilíndrico que tiene el eje vertical y cuya sección transversal es S, tiene en su fondo un pequeño orificio circular cuya área es q, cerrado por un diafragma (como en el objetivo de una cámara de fotografía). El recipiente contiene un líquido cuya altura es h. En el momento $t = 0$ el diafragma comienza a abrirse siendo el área del orificio proporcional al tiempo. El orificio queda totalmente abierto en T s. ¿Cuál será la altura H del líquido al cabo de T s de comenzar el experimento? (Véanse los ejercicios 2701—2706).

3929. La velocidad del enfriamento de un cuerpo es proporcional a la diferencia de las temperaturas del cuerpo y del medio ambiente. En los ejercicios 2710—2711 hemos considerado el coeficiente de proporcionalidad como constante. En algunos cálculos consideran que depende linealmente del tiempo: $k = k_0(1 + \alpha t)$. Tomando en consideración este razonamiento, hallar la depedencia entre la temperatura del cuerpo θ y el tiempo t considerando que siendo $t = 0$, la temperatura del cuerpo es $\theta = \theta_0$, y la del medio ambiente es θ_1.

3930*. La velocidad del crecimiento de área de una hoja joven de la planta Victoria regia (también taropé), que tiene, como es sabido, forma circular, es proporcional a la circunferencia de la hoja y a la cantidad de la luz solar que cae sobre ésta. La cantidad de la luz, a su vez, es proporcional al área de la hoja y al coseno del ángulo entre la dirección de los rayos y la vertical. Hallar la dependencia entre el área S de la hoja y el tiempo t si se sabe que a las seis de la mañana dicha área era igual a 1600 cm^2 y a las seis de la tarde, a 2500 cm^2. (Considerar que la observación se efectuó en el ecuador, en el momento de equinoccio en que el ángulo formado entre la dirección de los rayos solares y la vertical es susceptible de considerar igual a 90° a las seis de la mañana y a las seis de la tarde e igual a 0° al mediodía.)

En los ejercicios 3931—3933, mediante la sustitución de la función buscada, reducir las ecuaciones dadas a las ecuaciones con variables separables, y resolverlas.

3931. $y' = \cos(x - y)$ (poner $u = x - y$).

3932. $y' = 3x - 2y + 5$. **3933.** $y'\sqrt{1 + x + y} = x + y - 1$

Ecuaciones homogéneas

En los ejercicios 3934—3944 hallar las soluciones generales de las ecuaciones dadas.

3934. $y' = \frac{y^2}{x^2} - 2.$ 3935. $y' = \frac{x+y}{x-y}.$

3936. $x\,dy - y\,dx = y\,dy.$ 3937. $y' = \frac{2xy}{x^2-y^2}.$

3938. $y' = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}.$ 3939. $xy' - y = \sqrt{x^2+y^2}.$

3940. $y^2 + x^2y' = xyy'.$ 3941. $y' = e^{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x}.$

3942. $xy' = y \ln \frac{y}{x}.$

3943. $(3y^2 + 3xy + x^2)\,dx = (x^2 + 2xy)\,dy.$

3944. $y' = \frac{y}{x} + \frac{\varphi\left(\frac{y}{x}\right)}{\varphi'\left(\frac{y}{x}\right)}.$

En los ejercicios 3945—3948 hallar las soluciones particulares de las ecuaciones diferenciales que satisfagan las condiciones iniciales dadas.

3945. $(xy' - y) \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = x;$ $y|_{x=1} = 0.$

3946. $(y^2 - 3x^2)\,dy + 2xy\,dx = 0;$ $y|_{x=0} = 1.$

3947. $y' = \frac{y^2 - 2xy - x^2}{y^2 + 2xy - x^2};$ $y|_{x=1} = -1.$

3948. $y\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2x\frac{dy}{dx} - y = 0;$ $y|_{x=0} = \sqrt{5}.$

3949. Reducir la ecuación $y' = \frac{y}{x} + \varphi\left(\frac{x}{y}\right)$ a la cuadratura. ¿Cuál debería ser la función $\varphi\left(\frac{x}{y}\right)$ para que $y = \frac{x}{\ln|Cx|}$ sea la solución general de la ecuación dada?

3950. Hallar la línea para la cual el cuadrado de la longitud de un segmento recortado por cualquier tangente del eje de ordenadas, sea igual al producto de las coordenadas del punto de contacto.

3951. Hallar la línea para la cual la ordenada inicial de cualquier tangente es igual a la subnormal correspondiente.

3952*. Hallar la línea para la cual la longitud del radio polar de cualquier punto suyo M es igual a la distancia que media entre el punto de intersección del eje Oy y la tangente en el punto M, y el origen de coordenadas.

3953*. ¿Qué clase de la superficie de revolución presenta el espejo de un proyector si los rayos luminosos que parten de un manantial puntiforme, al reflejarse, se propagan formando un haz paralelo?

Ecuaciones lineales

En los ejercicios 3954—3964 hallar las soluciones generales de las ecuaciones dadas.

3954. $y' + 2y = 4x$. 3955. $y' + 2xy = xe^{-x^2}$.

3956. $y' + \frac{1-2x}{x^2} y = 1$.

3957. $(1 + x^2) y' - 2xy = (1 + x^2)^2$.

3958. $y' + y = \cos x$. 3959. $y' + ay = e^{mx}$.

3960. $2y\,dx + (y^2 - 6x)\,dy = 0$.

3961. $y' = \frac{1}{2x - y^2}$. 3962. $y' = \frac{y}{2y \ln y + y - x}$.

3963. $x(y' - y) = (1 + x^2) e^x$.

3964. $y' + y\Phi'(x) - \Phi(x)\,\Phi'(x) = 0$, donde $\Phi(x)$ es la función dada.

En los ejercicios 3965—3968 hallar las soluciones particulares de las ecuaciones que satisfagan las condiciones iniciales dadas.

3965. $y' - y \operatorname{tg} y = \sec x$; $y|_{x=0} = 0$.

3966. $xy' + y - e^x = 0$; $y|_{x=a} = b$.

3967. $xy' - \frac{y}{x+1} = x$; $y|_{x=1} = 0$.

3968. $t(1+t^2)\,dx = (x + xt^2 - t^2)\,dt$; $x|_{t=1} = -\frac{\pi}{4}$.

3969. Sean y_1 e y_2 dos distintas soluciones de la ecuación

$$y' + P(x) \cdot y = Q(x).$$

a) Demostrar que $y = y_1 + C(y_2 - y_1)$ es la solución general de la misma ecuación (C es constante).

b) ¿Cuál debería ser la relación entre las constantes α y β para que la combinación lineal $\alpha y_1 + \beta y_2$ sea la solución de la ecuación dada?

c) Demostrar que si y_3 es la tercera solución particular distinta de y_1 e y_2, la relación $\frac{y_2 - y_1}{y_3 - y_1}$ es constante.

3970. Demostrar la identidad (véase el ejercicio 2345): $\int_0^x e^{2xz - z^2}\,dz = e^{\frac{x^2}{4}} \int_0^x e^{-\frac{z^2}{4}}\,dz$ formando la ecuación diferencial para la función $I(x) = \int_0^x e^{2xz - z^2}\,dz$ y resolverla.

3971. Hallar la línea para la cual la ordenada inicial de cualquier tangente sea dos unidades de escala menor que la abscisa del punto de contacto.

3972*. Hallar la línea para la cual el área del rectángulo construido sobre la abscisa de cualquier punto y sobre la ordenada inicial de la tangente en este punto es una magnitud constante ($= a^2$).

3973*. Hallar la línea para la cual el área de un triángulo formado por el eje de abscisas, la tangente y el radio vector del punto de contacto, sea constante ($= a^2$).

3974. Un punto de masa m efectúa el movimiento rectilíneo. Sobre dicho punto actúa una fuerza proporcional al tiempo (el coeficiente de proporcionalidad es k_1) transcurrido desde el momento en que la velocidad era igual a cero. Además, sobre el mismo punto actúa la fuerza de resistencia del medio, que es proporcional a la velocidad (el coeficiente de proporcionalidad es igual a k). Hallar la dependencia entre la velocidad y el tiempo.

3975. Un punto de masa m efectúa el movimiento rectilíneo. Sobre dicho punto actúa una fuerza, proporcional al cubo de tiempo transcurrido desde el momento en que la velocidad era igual a v_0 (el coeficiente de proporcionalidad es igual a k). Además, sobre el mismo punto ejerce su acción el medio, esta acción es proporcional al producto de la velocidad y el tiempo (el coeficiente de proporcionalidad es igual a k_1). Hallar la dependencia entre la velocidad y el tiempo.

3976. La temperatura inicial θ_0° C del cuerpo es igual a la del medio ambiente. El cuerpo recibe el calor de un aparato calentador (la velocidad con que pasa el calor es una función dada del tiempo: $c\varphi(t)$, donde c es la capacidad calorífica constante del cuerpo). Además, el cuerpo cede el calor al medio ambiente (la velocidad de enfriamiento es proporcional a la diferencia entre las temperaturas del cuerpo y del medio). Hallar la dependencia que existe entre la temperatura del cuerpo y el tiempo medido al comenzar el experimento.

Resolver los problemas de los ejercicios 3977—3978 tomando en consideración lo siguiente. Si la corriente eléctrica alterna $I = I(t)$ pasa por el conductor teniendo el coeficiente de inductancia igual a L y la resistencia R, la caída de tensión a lo largo del conductor será igual a $L\frac{dI}{dt} + RI$.

3977. La diferencia de potencial en los bornes de una bobina va disminuyendo uniformemente de $E_0 = 2$V hasta $E_1 = 1$ V durante 10 segundos. ¿A qué será igual la intensidad de la corriente al finalizar el décimo segundo si al principio del experimento era igual a $16\frac{2}{3}$ A? La resistencia de la bobina es igual a 0,12 ohm, el coeficiente de inductancia, 0,1 H.

3978. Hallar la intensidad de la corriente en la bobina en el momento t si su resistencia es R, el coeficiente de inductancia, L, la corriente inicial $I_0 = 0$, la fuerza electromotriz varía de acuerdo con la ley $E = E_0 \operatorname{sen} \omega t$.

Diversos problemas
(Ecuaciones con variables separables, homogéneas y lineales)

En los ejercicios 3979—3997 hallar las soluciones generales de las ecuaciones dadas.

3979. $y' = \frac{x^2 + xy + y^2}{x^2}$. **3980.** $x^2\,dy + (3 - 2x)\,dx = 0$.

3981. $x(x^2+1)\,y' + y = x(1+x^2)^2$.

3982. $y' = \frac{y+1}{x}$. **3983.** $y' = \frac{1+y^2}{xy(1+x^2)}$.

3984. $(8y + 10x)\,dx + (5y + 7x)\,dy = 0$.

3985. $x^3 y' = y(y^2 + x^2)$. **3986.** $\frac{xy' - y}{x} = \operatorname{tg} \frac{y}{x}$.

3987. $\left(x - y \cos \frac{y}{x}\right) dx + x \cos \frac{y}{x}\,dy = 0$.

3988. $y' = e^{2x} - e^x y$. **3989.** $\frac{dx}{x^2 - xy + y^2} = \frac{dy}{2y^2 - xy}$.

3990. $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x \cos y + \operatorname{sen} 2y}$.

3991. $(x - 2xy - y^2)\,dy + y^2\,dx = 0$.

3992. $y' + y \cos x = \operatorname{sen} x \cos x$.

3993. $(x + 1)\,y' - ny = e^x (x + 1)^{n+1}$.

3994. $y\,dx = (y^3 - x)\,dy$.

3995. $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - (x + y)\frac{dy}{dx} + xy = 0$.

3996*. $yy' \operatorname{sen} x = \cos x\,(\operatorname{sen} x - y^2)$.

3997. $y' = (x + y)^2$.

3998. Verificar que las ecuaciones $(1 - x^2)\,y' + xy = ax$ tienen por curvas integrales las elipses e hipérbolas cuyos centros están en el punto $(0, a)$ y cuyos ejes son paralelos a los ejes de coordenadas, teniendo cada curva un eje constante de longitud igual a 2.

En los ejercicios 3999—4002 hallar las soluciones particulares de las ecuaciones que satisfagan las condiciones iniciales indicadas.

3999. $\frac{y - xy'}{x + yy'} = 2$; $\quad y|_{x=1} = 1$.

4000. $y' - \frac{y}{1 - x^2} = 1 + x$; $\quad y|_{x=0} = 1$.

4001. $(1+e^x)yy' = e^y$; $\qquad y|_{x=0} = 0$.

4002. $y' = 3x^2y + x^5 + x^2$; $\qquad y|_{x=0} = 1$.

4003. Demostrar que sólo las rectas $y = kx$ y las hipérbolas $xy = m$ tienen la siguiente propiedad. La longitud del radio polar de cualquiera de sus puntos es igual a la de la tangente trazada en este mismo punto.

4004. Hallar la línea para la cual la longitud de su normal sea proporcional al cuadrado de la ordenada. El coeficiente de proporcionalidad es igual a k.

4005. Hallar la línea para la cual cualquier tangente se corta con el eje de ordenadas en el punto equidistante entre el punto de contacto y el origen de coordenadas.

4006. Hallar la ecuación de la línea que corte el eje de abscisas en el punto $x = 1$ y que tiene la siguiente propiedad: La longitud de la subnormal en cada punto de la línea es igual al promedio aritmético de coordenadas en este punto.

4007. Hallar la línea para la cual el área del trapecio engendrado por los ejes de coordenadas, la ordenada de un punto cualquiera y la tangente en este punto, sea igual a la mitad del cuadrado de la abscisa.

4008. Hallar la línea para la cual el área comprendida entre el eje de abscisas, la misma línea y dos ordenadas una de las cuales es constante y la otra, variable, sea igual a la relación del cubo de la ordenada variable a la abscisa variable.

4009. Hallar la línea para la cual el área de la figura limitada por el eje de abscisas, dos ordenadas y el arco MM' de esta línea, sea proporcional al arco MM' cualesquiera que sean los puntos M y M'.

4010. Hallar la línea para la cual la abscisa del centro de gravedad del trapecio mixtilíneo engendrado por los ejes de coordenadas, la recta $x = a$ y la misma línea, sea igual a $\frac{3a}{4}$ cualquiera que sea a.

4011*. Hallar la línea tal que todas las tangentes a ella pasen por el punto dado (x_0, y_0).

4012. Hallar la línea que pase por el origen de coordenasas y para la cual todas sus normales pasen por el punto dado (x_0, y_0).

4013. ¿Qué línea tiene la siguiente propiedad: el ángulo formado entre el eje Ox y la tangente a la misma línea en cualquier punto suyo, es dos veces mayor que el ángulo formado entre el mismo eje y el radio polar del punto de contacto?

4014. Sobre un cuerpo de masa $m = 1$ actúa una fuerza proporcional al tiempo (el coeficiente de proporcionalidad es igual a k_1). Además, el cuerpo es objeto de la reacción del medio ambiente, que es proporcional a la velocidad del cuerpo (el coeficiente de proporcionalidad es igual a k_2). Hallar la ley del movimiento del cuerpo (la dependencia entre el trayecto y el tiempo).

4015. Una partícula efectúa la caída en el medio cuya resistencia es proporcional al cuadrado de la velocidad de la partícula. Mostrar que la ecuación del movimiento es la siguiente: $\frac{dv}{dt} = g - kv^2$, donde k es constante, g es la aceleración de la gravedad. Integrar esta ecuación y mostrar que v tiende a $\sqrt{\frac{g}{k}}$ para $t \to \infty$.

4016. La fuerza de rozamiento que retarda el movimiento giratorio de un disco en un medio líquido, es proporcional a la velocidad angular de la rotación.

1) El disco comenzó su movimiento giratorio con la velocidad angular de 3 vueltas por segundo, al cabo de 1 minuto gira con la velocidad angular de 2 vueltas por segundo. ¿Cuál sería su velocidad angular al cabo de 3 minutos de comenzar la rotación?

2) El disco comenzó a girar teniendo la velocidad angular de 5 vueltas por segundo, al cabo de 2 minutos gira con la velocidad angular de 3 vueltas por segundo. ¿Al cabo de cuánto tiempo después de comenzar la rotación, la velocidad angular del disco será de 1 vuelta por segundo?

4017. La bala penetra una tabla cuyo grosor es $h = 0{,}1$ m, con la velocidad $v_0 = 200$ m/s. Al atravesarla, sale por el otro lado con la velocidad $v_1 = 80$ m/s. Considerando la fuerza de la resistencia que ofrece la tabla al paso de la bala, proporcional al cuadrado de la velocidad de ésta, calcular el tiempo invertido por la bala en atravesar la tabla.

4018*. Una gota de agua cuya masa inicial es igual a M_0 g se evapora uniformemente con la velocidad m g/s, moviéndose por inercia con la velocidad inicial v_0 cm/s. La fuerza de la resistencia del medio es proporcional a la velocidad del movimiento de la gota y a su radio, siendo en el momento inicial ($t = 0$) igual a f_0 dinas. Hallar la dependencia entre la velocidad de la gota y el tiempo.

4019*. Una gota de agua de masa inicial M_0 g se evapora con la velocidad m g/s, efectuándose la caída libre en el aire. La fuerza de resistencia es proporcional a la velocidad del movimiento de la gota (el coeficiente de proporcionalidad es igual a k).

Hallar la dependencia entre la velocidad del movimiento de la gota y el tiempo transcurrido desde que comenzó a caer la gota, teniendo en cuenta que en el momento inicial del tiempo la velocidad de la gota era igual a cero. Considerar que $k \neq 2m$.

4020*. Resolver el mismo problema que en el ejercicio anterior, pero con respecto a una gota de forma esférica, considerando la fuerza de resistencia del aire proporcional al producto de la velocidad de la gota y el área de su superficie. La densidad del líquido es igual a γ. (Reducir a las cudraturas.)

4021*. Si en el curso de cierto proceso una substancia se transforma en otra, siendo la velocidad con que se efectúa la formación del producto, proporcional a la cantidad disponible de la substancia que sufre la transformación, este proceso se llama reacción (proceso) de primer orden.

Cierta substancia cuya cantidad inicial era igual a m_0, va transformándose en otra, siendo inmediato el comienzo del segundo proceso, debido al cual surge el segundo producto. Ambas transformaciones se efectúan como reacciones de primer orden. Los coeficientes de proporcionalidad son: k_1 para el primero, y k_2 para el segundo proceso.

¿Qué cantidad del segundo producto se obtiene al cabo de t unidades del tiempo después de comenzar el proceso?

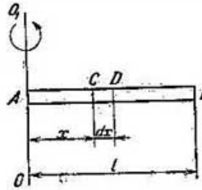

Fig. 69

4022. Un recipiente cuyo volumen es de 100 l contiene salmuera que lleva disueltos 10 kg de la sal. En el recipiente entra el agua, con la velocidad de 3 l/min, produciéndose una mezcla que, a su vez, se trasvasa, con la misma velocidad, al segundo recipiente, de igual cabida (es decir, 100 l) y relleno previamente de agua pura. De este segundo recipiente sale el exceso del líquido. ¿Cuánta cantidad de la sal contiene el segundo recipiente al pasar una hora? ¿Cuál es la cantidad máxima de la sal en el segundo recipiente? ¿Cuándo se lorga esta cantidad máxima? (La concentración de la sal se mantiene uniforme mezclándose el contenido.)

4023. La tensión y la resistencia de un circuito van variando uniformemente, por espacio de un minuto, desde el cero hasta 120 V, y desde el cero hasta 120Ω, respectivamente (véanse los ejercicios 3977—3978). La inductancia del circuito es constante (1 henrio). La corriente inicial es de I_0. Hallar la dependencia entre la corriente y el tiempo en el curso del primer minuto del experimento.

4024*. Un estrecho tubo cilíndrico y horizontal AB, cerrado herméticamente, encierra el gas. Gira uniformemente, con la velocidad angular ω, alrededor del eje vertical OO_1 que pasa por uno de los extremos del tubo, según lo muestra la fig. 69. El tubo mide l cm de longitud, su sección transversal es de S cm², la masa del gas encerrado es M g, la presión dentro del tubo en reposo es constante a lo largo de todo el tubo e igual a p_0. Hallar la distribución de la presión a lo largo del tubo cuando efectúa el movimiento giratorio, es decir, expresar p como función de x.

Otros ejemplos de ecuaciones de primer orden

En los ejercicios 4025—4037 hallar las soluciones generales de las ecuaciones reduciéndolas a lineales u homogéneas efectuando el cambio de variables.

4025. $y'=\frac{2y-x-5}{2x-y+4}$. **4026.** $y'=\frac{2x-y+1}{x-2y+1}$.

4027. $(x+y+1)\,dx=(2x+2y-1)\,dy$.

4028. $y'=\frac{2(y+2)^2}{(x+y-1)^2}$. **4029.** $y'=\frac{y^2-x}{2y(x+1)}$.

4030. $y'=\frac{y^3}{2(xy^2-x^2)}$. **4031.** $(1-xy+x^2y^2)\,dx=x^2\,dy$.

4032. $(x^2y^3-1)\,y'+2xy^3=0$.

4033. $yy'+x=\frac{1}{2}\left(\frac{x^2+y^2}{x}\right)^2$.

4034. $xy'+1=e^y$.

4035. $(x^2+y^2+1)\,dy+xy\,dx=0$.

4036. $x\,dx+y\,dy+x\,(x\,dy-y\,dx)=0$.

4037. $(x^2+y^2+y)\,dx=x\,dy$.

En los ejercicios 4038—4047 resover las ecuaciones de Bernoulli

4038. $y'+2xy=2x^3y^3$. **4039.** $y'+\frac{y}{x+1}+y^2=0$.

4040. $y^{n-1}(ay'+y)=x$. **4041.** $x\,dx=\left(\frac{x^2}{y}-y^3\right)dy$.

4042. $xy'+y=y^2\ln x$. **4043.** $y'-y\operatorname{tg}x+y^2\cos x=0$.

4044. $y'+\frac{2y}{x}=\frac{2\sqrt{y}}{\cos^2 x}$. **4045.** $xy'-4y-x^2\sqrt{y}=0$.

4046. $y\,dy-\frac{ay^2}{x^2}\,dx=\frac{b\,dx}{x^2}$.

4047. $y'=\frac{y\varphi(x)-y^2}{\varphi(x)}$, donde $\varphi(x)$ es la función dada.

4048. Hallar la línea para la cual un segmento recortado en el eje de ordenadas por la tangente en cualquier punto sea proporcional:

1) al cuadrado de la ordenada del punto de contacto,

2) al cubo de la ordenada del punto de contacto.

4049. Hallar las líneas dadas por las ecuaciones de la forma $\rho=f(\varphi)$ para las cuales el área de los sectores limitados por la misma línea y el radio polar de un punto constante $(\rho_0,\ \varphi_0)$ y el otro móvil $(\rho,\ \varphi)$ de la línea, sea proporcional al producto de las coordenadas polares ρ y φ de este punto móvil. El coeficiente de proporcionalidad es igual a k.

Ecuaciones en diferenciales totales

En los ejercicios 4050—4057 hallar las soluciones generales de las ecuaciones dadas.

4050. $(2x^3 - xy^2)\,dx + (2y^3 - x^2y)\,dy = 0.$

4051. $\frac{x\,dy}{x^2+y^2} = \left(\frac{y}{x^2+y^2} - 1\right) dx.$

4052. $e^y dx + (xe^y - 2y)\,dy = 0.$ **4053.** $yx^{y-1}\,dx + x^y \ln x\,dy = 0$

4054. $\frac{x\,dx + y\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{y\,dx - x\,dy}{x^2}.$

4055. $\frac{y + \operatorname{sen} x \cdot \cos^2(xy)}{\cos^2(xy)}\,dx + \frac{x}{\cos^2(xy)}\,dy + \operatorname{sen} y\,dy = 0.$

4056. $\left(1 + x\sqrt{x^2+y^2}\right) dx + \left(-1 + \sqrt{x^2+y^2}\right) y\,dy = 0.$

4057. $\left(\frac{1}{y}\operatorname{sen}\frac{x}{y} - \frac{y}{x^2}\cos\frac{y}{x} + 1\right) dx +$
$+\left(\frac{1}{x}\cos\frac{y}{x} - \frac{x}{y^2}\operatorname{sen}\frac{x}{y} + \frac{1}{y^2}\right) dy = 0.$

Factor integrante

En los ejercicios 4058—4062 hallar el factor integrante y las soluciones generales de las ecuaciones.

4058. $(x^2 + y)\,dx - x\,dy = 0.$

4059*. $y(1 + xy)\,dx - x\,dy = 0.$

4060. $(x^2 + y^2 + 2x)\,dx + 2y\,dy = 0.$

4061. $\frac{y}{x}\,dx + (y^3 - \ln x)\,dy = 0.$

4062. $(x\cos y - y\operatorname{sen} y)\,dy + (x\operatorname{sen} y + y\cos y)\,dx = 0.$

4063. Mostrar que la ecuación lineal $\frac{dy}{dx} + P(x)\,y = Q(x)$ tiene por factor integrante la función $e^{\int P(x)\,dx}$.

4064. Hallar el factor integrante de la ecuación de Bernoulli

$$y' + P(x)\,y = y^n Q(x).$$

4065. Determinar las condiciones para las cuales la ecuación

$$X(x, y)\,dx + Y(x, y)\,dy = 0$$

admita el factor integrante de la forma $M = F(x + y)$.

4066. Determinar las condiciones para las cuales la ecuación

$$X(x, y)\,dx + Y(x, y)\,dy = 0$$

admita el factor integrante de la forma $M = F(x \cdot y)$.

Diversos problemas

En los ejercicios 4067—4088 hallar las soluciones generales de las ecuaciones.

4067. $y' = ax + by + c$. **4068.** $ay' + by + cy^m = 0$.

4069. $y' = \frac{x+y-2}{y-x-4}$. **4070.** $y' = \frac{y^2+xy-x^2}{y^2}$.

4071. $y' = \frac{a^2}{(x+y)^2}$. **4072.** $y'(y^2-x) = y$.

4073. $\frac{2x\,dx}{y^3} + \frac{y^2-3x^2}{y^4}\,dy = 0$.

4074. $(2y + xy^3)\,dx + (x + x^2y^2)\,dy = 0$.

4075. $\left(2xy + x^2y + \frac{y^3}{3}\right) dx + (x^2 + y^2)\,dy = 0$.

4076. $y' = \frac{(1+y)^2}{x(y+1)-x^2}$.

4077. $x\,dy + y\,dx + y^2(x\,dy - y\,dx) = 0$.

4078. $\left[\frac{1}{x} - \frac{y^2}{(x-y)^2}\right] dx + \left[\frac{x^2}{(x-y)^2} - \frac{1}{y}\right] dy = 0$.

4079. $y' = x\sqrt{y} + \frac{xy}{x^2-1}$. **4080.** $y \operatorname{sen} x + y' \cos x = 1$.

4081. $y' - y + y^2 \cos x = 0$. **4082.** $y' = \frac{\cos x \operatorname{sen} y + \operatorname{tg}^2 x}{\operatorname{sen} x \cdot \cos y}$.

4083. $xy' \cos\frac{y}{x} = y \cos\frac{y}{x} - x$.

4084. $\left(x \cos\frac{y}{x} + y \operatorname{sen}\frac{y}{x}\right) y\,dx + \left(x \cos\frac{y}{x} - y \operatorname{sen}\frac{y}{x}\right) x\,dy = 0$.

4085. $y' = \frac{x}{\cos y} - \operatorname{tg} y$.

4086. $y - y' \cos x = y^2 \cos x\,(1 - \operatorname{sen} x)$.

4087. $2yy' = e^{\frac{x^2+y^2}{x}} + \frac{x^2+y^2}{x} - 2x$.

4088. $(1 + e^{\frac{x}{y}})\,dx + e^{\frac{x}{y}}\left(1 - \frac{x}{y}\right) dy = 0$.

4089. Hallar la línea para la cual la subnormal en cualquier punto sea a la suma de la abscisa y la ordenada como la ordenada de este punto es a la abscisa.

4090. Hallar la línea que tenga la propiedad de que un segmento de la tangente en cualquier punto, comprendido entre el eje Ox y la recta $y = ax + b$, se divide por el punto de contacto en dos partes iguales.

4091. Hallar la línea para la cual la distancia que media entre la normal en cualquier punto suyo y el origen de coordenadas y la que media entre la misma normal y el punto (a, b) estén en razón constante e igual a k.

4092. Hallar la línea para la cual la distancia que media entre el origen de coordenadas y la tangente en cualquier punto equivalga a la que media entre el origen de coordenadas y la normal en el mismo punto.

4093*. Hallar la línea que tenga la propiedad de que la ordenada de cualquier punto suyo sea la media proporcional entre la abscisa y la suma de la abscisa y la subnormal trazada hacia la línea en el mismo punto.

4094. En el circuito eléctrico cuya resistencia es $R = 3/2\Omega$, se introduce uniformemente, durante dos minutos, la tensión (desde cero hasta 120 V). Además, se introduce automáticamente una inductancia de modo que el número de henrios en el circuito equivale al número con que se mide la corriente en amperios. Hallar la dependencia entre la corriente y el tiempo durante los dos primeros minutos del experimento.

§ 2. Ecuaciones de primer orden (continuación)

Campo de direcciones. Isoclinas

4095. Sea dada la ecuación $y' = -\frac{x}{y}$. a) Construir el campo de direcciones determinado por la ecuación dada. b) Esclarecer la posición del vector del campo respecto al radio polar de cualquier punto del campo. c) Hallar la forma de las curvas integrales de la ecuación valiéndose del campo de direcciones. d) Hallar las curvas integrales resolviendo la ecuación dada aplicando el procedimiento ordinario (es decir, separando las variables). e) Señalar la familia de isoclinas para la ecuación dada.

4096. Escribir la ecuación diferencial cuyas isoclinas sean:
1) las hipérbolas equiláteras $xy = a$; 2) las parábolas $y^2 = 2px$; 3) las circunferencias $x^2 + y^2 = R^2$.

4097. Hallar las isoclinas de la ecuación diferencial de la familia de parábolas $y = ax^2$. Hacer un dibujo. Interpretar el resultado geométricamente.

4098. Mostrar que las rectas que pasan por el origen de coordenadas son isoclinas de la ecuación homogénea, y solamente homogénea.

4099. Indicar las ecuaciones lineales cuyas isoclinas sean rectas.

4100. Sean y_1, y_2, y_3 las ordenadas de cualesquiera tres isoclinas de cierta ecuación lineal correspondientes a una abscisa. Mostrar que la razón $\frac{y_2-y_1}{y_3-y_1}$ conserva un mismo significado cualquiera que sea la abscisa.

Integración aproximada de las ecuaciones diferenciales

4101. Sea dada la ecuación $y'=\frac{x^2+y^2}{10}$. Construir, de modo aproximado, una curva integral que corresponda al intervalo $1 \leqslant x \leqslant 5$ y que pase por el punto $M(1, 1)$.

4102. Sea dada la ecuación $y'=\frac{x^2+y^2}{1}$. Construir, de modo aproximado, una curva que corresponda al intervalo $0{,}5 \leqslant x \leqslant 3{,}5$ y que pase por el punto $(0{,}5;\ 0{,}5)$.

4103. Sea dada la ecuación $y'=xy^3+x^2$. Calcular y con dos cifras decimales, para $x=1$, aplicando el método de Euler y tomando en consideración que y es la solución particular que satisface a la condición inicial $y\mid_{x=0}=0$.

4104. Sea dada la ecuación $y'=\sqrt{x}\cdot y^2+1$. Calcular y para $x=2$ aplicando el método de Euler y tomando en consideración que y es la solución particular que satisface a la condición inicial $y\mid_{x=1}=0$. Calcular y con dos cifras decimales.

4105. Sea dada la ecuación $y'=\frac{xy}{2}$ y la condición inicial $y\mid_{x=0}=1$. Resolver la ecuación exactamente y hallar el valor de y para $x=0{,}9$. Luego, hallar este valor aplicando el método aproximado dividiendo el intrevalo $[0;\ 0{,}9]$ en nueve partes. Indicar el error relativo del último resultado.

4106. Sean dadas la ecuación $y'=\frac{3x^2}{x^3+y+1}$ y la condición inicial $y\mid_{x=1}=0$. Resolver la ecuación exactamente, y calcular el valor de x para $y=1$ aplicando algún método aproximado para integrar las ecuaciones (comparar con el valor de x que haya sido obtenido en la solución exacta).

4107. $y'=y^2+xy+x^2$. Aplicando el método de aproximaciones sucesivas hallar la segunda aproximación para la solución que satisfaga a la condición inicial $y\mid_{x=0}=1$.

4108. $y'=xy^3-1$. Hallar el valor de la ecuación dada, para $x=1$, que satisfaga a la condición inicial $y\mid_{x=0}=0$. Siguiendo el método de aproximaciones sucesivas limitarse a la tercera aproximación. Efectuar los cálculos con dos cifras decimales.

En los ejercicios 4109—4116 hallar varios primeros términos del desarrollo en serie de potencias de las soluciones de las ecuaciones para las condiciones iniciales indicadas.

4109. $y'=y^3-x;\ y\mid_{x=0}=1$.

4110. $y' = x^2y^2 - 1;\ y\,|_{x=0} = 1.$
4111. $y' = x^2 - y^2;\ y\,|_{x=0} = 0.$
4112. $y' = \frac{1-x^2}{y} + 1;\ y\,|_{x=0} = 1.$
4113. $y' = \frac{xy}{1+x+y};\ y\,|_{x=0} = 0.$
4114. $y' = e^y + xy;\ y\,|_{x=0} = 0.$
4115. $y' = \operatorname{sen} y - \operatorname{sen} x;\ y\,|_{x=0} = 0.$
4116. $y' = 1 + x + x^2 - 2y^2;\ y\,|_{x=1} = 1.$

Soluciones singulares. Ecuaciones de Clairaut y Lagrange

En los ejercicios 4117—4130 hallar las soluciones generales y singulares de las ecueciones de Clairaut y de Lagrange.

4117. $y = xy' + y'^2$.
4118. $y = xy' - 3y'^3$.
4119. $y = xy' + \frac{1}{y'}$.
4120. $x = xy' + \sqrt{1+y'^2}$.
4121. $y = xy' + \operatorname{sen} y'$.
4122. $xy' - y = \ln y'$.
4123. $y = y'^2 (x + 1)$.
4124. $2yy' = x (y'^2 + 4)$.
4125. $y = yy'^2 + 2xy'$.
4126. $y = x (1 + y') + y'^2$.
4127. $y' = \ln (xy' - y)$.
4128. $y = y' (x + 1) + y'^2$.
4129. $y = y'x + a \sqrt[3]{1-y'^3}$.
4130. $x = y \left(\frac{1}{\sqrt{y'}} - \frac{1}{y'}\right)$.

En los ejercicios 4131—4133 hallar las soluciones singulares de las ecuaciones aplicando el mismo procedimiento que el que se emplea en el caso de las ecuaciones de Lagrange y de Clairaut.

4131. $y'^2 - yy' + e^x = 0$.
4132. $x^2y'^2 - 2 (xy - 2) y' + y^2 = 0$.
4133. $y' (y' - 2x) = 2 (y - x^2)$.

4134. Demostrar el teorema: si una ecuación diferencial lineal es la de Clairaut, la familia de sus curvas integrales representa un haz de rectas.

4135. El área del triángulo engendrado por una tangente a la línea buscada y los ejes de coordenadas, es una constante. Hallar la línea.

4136. Hallar la línea cuyas tangentes corten, en los ejes de coordenadas, segmentos cuya suma sea igual a $2a$.

4137. Hallar la línea para la cual el producto de las distancias que median entre cualquier tangente y dos puntos dados sea constante.

4138. Hallar la línea para la cual el área del rectángulo que tiene por sus lados tangente y normal en cualquier punto, equivale al área del rectángulo cuyos lados son iguales a la longitud de la abscisa y la ordenada de este punto.

4139. Hallar la línea para la cual la suma de la normal y la subnormal sea proporcional a la abscisa.

4140*. Hallar la línea para la cual el segmento de la normal comprendido entre los ejes de coordenadas tenga la longitud constante e igual a a.

4141. La velocidad de un punto material, en cualquier momento de tiempo, se diferencia de la velocidad media (desde que comenzó el movimiento hasta este momento) en una magnitud proporcional a la energía cinética del punto e inversamente proporcional al tiempo transcurrido desde que comenzó el movimiento. Hallar la dependencia entre el trayecto y el tiempo.

Trayectorias ortogonales e isogonales. Evolventes

En los ejercicios 4142—4147 hallar las trayectorias ortogonales a las que se indican.

4142. A las elipses cuyo eje mayor es igual a $2a$.

4143. A las parábolas $y^2 = 4(x - a)$.

4144. A las circunferencias $x^2 + y^2 = 2ax$.

4145. A las cisoides $(2a - x) y^2 = x^3$.

4146. A las parábolas iguales que tocan a una recta dada siendo el vértice de cada parábola el punto de contacto.

4147. A los círculos de un mismo radio cuyos centros se encuentran sobre una recta dada.

4148. Hallar la familia de trayectorias que cortan las líneas $x^2 = 2a(y - x\sqrt{3})$ formándose el ángulo $\alpha = 60°$.

4149. Hallar las trayectorias isogonales de la familia de parábolas $y^2 = 4ax$, el ángulo formado es $\alpha = 45°$.

4150*. Hallar las líneas de propagación del sonido por el plano, si a lo largo de una dirección sopla el viento a la velocidad constante a. La fuente del sonido es inmóvil y se halla en el mismo plano.

En los ejercicios 4151—4154 hallar las evolventes de las líneas que se indican.

4151. De la circunferencia $x^2 + y^2 = R^2$.

4152. De la catenaria $y = a \operatorname{ch}\frac{x}{a}$.

4153. De la evolvente del círculo

$$x = a(\cos t + t \operatorname{sen} t), \qquad y = a(\operatorname{sen} t - t \cos t).$$

4154. De la parábola semicúbica $y = 3t^2$, $x = -2t^3$.

§ 3. Ecuaciones de segundo orden y de órdenes superiores

Casos particulares de las ecuaciones de segundo orden

En los ejercicios 4155—4182 hallar las soluciones generales de las ecuaciones que se indican.

4155. $y'' = x + \operatorname{sen} x$. **4156.** $y'' = \operatorname{arctg} x$.

4157. $y'' = \ln x$. **4158.** $xy'' = y'$.

4159. $y'' = y' + x$. **4160.** $y'' = \frac{y'}{x} + x$.

4161. $(1 + x^2)\, y'' + (y')^2 + 1 = 0$.

4162. $xy'' = y' \ln \frac{y'}{x}$.

4163. $(y'')^2 = y'$. **4164.** $2xy'y'' = (y')^2 + 1$.

4165. $y'' - 2 \operatorname{ctg} x \cdot y' = \operatorname{sen}^3 x$.

4166. $1 + (y')^2 = 2yy''$.

4167. $(y')^2 + 2yy'' = 0$. **4168.** $a^2 y'' - y = 0$.

4169. $y'' = \frac{1}{4\sqrt{y}}$. **4170.** $y'' + \frac{2}{1-y} (y')^2 = 0$.

4171. $yy'' + (y')^2 = 1$. **4172.** $yy'' = (y')^2$.

4173. $2yy'' - 3\,(y')^2 = 4y^2$.

4174. $y\,(1 - \ln y)\, y'' + (1 + \ln y)\,(y')^2 = 0$.

4175. $y'' = 2yy'$.

4176. $\cos y \cdot \frac{d^2y}{dx^2} + \operatorname{sen} y \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{dy}{dx}$.

4177. $yy'' - (y')^2 = y^2 y'$.

4178. $yy'' - yy' \ln y = (y')^2$.

4179. $y'' = y' \left(\frac{y'}{y} - 2\sqrt{\frac{y'}{y} - 4}\right)$.

4180. $(x + a)\, y'' + x\,(y')^2 = y'$.

4181*. $yy'y'' = (y')^3 + (y'')^2$.

4182. $xy'' - \frac{1}{4}(y'')^2 - y' = 0$.

En los ejercicios 4183—4188 resolver las ecuaciones mediante una sustitución conveniente: $yy' = p$, $(y')^2 = p$, $xy' = p$, $\frac{y'}{y} = p$, etc.

4183. $xyy'' + x\,(y')^2 = 3yy'$. **4184.** $xy'' = y'\,(e^y - 1)$.

4185. $yy'' + (y')^2 = x$. **4186.** $y'' + \frac{1}{x} y' - \frac{y}{x^2} = 0$.

4187. $x^2 y \frac{d^2y}{dx^2} - \left(x \frac{dy}{dx} - y\right)^2 = 0$.

4188. $yy'' = y'\,(2\sqrt{yy'} - y')$.

En los ejercicios 4189—4199 hallar las soluciones particulares de las ecuaciones para las condiciones iniciales que se indican.

4189. $y''(x^2+1)=2xy'$; $\quad y|_{x=0}=1, \quad y'|_{x=0}=3.$

4190. $xy''+x(y')^2-y'=0$; $\quad y|_{x=2}=2, \quad y'|_{x=2}=1.$

4191. $y''=\dfrac{y'}{x}+\dfrac{x^2}{y'}$; $\quad y|_{x=0}=0, \quad y'|_{x=2}=4.$

4192. $2y''=3y^2$; $\quad y|_{x=-2}=1, \quad y'|_{x=-2}=-1.$

4193. $yy''=(y')^2-(y')^3$; $\quad y|_{x=1}=1, \quad y'|_{x=1}=-1.$

4194. $y^3y''=-1$; $\quad y|_{x=1}=1, \quad y'|_{x=1}=0.$

4195. $y^4-y^3y''=1$; $\quad y|_{x=0}=\sqrt{2}, \quad y'|_{x=0}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}.$

4196. $y''=e^{2y}$; $\quad y|_{x=0}=0, \quad y'|_{x=0}=1.$

4197. $2(y')^2=y''(y-1)$; $\quad y|_{x=1}=2, \quad y'|_{x=1}=-1.$

4198*. $x^4y''=(y-xy')^3$; $\quad y|_{x=1}=1, \quad y'|_{x=1}=1.$

4199. $y''=xy'+y+1$; $\quad y|_{x=0}=1, \quad y'|_{x=0}=0.$

4200*. ¿Cuál es la línea cuya propiedad consiste en que el radio de curvatura en cualquier punto es proporcional a la longitud de la normal? Considerar el coeficiente de proporcionalidad igual a $k=-1, +1, -2, +2$.

4201. Hallar la línea para la cual la proyección del radio de curvatura sobre el eje Oy sea una constante igual a a.

4202. Hallar la línea que pase por el origen de coordenades y para la cual el área del triángulo MTP (véase la fig. 70) engendrado por la tangente en un punto M de la línea buscada, por la ordenada MP de este punto y por el eje de abscisas, y el área del triángulo mixtilíneo OMP, están en razón constante e igual al número k $\left(k>\frac{1}{2}\right)$.

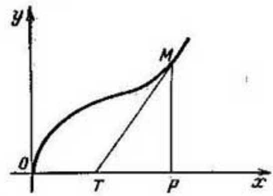

Fig. 70

4203. Hallar la línea para la cual la longitud del arco medida desde un cierto punto, es proporcional al coeficiente angular de la tangente al punto extremo del arco.

4204. Un punto de masa m es lanzado hacia arriba verticalmente, con la velocidad inicial v_0. La fuerza de resistencia del aire es igual a kv^2. Si consideramos la vertical como el eje Oy, para el movimiento dirigido hacia arriba tendremos:

$$m\frac{d^2y}{dt^2}=-mg-kv^2,$$

y para la caída tendremos:

$$m\frac{d^2y}{dt}=-mg+kv^2,$$

donde $v=\frac{dy}{dt}$. Hallar la velocidad del cuerpo en el momento en que efectúa la caída.

4205. Un hilo flexible y no extensible es suspendido por sus dos extremos. ¿Cuál sería la forma que adoptase, en estado de equilibrio, el hilo bajo la acción de una carga distribuida uniformemente a lo largo de la proyección del hilo sobre el plano horizontal? Se prescinde del peso del hilo.

4206. Hallar la ley del movimiento rectilíneo efectuado por un punto material de masa m si se sabe que el trabajo realizado por la fuerza que tiene la misma dirección que el movimiento y que depende del trayecto, es proporcional al tiempo transcurrido desde que comenzó. El coeficiente de proporcionalidad es igual a k.

4207*. Un rayo de luz, procedente del aire (índice de refracción m_0) incide sobre un líquido cuyo índice de refracción es variable. El ángulo de incidencia formado entre la vertical y la dirección del rayo es α_0. El índice de refracción del líquido depende linealmente de la profundidad y es constante en el plano paralelo al horizonte, mientras que a la superficie del líquido es igual a m_1, a la profundidad h, igual a m_2. Hallar la forma del rayo de luz en el líquido. (El índice de refracción del medio es inversamente proporcional a la velocidad de la propagación de luz.)

Casos particulares de las ecuaciones de órdenes superiores

En los ejercicios 4208—4217 hallar las soluciones generales de las ecuaciones:

4208. $y'''=\frac{1}{x}$.

4209. $y'''=\cos 2x$.

4210. $y^{X}=e^{ax}$.

4211. $x^2y''=(y')^2$.

4212. $xy^{V}=y^{IV}$.

4213. $y'''=(y'')^3$.

4214. $y'y'''=3(y'')^2$.

4215. $yy''-y'y''=0$.

4216. $y''[1+(y')^2]=3y'(y'')^2$.

4217. $(y'')^2-y'y'''=\left(\frac{y'}{x}\right)^2$.

Soluciones aproximadas

4218. Al estudiar las oscilaciones de un sistema material de un grado de libertad, se presenta la ecuación diferencial de la siguiente forma $y''=f_1(x)+f_2(y)+f_3(y')$. Resolver esta ecuación gráficamente, si

1) $f_1(x) = 0$, $f_2(y) = -\sqrt{y}$, $f_3(y') = 0{,}5y'$ e $y|_{x=0} = y'|_{x=0} = 0$;

2) $f_1(x) = -x$, $f_2(y) = 0$, $f_3(y') = -0{,}1y' - 0{,}1y'^3$ e $y|_{x=0} = y'|_{x=0} = 1$.

4219. $y'' = yy' - x^2$; $y|_{x=0} = 1$, $y'|_{x=0} = 1$.

1) Resolver esta ecuación gráficamente.

2) Hallar varios primeros términos de desarrollo de la solución en serie de potencias.

4220. Hallar los seis primeros términos de desarrollo en serie de la solución de la ecuación diferencial $y'' = \frac{y'}{y} - \frac{1}{x}$ que satisface las condiciones iniciales $y|_{x=1} = 1$, $y'|_{x=1} = 0$.

4221. Hallar la solución particular de la ecuación $y'' = x \operatorname{sen} y'$, buscándola en forma de serie de potencias, que satisface las condiciones iniciales $y|_{x=1} = 0$, $y'|_{x=1} = \frac{\pi}{2}$. (Limitarse a seis primeros términos.)

4222. Hallar la solución particular $y = f(x)$ de la ecuación $y'' = xyy'$, buscándola en forma de serie de potencias. La solución satisface las condiciones iniciales $f(0) = 1$, $f'(0) = 1$. Si se limita a los cinco primeros términos de desarrollo, ¿son bastantes para calcular $f(-0{,}5)$ con exactitud hasta 0,001?

4223. Hallar los siete primeros términos de desarrollo en serie de la solución de la ecuación diferencial $yy'' + y' + y = 0$, que satisface las condiciones iniciales $y|_{x=0} = 1$, $y'|_{x=0} = 0$. ¿De qué orden infinitesimal es la diferencia $y - (2 - x - e^{-x})$ para $x \to 0$?

4224. Hallar los 12 primeros términos de desarrollo en serie de la solución de la ecuación diferencial $y'' + yy' - 2 = 0$, que satisface las condiciones iniciales $y|_{x=0} = 0$, $y'|_{x=0} = 0$. Calcular la integral $\int_0^1 y\,dx$ con exactitud hasta 0,001. Calcular $y'|_{x=0,5}$ con exactitud hasta 0,00001.

4225*. Un circuito eléctrico está compuesto de la inductancia $L = 0{,}4$ henrios y un baño eléctrico, los cuales están conectados sucesivamente. El baño contiene 1 litro del agua acidulada con un poco de ácido sulfúrico. La corriente eléctrica descompone el agua debido a lo cual cambian la concentración y, como consecuencia, la resistencia de la disolución en el baño. La tensión en los bornes se mantiene constante (20 V). La cantidad de sustancia desprendida durante la electrólisis es proporcional a la corriente, al tiempo y al equivalente electroquímico de la sustancia (ley de Faraday). El equivalente electroquímico del agua es igual a 0,000187 g/C. Al comienzo del experimento la resistencia de la disolución fue igual a $R_0 = 2\Omega$, la corriente inicial, 10 A. Hallar la depedencia (en forma de una serie de potencias) entre el volumen del agua en el recipiente y entre el tiempo.

4226*. Un circuito eléctrico está compuesto de la inductancia $L = 0{,}4$ henrios y un baño eléctrico, los cuales están conectados sucesivamente. La resistencia inicial del líquido en el baño fue igual a 2 ohmios. Un litro del agua en el baño lleva disueltos 10 g de cloruro de hidrógeno. La corriente eléctrica descompone el ácido, cambiando la concentración de la disolución (compárese con el ejercicio anterior en que cambia no la cantidad de sustancia disuelta, sino el volumen del disolvente). La tensión en los bornes es igual a 20 V, el equivalente electroquímico k del cloruro de hidrógeno es igual a 0,000381 g/C, la corriente inicial, 10 A. Hallar la dependencia (en forma de una serie de potencias) entre la cantidad del ácido clorhídrico en la disolución y el tiempo.

§ 4. Ecuaciones lineales

4227. Las funciones x^3 y x^4 satisfacen cierta ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden. Comprobar que constituyen el sistema fundamental y formar la ecuación.

4228. Lo mismo, con respecto a las funciones e^x y x^2e^x.

4229. Las funciones x, x^3, e^x forman el sistema fundamental de soluciones de la ecuación diferencial lineal homogénea de tercer orden. Formar esta ecuación.

4230. Las funciones x^2 y x^3 forman el sistema fundamental de soluciones de la ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden. Hallar la solución de esta ecuación que satisfaga las condiciones iniciales $y\,|_{x=1} = 1$, $y'\,|_{x=0} = 0$.

4231. Las funciones $\cos^2 x$ y $\operatorname{sen}^2 x$ satisfacen cierta ecuación lineal homogénea de segundo orden:

a) comprobar que forman el sistema fundamental de soluciones;

b) formar la ecuación;

c) mostrar que las funciones 1 y $\cos 2x$ son otro sistema fundamental de esta misma ecuación.

4232*. Si y_1 es la solución particular de la ecuación

$$y'' + y'P(x) + yQ(x) = 0,$$

entonces,

$$y_2 = Cy_1 \int e^{-\int P(x)dx} \frac{dx}{y_1^2}$$

(C es una constante) también es la solución. Mostrar esto aplicando tres métodos:

1) probando directamente, 2) sustituyendo $y = y_1z$, 3) valiéndose de la fórmula de Ostrogradski.

4233. Hallar la solución general de la ecuación $(1-x^2)y''-2xy'+2y=0$, conociendo su solución particular $y_1=x$ y valiéndose de la fórmula del ejercicio 4232.

4234. Resolver la ecuación $y''+\frac{2}{x}y'+y=0$ conociendo su solución particular $y_1=\frac{\operatorname{sen} x}{x}$.

4235. La ecuación $(2x-x^2)y''+(x^2-2)y'+2(1-x)y=0$ tiene la siguiente solución: $y=e^x$. Hallar la solución de la ecuación que satisfaga las condiciones iniciales $y|_{x=1}=0$, $y'|_{x=1}=1$.

4236*. Hallar la condición necesaria y suficiente para que la ecuación $y''+y'P(x)-yQ(x)=0$ tenga dos soluciones linealmente independientes y_1 e y_2 que satisfacen la condición $y_1y_2=1$.

4237*. Hallar la solución general de la ecuación

$$(1-x^2)y''-xy'+9y=0,$$

si su solución particular es un polinomio de tercer grado.

En los ejercicios 4238—4240 es fácil dar con una solución particular (sin tener en cuenta la solución trivial $y=0$) para la ecuación dada. Hallar las soluciones generales de estas ecuaciones.

4238. $y''-\operatorname{tg} x\cdot y'+2y=0$. 4239. $y''-y'+\frac{y}{x}=0$.

4240. $y''-\frac{2x}{x^2+1}y'+\frac{2y}{x^2+1}=0$.

4241. Hallar la solución general de la ecuación

$$x^3y'''-3x^2y''+6xy'-6y=0,$$

conociendo las soluciones particulares $y_1=x$, $y_2=x^2$.

En los ejercicios 4242—4244 hallar las soluciones generales de las ecuaciones no homogéneas.

4242. $x^2y''-xy'+y=4x^3$.

4243. $y''-\frac{x}{x-1}y'+\frac{1}{x-1}y=x-1$.

4244. $(3x+2x^2)y''-6(1+x)y'+6y=6$.

4245. La ecuación $(1+x^2)y''+2xy'-2y=4x^2+2$ es susceptible de tener la siguiente solución particular: $y=x^2$. Hallar la solución de esta ecuación que satisfaga las condiciones $y|_{x=-1}=0$, $y'|_{x=-1}=0$.

4246. Hallar los seis primeros términos de desarrollo en serie de potencias de la solución de la ecuación diferencial $y''-(1+x^2)y=0$ que satisfaga las condiciones iniciales $y|_{x=0}=-2$, $y'|_{x=0}=2$.

4247. Hallar los nueve primeros términos de desarrollo en serie de potencias de la solución de la ecuación diferencial $y''=x^2y-y'$ que satisfaga las condiciones iniciales $y|_{x=0}=1$, $y'|_{x=0}=0$.

4248. Escribir en forma de serie de potencias la solución particular de la ecuación $y'' - xy' + y - 1 = 0$, $y|_{x=0} = 0$, $y'|_{x=0} = 0$.

4249. Escribir en forma de serie de potencias la solución general de la ecuación $y'' = ye^x$. (Limitarse a los seis primeros términos.)

4250. Escribir en forma de serie de potencias la solución general de la ecuación $y'' + xy' - x^2y = 0$. (Limitarse a los seis primeros términos).

Ecuaciones con coeficientes constantes

En los ejercicios 4251—4261 hallar las soluciones generales de las ecuaciones.

4251. $y'' + y' - 2y = 0$. **4252.** $y'' - 9y = 0$.

4253. $y'' - 4y' = 0$. **4254.** $y'' - 2y' - y = 0$.

4255. $3y'' - 2y' - 8y = 0$. **4256.** $y'' + y = 0$.

4257. $y'' + 6y' + 13y = 0$. **4258.** $4y'' - 8y' + 5y = 0$.

4259. $y'' - 2y' + y = 0$. **4260.** $4\frac{d^2x}{dt^2} - 20\frac{dx}{dt} + 25x = 0$.

4261. $2y'' + y' + 2\operatorname{sen}^2 15° \cos^2 15° y = 0$.

En los ejercicios 4262—4264 hallar las soluciones de las ecuaciones que satisfagan las condiciones iniciales que se indican.

4262. $y'' - 4y' + 3y = 0$; $y|_{x=0} = 6$, $y'|_{x=0} = 10$.

4263. $y'' + 4y' + 29y = 0$; $y|_{x=0} = 0$, $y'|_{x=0} = 15$.

4264. $4y'' + 4y' + y = 0$; $y|_{x=0} = 2$, $y'|_{x=0} = 0$.

4265. Sea dada la solución paricular de cierta ecuación lineal homogénea de segundo orden, con coeficientes constantes $y_1 = e^{mx}$. El discriminante de la correspondiente ecuación característica es igual a cero. Hallar la solución particular de esta ecuación diferencial, la cual, junto con su derivada, se reduce a **1** para $x = 0$.

4266. Hallar la curva integral de la ecuación $y'' + 9y = 0$ que pase por el punto $M(\pi, -1)$ y que toque la recta $y + 1 = x - \pi$ en este mismo punto.

4267. Hallar la curva integral de la ecuación $y'' + ky = 0$, que pase por el punto $M(x_0, y_0)$ y que toque la recta $y - y_0 = a(x - x_0)$ en este mismo punto.

En los ejercicios 4268—4282 formar las soluciones generales de las ecuaciones no homogéneas buscando sus soluciones particulares mediante la selección conveniente o bien aplicando el método de variación de las constantes arbitrarias.

4268. $2y'' + y' - y = 2e^x$. **4269.** $y'' + a^2y = e^x$.

4270. $y'' - 7y' + 6y = \operatorname{sen} x$. **4271.** $y'' + 2y' + 5y = -\frac{17}{2}\cos 2x$.

4272. $y'' - 6y' + 9y = 2x^2 - x + 3$.

4273. $y'' - 2y' + 2y + 2x$. **4274.** $y'' + 4y' - 5y = 1$.

4275. $y'' - 3y' + 2y = f(x)$, si $f(x)$ es igual a:

1) $10e^{-x}$; 2) $3e^{2x}$; 3) $2\operatorname{sen} x$; 4) $2x^3 - 30$; 5) $2e^x \cos\frac{x}{2}$;

6) $x - e^{-2x} + 1$; 7) $e^x(3 - 4x)$; 8) $3x + 5 \operatorname{sen} 2x$;
9) $2e^x - e^{-2x}$; 10) $\operatorname{sen} x \operatorname{sen} 2x$; 11) $\operatorname{sh} x$.

4276. $2y'' + 5y' = f(x)$, si $f(x)$ es igual a:
1) $5x^2 - 2x - 1$; 2) e^x; 3) $29 \cos x$; 4) $\cos^2 x$;
5) $0{,}1e^{-2,5x} - 25 \operatorname{sen} 2{,}5\,x$; 6) $29x \operatorname{sen} x$; 7) $100x \cdot e^{-x} \cos x$;
8) $3 \cdot \operatorname{ch} \frac{5}{2} x$.

4277. $y'' - 4y' + 4y = f(x)$, si $f(x)$ es igual a:
1) 1; 2) e^{-x}; 3) $3e^{2x}$; 4) $2(\operatorname{sen} 2x + x)$; 5) $\operatorname{sen} x \cos 2x$;
6) $\operatorname{sen}^3 x$; 7) $8(x^2 + e^{2x} + \operatorname{sen} 2x)$; 8) $\operatorname{sh} 2x$;
9) $\operatorname{sh} x + \operatorname{sen} x$; 10) $e^x - \operatorname{sh}(x - 1)$.

4278. $y'' + y = f(x)$, si $f(x)$ es igual a:
1) $2x^3 - x + 2$; 2) $-8 \cos 3x$; 3) $\cos x$; 4) $\operatorname{sen} x - 2e^{-x}$;
5) $\cos x \cos 2x$; 6) $24 \operatorname{sen}^4 x$; 7) $\operatorname{ch} x$.

4279. $5y'' - 6y' + 5y = f(x)$, si $f(x)$ es igual a:
1) $5e^{\frac{3}{5}x}$; 2) $\operatorname{sen} \frac{4}{5} x$; 3) $e^{2x} + 2x^3 - x + 2$; 4) $e^{\frac{3}{5}} \cdot \cos x$;
5) $e^{\frac{3}{5}} \cdot \operatorname{sen} \frac{4}{5} x$; 6) $13\, e^x \cdot \operatorname{ch} x$.

4280. $y'' + y + \operatorname{ctg}^2 x = 0$. **4281.** $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x^2+1}$.

4282. $y'' - y' = f(x)$, si $f(x)$ es igual a:
1) $\frac{e^x}{1+e^x}$; 2) $e^{2x}\sqrt{1 - e^{2x}}$; 3) $e^{2x} \cos e^x$.

En los ejercicios 4283—4287 hallar las soluciones particulares de las ecuaciones que satisfagan las condiciones iniciales que se indican.

4283. $4y' + 16y' + 15y = 4e^{-\frac{3}{2}x}$; $y|_{x=0} = 3$, $y|_{x=0} = -5{,}5$.

4284. $y'' - 2y' + 10y = 10x^2 + 18x + 6$; $y|_{x=0} = 1$, $y'|_{x=0} = 3{,}2$.

4285. $y'' - y' = 2(1 - x)$; $y|_{x=0} = 1$, $y'|_{x=0} = 1$.

4286. $y'' - 2y' = e^x(x^2 + x - 3)$; $y|_{x=0} = 2$, $y'|_{x=0} = 2$.

4287. $y'' + y + \operatorname{sen} 2x = 0$; $y|_{x=\pi} = y'|_{x=\pi} = 1$.

4288*. Mostrar que la solución particular $\bar{y}$ de la ecuación $a_0y'' + a_1y' + a_2y = Ae^{px}$ (a_0, a_1, a_2 son los coeficientes constantes, p y A son los números reales o complejos) tiene la forma $\bar{y} = \frac{A}{\varphi(p)} e^{px}$, si p no es la raíz de la ecuación característica $\varphi(r) \equiv a_0r^2 + a_1r + a_2 = 0$; $\bar{y} = \frac{Ax}{\varphi'(p)} e^{px}$, si p es la raíz simple de la ecuación característica; $\bar{y} = \frac{Ax^2}{\varphi''(p)} e^{px}$, si p es la raíz doble de la ecuación característica.

En los ejercicios 4289—4292 hallar las soluciones generales de las ecuaciones de Euler.

4289. $x^2y'' - 9xy' + 21y = 0$. **4290.** $x^2y'' + xy' + y = x$.

4291. $y'' - \frac{y'}{x} + \frac{y}{x^2} = \frac{2}{x}$.

4292. $x^2y'' - 2xy' + 2y + x - 2x^3 = 0$.

4293. Si el eje del árbol de una turbina está colocado horizontalmente y si el centro de gravedad de un disco que lleva el árbol, no

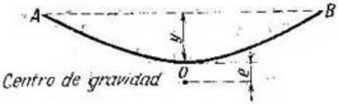

Fig. 71

está en el eje, la flexión y del eje del árbol (véase la fig. 71), al girar éste, satisface la ecuación

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \left(\frac{1}{m\alpha} - \omega^2\right) y = g \cos \omega t + \omega^2 e,$$

donde m es la masa del disco, α es el número constante que depende del tipo de sujeción que se emplee en los extremos A y B; ω es la velocidad angular de la revolución, e es la excentricidad del centro de gravedad del disco. Hallar la integral general de esta ecuación.

4294. Un punto material de masa de 1 g efectúa el movimiento de repulsión a lo largo de una recta, desde un centro. La fuerza de repulsión es proporcional a la distancia que media entre el punto y el centro (el coeficiente de proporcionalidad es igual a 4). La resistencia del medio es proporcional a la velocidad del movimiento (el coeficiente de proporcionalidad es igual a 3). Al comenzar el movimiento, la distancia entre el punto y el centro es igual a 1 cm, la velocidad, igual a cero. Hallar la ley del movimiento.

4295. Una partícula de masa igual a 1 g avanza a lo largo de una recta hacia el punto A, bajo la acción de cierta fuerza de atracción proporcional a la distancia que media entre la partícula y el punto A. A la distancia igual a 1 cm actúa la fuerza igual a 0,1 din. La resistencia del medio es proporcional a la velocidad del movimiento e igual a 0,4 din a la velocidad de 1 cm/s. En el momento $t = 0$ la partícula se halla a 10 cm del punto A y su velocidad es igual a cero. Hallar la dependencia entre la distancia y el tiempo y calcular la distancia para $t = 3$ s (con exactitud hasta 0,01 cm).

4296. Un punto material de masa m se desplaza, a lo largo de la recta, del punto A al punto B, bajo la acción de la fuerza constante F. La resistencia del medio es proporcional a la distancia que medie entre el cuerpo y el punto B. En el momento inicial (en el punto A) es igual a f ($f < F$). La velocidad inicial del punto es igual a cero. ¿Cuánto tiempo tardará el punto en desplazarse de A a B? ($AB = a$).

4297. Un cuerpo de masa igual a 200 g está colgado del muelle. Al ser extendido éste en 2 cm, el cuerpo fue sacado del estado de reposo y fue suelto (sin velocidad inicial). Hallar la ecuación del movimiento del cuerpo considerando la resistencia del medio proporcional a la velocidad del movimiento. Si el cuerpo se desplaza a la velocidad 1 cm/s, el medio ofrece la resistencia igual a 0,1 kgf. La tensión del muelle al ser extendido en 2 cm es igual a 10 kgf. Se prescinde del peso del muelle.

4298. Un zoquete de madera cilíndrico ($S = 100$ cm^2, $h = 20$ cm, $\gamma = 0{,}5$ g/cm^3 ha sido sumergido completamente en el agua y suelto sin velocidad inicial. Considerando que la fuerza de rozamiento es proporcional a la altura de la parte sumergida, esclarecer cuál debe ser el coeficiente de proporcionalidad k para que sobre la superficie del agua aparezca exactamente la mitad del zoquete, como resultado de la primera subida.

¿Cuánto tiempo (t_1) durará la primera subida?

¿Cuál es la ecuación del movimiento durante la primera subida?

4299*. Un tubo largo y estrecho gira alrededor de un eje vertical y perpendicular a aquél, con velocidad angular ω. En el momento inicial, a la distancia a_0 del eje, en el interior del tubo hubo un pequeño globo de masa m. Considerando que en el momento inicial la velocidad del globo, respecto al tubo, era igual a cero, hallar la ley del movimiento del globo respecto al tubo.

4300. Resolver el problema del ejercicio anterior suponiendo que el globo está sujeto al punto O con un muelle. La fuerza con que el muelle actúa sobre el globo es proporcional a la deformación del muelle, la fuerza igual a k dinas modifica la longitud del muelle en 1 cm. La longitud del muelle en estado libre es igual a a_0.

Ecuaciones de órdenes superiores

En los ejercicios 4301—4311 hallar las soluciones generales de las ecuaciones.

4301. $y''' + 9y' = 0$. **4302.** $y^{(IV)} - 13y'' + 36y = 0$.

4303. $y^{(IV)} = 8y'' - 16y$. **4304.** $y^{(IV)} = 16y$.

4305. $y''' - 13y' - 12y = 0$.

4306. $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$.

4307. $y^{(IV)} + 2y''' + y'' = 0$. **4308.** $y^{(n)} = y^{(n-2)}$.

4309. $y^{(IV)} + y = 0$.

4310. $64y^{(VIII)} + 48y^{(VI)} + 12y^{(IV)} + y'' = 0$.

4311. $y^{(n)} + \frac{n}{1} y^{(n-1)} + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2} y^{(n-2)} + \ldots + \frac{n}{1} y' + y = 0$.

4312. $y''' = -y'$; $y|_{x=0} = 2$, $y'|_{x=0} = 0$, $y''|_{x=0} = -1$.

4313. $y^{(V)} - y'$; $y|_{x=0} = 0$, $y'|_{x=0} = 1$, $y''|_{x=0} = 0$, $y'''|_{x=0} = 1$, $y^{(IV)}|_{x=0} = 2$.

En los ejercicios 4314—4320 formar las soluciones generales de las ecuaciones no homogéneas, buscando sus soluciones particulares mediante la selección conveniente o bien aplicando el método de variación de las constantes arbitrarias.

4314. $y''' - 4y'' + 5y' - 2y = 2x + 3$.

4315. $y''' - 3y' + 2y = e^{-x}(4x^2 + 4x - 10)$.

4316. $y^{(IV)} + 8y'' + 16y = \cos x$.

4317. $y^{(IV)} + 2a^2y'' + a^4y = \cos ax$.

4318. $y^{(V)} + y''' = x^2 - 1$.

4319. $y^{(IV)} - y = xe^x + \cos x$.

4320. $y^{(IV)} - 2y'' + y = 8(e^x + e^{-x}) + 4(\operatorname{sen} x + \cos x)$.

4321. $y''' + 2y'' + y' + 2e^{-2x} = 0$; $y|_{x=0} = 2$,

$$y'|_{x=0} = 1, \quad y''|_{x=0} = 1.$$

4322. $y''' - y' = 3(2 - x^2)$; $y|_{x=0} = y'|_{x=0} = y''|_{x=0} = 1$.

4323. Resolver la ecuación de Euler $x^3y''' + xy' - y = 0$.

§ 5. Sistemas de ecuaciones diferenciales

4324.1. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y - 7x, \\ \dfrac{dy}{dt} + 2x + 5y = 0. \end{cases}$

4324.2. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x + 4y. \end{cases}$

4324.3. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - 3y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x + y. \end{cases}$

4324.4. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - y + z, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + y - z, \\ \dfrac{dz}{dt} = 2x - y. \end{cases}$

4324.5 $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - 2y - z, \\ \dfrac{dy}{dt} = -x + y + z, \\ \dfrac{dz}{dt} = x - z. \end{cases}$

4324.6. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x - y + z, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + y + z, \\ \dfrac{dz}{dt} = 4x - y + 4z \end{cases}$

(las raíces de la ecuación característica son $r_1 = 1$, $r_2 = 2$, $r_3 = 5$).

4324.7 $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 3y - z, \\ \dfrac{dz}{dt} = 2y + 3z - x \end{cases}$

(las raíces de la ecuación característica son $r_1 = 2$, $r_{2,3} = 3 \pm i$).

4325. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + e^t + e^{-t}. \end{cases}$

4326. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2y - 5x + e^t, \\ \dfrac{dy}{dt} = x - 6y + e^{-2t}. \end{cases}$

4327. $\begin{cases} yzy' = x \left(y' = \dfrac{dy}{dx} \right), \\ y^2 z' = x \left(z' = \dfrac{dz}{dx} \right). \end{cases}$

4328. $\begin{cases} y' = \dfrac{x+y}{z} \\ z' = \dfrac{x-y}{y}. \end{cases}$

4329. $\begin{cases} xy' = y, \\ xzz + x^2 + y^2 = 0. \end{cases}$

4330 $\begin{cases} y' = \dfrac{2xy}{x^2 - y^2 - z^2}, \\ z' = \dfrac{2xz}{x^2 - y^2 - z^2}. \end{cases}$

4331. $\begin{cases} z = y' (z - y)^2, \\ y = z' (z - y)^2. \end{cases}$

4332. $\begin{cases} 4 \dfrac{dx}{dt} - \dfrac{dy}{dt} + 3x = \operatorname{sen} t, \\ \dfrac{dx}{dt} + y = \cos t. \end{cases}$

4333. $\begin{cases} \dfrac{d^2 y}{dt^2} = x, \\ \dfrac{d^2 x}{dt^2} = y. \end{cases}$

4334. $\begin{cases} \dfrac{d^2 x}{dt^2} + \dfrac{dy}{dt} + x = e^t, \\ \dfrac{dx}{dt} + \dfrac{d^2 x}{dt^2} = 1. \end{cases}$

4335. $\dfrac{dx}{z-y} = \dfrac{dy}{x-z} = \dfrac{dz}{y-x}.$

En los ejercicios 4336—4339 hallar las soluciones particulares de los sistemas de ecuaciones diferenciales que satisfagan las condiciones iniciales indicadas.

4336. $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y^2 - yz}{x^2 - yz}, & y|_{x=0} = 1; \\ \dfrac{dz}{dx} = \dfrac{z(x+y)}{x^2 - yz}, & z|_{x=0} = -1. \end{cases}$

4337. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 1 - \dfrac{2x}{t}, & x|_{t=1} = \dfrac{1}{3}; \\ \dfrac{dy}{dt} = x + y - 1 + \dfrac{2x}{t}, & y|_{t=1} = -\dfrac{1}{3}. \end{cases}$

4338. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = z + y - x, \\ \dfrac{dy}{dt} = z + x - y, \\ \dfrac{dz}{dt} = x + y + z, \end{cases}$ $\quad x|_{t=0} = 1,\ y|_{t=0} = z|_{t=0} = 0.$

4339. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=y+z, & x|_{t=0}=-1; \\ \dfrac{dy}{dt}=z+x, & y|_{t=0}=1; \\ \dfrac{dz}{dt}=x+y, & z|_{t=0}=0. \end{cases}$

4340. Hallar la pareja de líneas que posean las siguientes propiedades: a) las tangentes trazadas en los puntos de abscisas iguales, se cortan en el eje de ordenadas; b) las normales trazadas en los puntos de abscisas iguales, se cortan en el eje de abscisas; c) una de las líneas pasa por el punto (1, 1), la otra, por el punto (1, 2).

4341. Sean dadas dos líneas: $y = f(x)$, que pasa por el punto (0, 1) e $y = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$, que pasa por el punto $\left(0, \frac{1}{2}\right)$.

Las tangentes trazadas a las dos líneas en los puntos de abscisas iguales, se cortan en el eje de abscisas. Hallar la línea $y = f(x)$.

4342. Hallar la línea alabeada que pase por el punto (0, 1, 1) y que posea las siguientes propiedades: a) al desplazarse el punto de contacto a lo largo de la línea, la proyección de la tangente en el plano Oxy describe la bisectriz del ángulo formado entre las direcciones positivas de los ejes Ox y Oy; b) la distancia que media entre la citada proyección y el origen de coordenadas es igual a la coordenada z del punto de contacto.

4343. Dos pequeños globos de sendas masas m, están ligados por un muelle muy ligero (su alargamiento es proporcional a la fuerza de extensión). La longitud del muelle no extendido es l_0. El muelle fue extendido hasta l_1 y luego, en el momento $t = 0$ ambos globos situados verticalmente uno encima del otro, comienzan a caer (se prescinde de la resistencia del medio). Al cabo de un lapso de tiempo igual a T, la longitud del hilo se reduce hasta l_0. Hallar la ley del movimiento de cada uno de los globos.

4344. Un tubo horizontal gira alrededor del eje vertical con velocidad angular igual a 2 radiantes por segundo. En el interior del tubo se encuentran dos pequeños globos de masas iguales a 300 g y 200 g, respectivamente, estando más alejado del eje de revolución el que pesa más. Están ligados por un muelle imponderable elástico y no extendido de 10 cm de longitud. La fuerza de extensión igual a 0,24 N actúa sobre el muelle debido a lo cual éste queda alargado en 1 cm. El centro de gravedad del sistema de los globos se halla alejado 10 cm del eje de revolución. Los globos se mantienen en la posición descrita por cierto mecanismo. En el momento considerado como de referencia para comenzar a medir el tiempo, la acción del mecanismo cesa, y los globos se ponen en movimiento. Hallar la ley del movimiento de cada uno de los globos respecto al tubo. (Se prescinde del rozamiento.)

4345. La velocidad del crecimiento de los cultivos microorgánicos es proporcional a su cantidad y a la cantidad disponible de sustancias nutritivas (el coeficiente de proporcionalidad es igual a k). La velocidad de disminución de sustancias nutritivas es proporcional a la cantidad disponible de microorganismos (el coeficiente de proporcionalidad es igual a k_1). Al comienzo del experimento en la vasija hubo A_0 microorganismos y B_0 sustancias nutritivas. Hallar la dependencia entre la cantidad A de microorganismos y la cantidad B de sustancias nutritivas, y el tiempo ($k > 0$, $k_1 > 0$).

4346*. Supongamos que las bacterias se multiplican con velocidad proporcional a su cantidad disponible (el coeficiente de proporcionalidad es igual a a), pero al mismo tiempo elaboran un veneno que las va matando, con velocidad proporcional a la cantidad del veneno y a la cantidad de bacterias (el coeficiente de proporcionalidad es igual a b). Supongamos también que la velocidad con que se elabora el veneno, es proporcional a la cantidad disponible de bacterias (el coeficiente de proporcionalidad es igual a c). Primero la cantidad de bacterias crece alcanzando cierto valor máximo, pero luego decrece tendiendo a cero. Mostrar que para cualquier momento t la cantidad N de bacterias se da por la fórmula

$$N = \frac{4M}{(e^{kt} + e^{-kt})^2},$$

donde M es el máximo de bacterias y el tiempo t se mide a partir del momento en que $N = M$, k es cierta constante.

4347. Dos cilindros cuyas bases se hallan en un mismo plano están unidos abajo por un tubo capital y contienen un líquido, de altura desigual (H_1 y H_2). En una unidad de tiempo, cierto volumen del líquido pasa a través del tubo, siendo proporcional a la diferencia de alturas, es decir, igual a $\alpha \cdot (h_1 - h_2)$, donde α es el coeficiente de proporcionalidad. Hallar la ley que rige el cambio de la altura del líquido en los cilindros situados encima del tubo capilar. La sección transversal de los cilindros es S_1 y S_2.

§ 6. Problemas de cálculo

4348. Un aparato eléctrico calienta 1 kg del agua, siendo sumergido en su interior. La capacidad calorífica del agua se considera constante y la temperatura inicial igual a θ_0. La resistencia R del aparato eléctrico depende linealmente de la temperatura $\theta : R = R_0 (1 + 0{,}004\theta)$, donde R_0 es la resistencia a 0° C (esta ley es válida para la mayoría de los metales puros). El termoaislamiento de la vasija es perfecto debido a lo cual se prescinde de la pérdida de calor. Hallar la dependencia entre la temperatura θ y el tiempo t en el intervalo $0 \leqslant t \leqslant T$ si:

1) La tensión E se introduce uniformemente desde $E = 0$ hasta $E = E_1$ por espacio de T s. Calcular con exactitud hasta 1°, cuántos grados aumentará la temperatura del agua al finalizar el décimo minuto si $\theta_0 = 0°$, $E_1 = 110$ V, $R_0 = 10\Omega$ y $T = 10$ min.

2) La tensión cambia de acuerdo con la ley $E = E_0$ sen $100\ \pi t$. Calcular, con exactitud hasta 1°, cuántos grados aumentará la temperatura del agua al finalizar el décimo minuto si $\theta_0 = 0°$, $E_0 = 110$ V y $R_0 = 10\Omega$.

4349. Una espiral cuya resistencia es igual a 24Ω calienta un litro del agua que cede, por su parte, su calor al medio ambiente cuya temperatura es igual a 20° C (la velocidad del enfriamiento es proporcional a la diferencia de la temperatura del cuerpo y la del medio). Se sabe que si la corriente se desconecta, la temperatura del agua baja de 40° a 30° en 10 minutos. La temperatura inicial del agua es de 20° C. ¿Cuál será la temperatura del agua al calentarse diez minutos si:

1) La tensión se introduce uniformemente desde $E_0 = 0$ hasta $E_1 = 120$ V por espacio de 10 minutos? La exactitud debe ser de 0,1°.

2) La corriente es alterna, la tensión cambia de acuerdo con la fórmula $E = 110$ sen $100\pi t$? La exactitud debe ser 0,1°.

4350. Sea dada la ecuación $y' = \frac{x}{y} - x^2$. Formar la tabla de los valores de la solución que satisfaga la condición inicial $y|_{x=1} = 1$ dando a x los valores de 1 hasta 1,5 con intervalo igual a 0,05. Los cálculos deben efectuarse hasta la tercera cifra decimal.

4351. Para $x = 1$ calcular el valor de la solución particular de la ecuación diferencial $y' = y + x$ que satisfaga la condición inicial $y|_{x=0} = 1$. Calcular las cinco primeras aproximaciones y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 (hasta la cuarta cifra decimal) aplicando el método de las aproximaciones sucesivas. Comparar los resultados.

4352. Se sabe que la integral $\int e^{-x^2}\,dx$ no se puede expresar mediante funciones elementales. Aprovechando que la función $y = e^{x^2} \int\limits_0^x e^{-t^2}\,dt$ es la solución de la ecuación diferencial $y' = 2xy + 1$, calcular $\int\limits_0^{0,5} e^{-x^2}\,dx$. Aplicar el método de las aproximaciones sucesivas y limitarse a la quinta aproximación. Comparar el resultado con el valor aproximado calculado por la regla de Simpson.

4353. $y = f(x)$ es la solución de la ecuación diferencial $y' = y^2 - x$ siendo la condición inicial $y|_{x=0} = 1$. Hallar la cuarta aproximación (y_4) aplicando el método de las aproximaciones sucesivas limitándose a tan cantidad de sumandos que sea necesaria para calcular y_4 (0,3) con tres cifras decimales. Luego, hallar varios primeros términos de desarrollo de $f(x)$ en serie de potencias; calcular f (0,3) con tres cifras exactas después de la coma; considerando f (0,3) como resultado más exacto, evaluar el error de y_4 (0,3).

4354. $y = f(x)$ es la solución de la ecuación diferencial $y'' = \frac{y'}{y} - \frac{1}{x}$ dadas las condiciones iniciales $y|_{x=0} = 1$, $y'|_{x=0} = 0$. Hallar f (1,6) con exactitud de 0,001.

4355*. $y = f(x)$ es la solución de la ecuación diferencial $y'' = y' - y + x$ dadas las condiciones iniciales $y|_{x=1} = 1$, $y'|_{x=1} = 0$. Hallar f (1,21) con exactitud de 0,000001.

4356*. $y = f(x)$ es la solución de la ecuación diferencial $y'' = xy' - y + e^x$ dadas las condiciones iniciales $y|_{x=0} = 1$, $y'|_{x=0} = 0$. Hallar $f\left(\frac{1}{2}\right)$ con exactitud de 0,0001.

4357. La línea viene dada por la ecuación $y = f(x)$. Hallar el desarrollo de la función $f(x)$ en serie sabiendo que satisface la ecuación diferencial $y'' = xy$ y las condiciones iniciales $y|_{x=0} = 0$, $y'_{x=0} = 1$. Calcular la curvatura de la línea en el punto cuya abscisa es igual a 1, con exactutud de 0,0001.

Capítulo XV

Series trigonométricas

§ 1. Polinomios trigonométricos

4358. Valiéndose de las fórmulas de Euler $\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$ y $\operatorname{sen} x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$ demostrar que las funciones $\operatorname{sen}^n x$ y $\cos^n x$ son susceptibles de ser presentadas en la forma de polinominos trigonométricos de n-ésimo orden.

4359. Demostrar las relaciones

$$\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^n x \cos mx\, dx = \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^n x \operatorname{sen} mx\, dx =$$
$$= \int_0^{2\pi} \cos^n x \cos mx\, dx = \int_0^{2\pi} \cos^n x \operatorname{sen} mx\, dx = 0$$

si $m > n$ (m y n son números enteros).

4360. Mostrar que cada polinomio trigonométrico de n-ésimo orden que contiene solamente cosenos, es susceptible de ser presentado en la forma $P(\cos \varphi)$, donde $P(x)$ es el polinomio de n-ésimo orden respecto a x.

4361. Demostrar la relación valiéndose de la fórmula de Euler (véase el ejercicio 4358)

$$\cos \varphi + \cos 2\varphi + \ldots + \cos n\varphi = \frac{\operatorname{sen} \frac{n\varphi}{2} \cos \frac{(n+1)\varphi}{2}}{\operatorname{sen} \frac{\varphi}{2}}.$$

4362. Demostrar las relaciones:

1) $\cos \varphi + \cos 3\varphi + \ldots + \cos (2n-1)\varphi = \frac{\operatorname{sen} 2n\varphi}{2 \operatorname{sen} \varphi}$;

2) $\operatorname{sen} \varphi + \operatorname{sen} 2\varphi + \ldots + \operatorname{sen} n\varphi = \frac{\operatorname{sen} \frac{n\varphi}{2} \operatorname{sen} \frac{(n+1)\varphi}{2}}{\operatorname{sen} \frac{\varphi}{2}}$

4363. Hallar los ceros de los polinomios trigonométricos

$$\operatorname{sen}\varphi + \operatorname{sen}2\varphi + \ldots + \operatorname{sen}n\varphi$$

y

$$\cos\varphi + \cos 2\varphi + \ldots + \cos n\varphi$$

en el intervalo $[0, 2\pi]$.

4364. Mostrar que el polinomio trigonométrico

$$\operatorname{sen}\varphi + \frac{\operatorname{sen}2\varphi}{2} + \ldots + \frac{\operatorname{sen}n\varphi}{n}$$

en el intervalo $[0, \pi]$ tiene máximos en los puntos $\frac{\pi}{n+1}$, $3\frac{\pi}{n+1}, \ldots, (2q-1)\frac{\pi}{n+1}$ y mínimos en los puntos $\frac{2\pi}{n}$, $2\cdot\frac{2\pi}{n}, \ldots, (q-1)\frac{2\pi}{n}$, donde $q=\frac{n}{2}$, si n es par y $q=\frac{n+1}{2}$ si n es impar.

4365*. Demostrar que el polinomio trigonométrico sin término libre

$\Phi_n(\varphi) = a_1\cos\varphi + b_1\operatorname{sen}\varphi + \ldots + a_n\cos n\varphi + b_n\operatorname{sen}n\varphi$
no igual idénticamente a cero, no puede conservar el signo constante para todas las φ.

§ 2. Series de Fourier

4366. Mostrar que la función $y = x^3\operatorname{sen}\frac{1}{x}$, para $x \neq 0$ e $y = 0$ cuando $x = 0$ en el intervalo $[-\pi, \pi]$, es continua junto con su primera derivada, pero no satisface las condiciones del teorema de Dirichlet. ¿Es posible desarrollarla en serie de Fourier en el intervalo $[-\pi, \pi]$?

Resolver los problemas de los ejercicios 4367—4371 en el supuesto de que la función $f(x)$ es continua.

4367. La función $f(x)$ satisface la condición

$$f(x+\pi) = -f(x).$$

Demostrar que todos sus coeficientes pares de Fourier son iguales a cero ($a_0 = a_2 = b_2 = a_4 = b_4 = \ldots = 0$).

4368. La función $f(x)$ satisface la condición

$$f(x+\pi) = f(x).$$

Demostrar que todos sus coeficientes impares de Fourier son iguales a cero.

4369. La función $f(x)$ satisface las condiciones $f(-x) = f(x)$ y $f(x+\pi) = -f(x)$.

Demostrar que $b_1 = b_2 = b_3 = \ldots = 0$ y $a_0 = a_2 = a_4 = \ldots$ $\ldots = 0$.

4370. La función $f(x)$ satisface las condiciones

$$f(-x) = -f(x) \text{ y } f(x+\pi) = -f(x).$$

Demostrar que $a_0 = a_1 = a_2 = \ldots = 0$ y $b_2 = b_4 = b_6 = \ldots$ $\ldots = 0$.

4371. La función $f(x)$ satisface las condiciones:

a) $f(-x) = f(x)$ y $f(x+\pi) = f(x)$;

b) $f(-x) = -f(x)$ y $f(x+\pi) = f(x)$.

¿Cuáles de sus coeficientes de Fourier se reducen a cero?

4372. Desarrollar la función igual a -1 en serie de Fourier en el intervalo $(-\pi, 0)$ e igual a 1 en el intervalo $(0, \pi)$.

4373. Desarrollar la función $y = \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}$ en el intervalo $(0, \pi)$ en serie de senos.

4374. Valiéndose de los resultados de los ejercicios 4372 y 4373 obtener el desarrollo para las funciones $y = x$ e $y = \frac{\pi - x}{2}$. Indicar

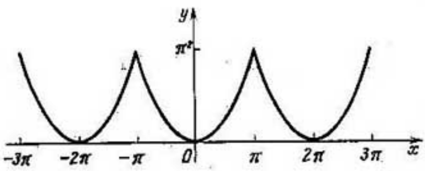

Fig. 72

los intervalos para los cuales sean válidas las fórmulas obtenidas.

4375. Desarrollar la función $y = \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}$ en el intervalo $(0, \pi)$ en serie de cosenos.

4376. Desarrollar la función $y = x^2$ en serie de Fourier: 1) en el intervalo $(-\pi, \pi)$, 2) en el intervalo $(0, 2\pi)$ (véanse las figuras 72 y 73).

Valiéndose de los desarrollos obtenidos calcular las sumas de las series:

$$S_1 = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} + \ldots,$$

$$S_2 = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n^2} + \ldots,$$

$$S_3 = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)^2} + \ldots$$

En los ejercicios 4377—4390 desarrollar en serie de Fourier las funciones dadas en los intervalos que se indican.

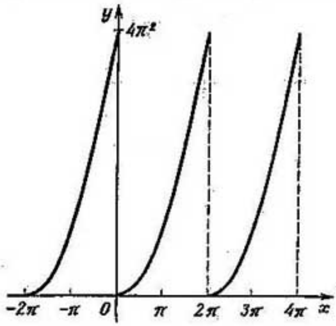

Fig. 73

4377. La función $y = x^2$ en el intervalo $(0, \pi)$ en serie de senos.

4378. La función $y = x^3$ en el intervalo $(-\pi, \pi)$.

4379. La función $f(x)$ igual a 1 para $-\pi < x < 0$ e igual a 3 para $0 < x < \pi$.

4380. La función $f(x)$ igual a 1 en el intervalo $(0, h)$ e igual a 0 en el intervalo (h, π) en serie de cosenos $(0 < h < \pi)$.

4381. La función continua $f(x)$ igual a 1 para $x = 0$ e igual a 0 en el intervalo $(2h, \pi)$ y lineal en el intervalo $(0, 2h)$ en serie de cosenos $(0 < h < \pi/2)$.

4382. La función $y = |x|$ en el intervalo $(-l, l)$.

4383. La función $y = e^x - 1$ en el intervalo $(0, 2\pi)$.

4384. La función $y = e^x$ en el intervalo $(-l, l)$.

4385. La función $y = \cos ax$ en el intervalo $(-\pi, \pi)$ (a no es un número entero).

4386. La función $y = \operatorname{sen} ax$ en el intervalo $(-\pi, \pi)$ (a no es un número entero).

4387. La función $y = \operatorname{sen} ax$ (a es un número entero) en el intervalo $(0, \pi)$ en serie de cosenos.

4388. La función $y = \cos ax$ (a es un número entero) en el intervalo $(0, \pi)$ en serie de senos.

4389. La función $y = \operatorname{sh} ax$ en el intervalo $(-\pi, \pi)$.

4390. La función $y = \operatorname{ch} x$ en el intervalo $(0, \pi)$ en serie de cosenos y en serie de senos.

4391. Desarrollar en serie de Fourier la función cuya gráfica está representada en la fig. 74.

4392*. Desarrollar en serie de Fourier la función cuya gráfica está representada en la fig. 75.

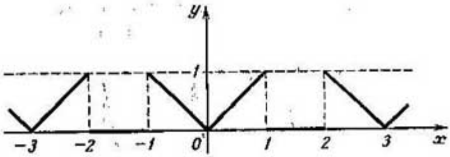

Fig. 74

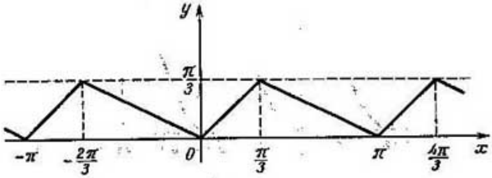

Fig. 75

4393*. Desarrollar en serie de Fourier las funciones cuyas gráficas están representadas en las figuras 76 y 77.

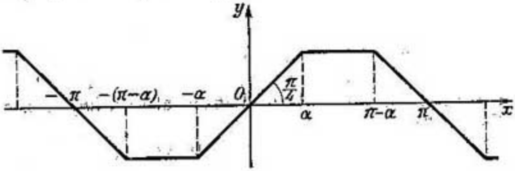

Fig. 76

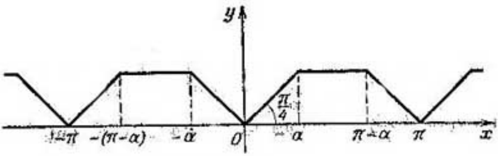

Fig. 77

4394. Desarrollar la función $y = x(\pi - x)$ en serie de senos en el intervalo $(0, \pi)$. Aplicar el resultado obtenido para calcular la suma de la serie

$$1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3} + \ldots$$

4395. Sea la función $\varphi(x) = (\pi^2 - x^2)^2$.

a) Mostrar que se verifican las igualdades

$$\varphi(-\pi) = \varphi(\pi),\ \varphi'(-\pi) = \varphi'(\pi) \text{ y } \varphi''(-\pi) = \varphi''(\pi)$$
$$[\text{pero } \varphi'''(-\pi) \neq \varphi'''(\pi)].$$

b) Valiéndose de los resultados obtenidos desarrollar la función $\varphi(x)$ en serie de Fourier en el intervalo $(-\pi, \pi)$.

c) Calcular la suma de la serie

$$1 - \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} - \frac{1}{4^4} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n^4} + \ldots$$

§ 3. Método de Krilov. Análisis armónico

En los ejercicios 4396—4399 mejorar la convergencia de las series trigonométricas haciendo que los coeficientes alcancen el orden k indicado entre paréntesis.

4396*. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^3+1} \operatorname{sen} nx \quad (k=4).$

4397*. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n+1}{n^2+1} \operatorname{sen} nx \quad (k=2).$

4398*. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{n^2+1}{n^4+1} \cos nx \quad (k=4).$

4399*. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{n \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2}}{n^2-1} \cos nx \quad (k=5).$

4400. Las funciones $f_i(x)$ $(i = 1, 2, 3)$ son dadas en el intervalo $[0, 2\pi]$ por la siguiente tabla:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$
$f_1(x)$	27	32	35	30	26	20	18	22	26	30	32	36
$f_2(x)$	0,43	0,87	0,64	0,57	0,28	0	−0,30	−0,64	−0,25	0,04	0,42	0,84
$f_3(x)$	2,3	3,2	2,1	1,6	−0,4	−0,2	−0,4	0,3	0,7	0,9	1,2	1,6

Hallar la expresión aproximada de estas funciones en forma de un polinomio trigonométrico de segundo orden.

Capítulo XVI

Elementos de la teoría del campo*

Campo vectorial, divergencia y rotor

4401. Hallar las líneas vectoriales del campo homogéneo $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{P}) = a\boldsymbol{i} + b\boldsymbol{j} + c\boldsymbol{k}$, donde a, b y c son constantes.

4402. Hallar las líneas vectoriales del campo plano $\boldsymbol{A}(P) = -\omega y\boldsymbol{i} + \omega x\boldsymbol{j}$, donde ω es constante.

4403. Hallar las líneas vectoriales del campo $\boldsymbol{A}(P) = -\omega y\boldsymbol{i} + \omega x\boldsymbol{j} + h\boldsymbol{k}$, donde ω y h son constantes.

4404. Hallar las líneas vectoriales del campo:

1) $\boldsymbol{A}(P) = (y + z)\boldsymbol{i} - x\boldsymbol{j} - x\boldsymbol{k}$;
2) $\boldsymbol{A}(P) = (z - y)\boldsymbol{i} + (x - z)\boldsymbol{j} + (y - x)\boldsymbol{k}$;
3) $\boldsymbol{A}(P) = x(y^2 - z^2)\boldsymbol{i} - y(z^2 + x^2)\boldsymbol{j} + z(x^2 + y^2)\boldsymbol{k}$.

En los ejercicios 4405—4408 calcular la divergencia y el rotor de los campos vectoriales dados.

4405. $\boldsymbol{A}(P) = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$.

4406. $\boldsymbol{A}(P) = (y^2 + z^2)\boldsymbol{i} + (z^2 + x^2)\boldsymbol{j} + (x^2 + y^2)\boldsymbol{k}$.

4407. $\boldsymbol{A}(P) = x^2yz\boldsymbol{i} + xy^2z\boldsymbol{j} + xyz^2\boldsymbol{k}$.

4408. $\boldsymbol{A}(P) = \text{grad}\,(x^2 + y^2 + z^2)$.

4409. El campo vectorial está formado por una fuerza que tiene el valor constante F y la dirección positiva del eje de abscisas. Calcular la divergencia y el rotor de este campo.

4410. El campo vectorial plano está formado por una fuerza inversamente proporcional al cuadrado de distancia que media entre el punto de su aplicación y el origen de coordenadas, y dirigida hacia el origen de coordenadas. (Por ejemplo, el campo eléctrico plano formado por una carga puntual.) Hallar la divergencia y el rotor de este campo.

4411. Hallar la divergencia y el rotor del campo espacial cuyas propiedades son las mismas que caracterizan el campo en el ejercicio 4410.

---

* Los ejercicios que contienen problemas referentes a las propiedades del campo escalar y su gradiente aparecen en el § 4 del capítulo XI.

4412. El campo vectorial está formado por una fuerza inversamente proporcional a la distancia que media entre el punto de su aplicación y el eje Oz, perpendicular a este eje y dirigida hacia él. Calcular la divergencia y el rotor de este campo.

4413. El campo vectorial está formado por una fuerza inversamente proporcional a la distancia que media entre su punto de aplicación y el plano xOy, y dirigida hacia el origen de coordenadas. Calcular la divergencia de este campo.

En los ejercicios 4414 y más adelante $\boldsymbol{r}$ es el radio vector, $r = |\boldsymbol{r}|$, su módulo.

4414. Calcular div $(a\boldsymbol{r})$, donde a es el escalar constante.

4415. Demostrar la relación

$$\operatorname{div}(\varphi \boldsymbol{A}) = \varphi \operatorname{div} \boldsymbol{A} + (A \operatorname{grad} \varphi).$$

donde $\varphi = \varphi(x, y, z)$ es una función escalar.

4416. Calcular div $\boldsymbol{b}(\boldsymbol{ra})$ y div $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{ra})$, donde $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ son vectores constantes.

4417. Calcular div $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{r})$, donde $\boldsymbol{a}$ es un vector constante.

4418. Sin pasar a las coordenadas, calcular la divergencia del campo vectorial:

1) $\boldsymbol{A}(P) = \boldsymbol{r}(\boldsymbol{ar}) - 2\boldsymbol{a}r^2$;

2) $\boldsymbol{A}(P) = \dfrac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|^3}$,

3) $\operatorname{grad} \dfrac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|}$.

4419. Calcular la divergencia del campo vectorial

$$\boldsymbol{A}(P) = f(|\boldsymbol{r}|)\frac{\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|}.$$

Demostrar que la divergencia del campo es igual a cero solamente cuando $f(|\boldsymbol{r}|) = \frac{C}{r^2}$, si el campo es espacial, y $f(|\boldsymbol{r}|) = \frac{C}{|\boldsymbol{r}|}$, si el campo es plano, donde C es cualquier número constante.

4420. Demostrar que

$$\operatorname{rot}[\boldsymbol{A}_1(P) + \boldsymbol{A}_2(P)] = \operatorname{rot} \boldsymbol{A}_1(P) + \operatorname{rot} \boldsymbol{A}_2(P).$$

4421. Calcular rot $[\varphi \boldsymbol{A}(P)]$, donde $\varphi = \varphi(x, y, z)$ es una función escalar.

4422. Calcular rot $r\boldsymbol{a}$ donde $\boldsymbol{a}$ es un vector constante.

4423. Calcular rot $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{r})$ donde $\boldsymbol{a}$ es un vector constante.

4424. Un sólido gira con la velocidad angular constante ω alrededor del eje. Hallar la divergencia y el rotor del campo de velocidades lineales.

4425. Demostrar la relación

$$\boldsymbol{n}\,(\operatorname{grad}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{n}) - \operatorname{rot}(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{n})) = \operatorname{div}\boldsymbol{A},$$

si $\boldsymbol{n}$ es un vector constante singular.

Es sumamente conveniente aplicar el vector simbólico ∇ (el operador nabla de Hamilton) a las operaciones diferenciales del análisis vectorial (grad, div, rot):

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\,\boldsymbol{i} + \frac{\partial}{\partial y}\,\boldsymbol{j} + \frac{\partial}{\partial z}\,\boldsymbol{k}.$$

La aplicación de este operador a una u otra magnitud (escalar o vectorial) debe ser comprendida de la manera siguiente: conviene efectuar, de acuerdo con las reglas del álgebra vectorial, la multiplicación de este vector por la magnitud dada; luego la multiplicación del símbolo $\frac{\partial}{\partial x}$, etc., por la magnitud S debe considerarse como la búsqueda de la derivada correspondiente. Entonces se tiene grad $u = \nabla u$; div $\boldsymbol{A} = \nabla\boldsymbol{A}$; rot $\boldsymbol{A} = \nabla\times\boldsymbol{A}$.

El operador de Hamilton es válido también para ser aplicado a las operaciones diferenciales de segundo orden:

$$\nabla\nabla\, u = \operatorname{div}\operatorname{grad} u; \qquad \nabla\times\nabla\, u = \operatorname{rot}\operatorname{grad} u;$$

$$\nabla\nabla\,(\nabla\boldsymbol{A}) = \operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{A}; \qquad \nabla\,(\nabla\times\boldsymbol{A}) = \operatorname{div}\operatorname{rot}\boldsymbol{A};$$

$$\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{A}) = \operatorname{rot}\operatorname{rot}\boldsymbol{A}.$$

4426. Demostrar que $\boldsymbol{r}\cdot\nabla r^n = nr^n$, donde $\boldsymbol{r}$ es el radio vector.

4427. Demostrar las relaciones:

1) rot grad $u = 0$; 2) div rot $\boldsymbol{A} = 0$.

4428. Demostrar que

$$\operatorname{div}\operatorname{grad} u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

(Esta expresión se llama operador de Laplace y suele ser designada por Δu. También puede ser usado el operador de Hamilton para escribirla en la siguiente forma $\Delta u = (\nabla\nabla)\,u = \nabla^2 u$.)

4429. Demostrar que

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\boldsymbol{A}(P) = \operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{A}(P) - \Delta\boldsymbol{A}(P),$$

donde $\Delta\boldsymbol{A}(P) = \Delta A_x\boldsymbol{i} + \Delta A_y\boldsymbol{j} + \Delta A_z\boldsymbol{k}$.

Potencial

4430. El campo vectorial está formado por el vector constante $\boldsymbol{A}$. Verificar que este campo tiene potencial y hallarlo.

4431. El campo vectorial está formado por la fuerza proporcional a la distancia que media entre el punto de su aplicación y el origen de coordenadas, y dirigida hacia el origen de coordenadas. Mostrar que este campo es conservativo, y hallar el potencial.

4432. Las fuerzas del campo son inversamente proporcionales a la distancia que media entre los puntos de su aplicación y el plano Oxy, y dirigidas hacia el origen de coordenadas. ¿Es conservativo este campo?

4433. Las fuerzas del campo son proporcionales al cuadrado de distancia que media entre los puntos de su aplicación y el eje Oz y dirigidas hacia el origen el de coordenadas. ¿Es conservativo este campo?

4434. El campo vectorial está formado por la fuerza inversamente proporcional a la distancia que media entre el punto de su aplicación y el eje Oz, perpendicular a este eje y dirigida hacia él. Mostrar que este campo es conservativo y hallar su potencial.

4435. El campo vectorial está formado por velocidades lineales de los puntos de un sólido que gira alrededor de su eje. ¿Tiene potencial este campo?

4436. Las fuerzas del campo son dadas del modo siguiente: $\boldsymbol{A}(P) = f(r)\frac{\boldsymbol{r}}{r}$ (el así llamado campo centrado). Mostrar que el potencial del campo es igual a

$$u(x, y, z) = \int_a^r f(r)\,dr \quad (r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}).$$

Obtener de aquí, como caso particular, el potencial atractivo de la masa puntual y el potencial del campo para el ejercicio 4431.

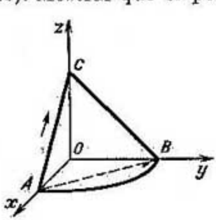

Fig. 78

4437. Hallar el trabajo de las fuerzas del campo $\boldsymbol{A}(p) = xy\boldsymbol{i} + yz\boldsymbol{j} + xz\boldsymbol{k}$ al desplazarse el punto de masa m a lo largo de una línea cerrada compuesta de un segmento de la recta $x + z = 1$, $y = 0$, la cuarta parte de la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$, $z = 0$ y un segmento de la recta $y + z = 1$, $x = 0$ (véase la fig. 78) según la dirección indicada en el dibujo. ¿Cómo cambiaría el valor del trabajo si el arco BA fuese sustituido por la línea quebrada BOA o por el segmento BA?

Potencial de fuerza de atracción)*

4438. Sea dada una barra homogénea AB de longitud $2l$ y de densidad lineal δ, situada en el plano $O\xi\eta$ y en el eje $O\xi$ simétrico respecto al origen de coordenadas (véase la fig. 79).

* Aquí (en los ejercicios 4438—4449) se tiene en cuenta la fuerza de la gravedad que actúa de acuerdo con la ley de Newton. En vez de decir el «potencial de la masa» situada sobre (o dentro de) un objeto geométrico, diremos, para abreviar, el «potencial del objeto dado».

a) Hallar el potencial $u(x, y)$ de la barra.

b) Mostrar que las proyecciones X e Y de la fuerza de atracción sobre el punto P de masa m cuyas coordenadas son $\xi = x$, $\eta = y$, son iguales a

$$X = mk\delta\left(\frac{1}{PA} - \frac{1}{PB}\right), \quad Y = -\frac{mk\delta}{y}\left(\frac{CB}{PB} + \frac{AC}{PA}\right)$$

y el valor de la fuerza resultante R es igual a $R =$

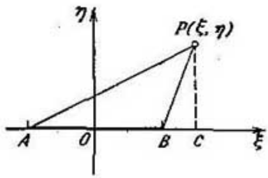

Fig. 79

$= \frac{2mk\delta}{y} \operatorname{sen} \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$, donde k es la constante de la gravitación (C es la proyección del punto P sobre el eje $O\xi$, α es el ángulo APC, β, el ángulo BPC).

4439. Hallar el potencial de la circunferencia $x^2 + y^2 = R^2$, $z = 0$ en el punto $(R, 0, 2R)$, si la densidad en cada punto es igual al valor absoluto del seno del ángulo formado entre el radio vector del punto y el eje de abscisas.

4440. Hallar el potencial de la primera espira de la hélice homogénea (la densidad es igual a δ) $x = a \cos t$, $y = a \operatorname{sen} t$, $z = bt$ en el origen de coordenadas.

4441. Hallar el potencial del cuadrado homogéneo de lado a (la densidad superficial es igual a δ) en uno de sus vértices.

4442. En el plano Oxy viene distribuida una masa de densidad δ, que va disminuyendo desde el origen de coordenadas mediando entre ellos la distancia ρ, de acuerdo con la ley $\delta = \frac{1}{1+\rho^2}$. Hallar el potencial en el punto $(0, 0, h)$. (Considerar tres casos: $h < 1$, $h = 1$ y $h > 1$).

4443*. Calcular el potencial de la superficie homogénea lateral de un cilindro circular:

1) en el centro de su base,

2) en el centro de su eje (el radio del cilindro es R, la altura H, la densidad superficial, δ).

4444. Calcular el potencial de la superficie lateral homogénea de un cono circular recto (el radio de la base es R, la altura, H) en su vértice.

4445. Sea dado un cilindro circular homogéneo (el radio de la base es R, la altura, H, la densidad, δ).

1) Hallar el potencial en el centro de su base.

2) Hallar el potencial en el centro de su eje.

4446. Sea dado un cono recto circular homogéneo (el radio de la base es R, la altura, H, la densidad, δ). Hallar el potencial del cono en su vértice.

4447. Hallar el potencial de la semiesfera homogénea $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant R^2$ $(z \geqslant 0)$ cuya densidad en el punto A $(0, 0, a)$ es igual a δ. (Considerar dos casos: $a \geqslant R$ y $a \leqslant R$).

4448*. Hallar el potencial del cuerpo homogéneo limitado por dos esferas concéntricas de radio R y r $(R > r)$, respectivamente, y de densidad δ, en el punto que dista a del centro de la esfera. (Considerar tres casos: $a \geqslant R$, $a \leqslant r$, $r \leqslant a \leqslant R$.) Mostrar que si el punto se halla dentro de la cavidad del cuerpo, la fuerza de gravitación que actúa sobre este punto, es igual a cero.

4449. Hallar el potencial de la esfera maciza no homogénea

$$x^2 + y^2 + z^2 \leqslant R$$

en el punto A $(0, 0, a)$ $(a > R)$, si la densidad $\delta = \lambda z^2$, es decir, es proporcional al cuadrado de distancia que media entre dicho punto y el plano Oxy.

Flujo y circulación (caso plano)

4450. Calcular el flujo y la circulación del vector constante $\boldsymbol{A}$ a lo largo de una curva cerrada cualquiera L.

4451. Calcular el flujo y la circulación del vector $\boldsymbol{A}(P) = a\boldsymbol{r}$, donde a es escalar constante y $\boldsymbol{r}$ es el radio vector del punto P, a lo largo de una curva cerrada cualquiera L.

4452. Calcular el flujo y la circulación del vector $\boldsymbol{A}(P) = x\boldsymbol{i} - y\boldsymbol{j}$ a lo largo de una curva cerrada cualquiera L.

4453. Calcular el flujo y la circulación del vector $\boldsymbol{A}(P) = (x^3 - y)\,\boldsymbol{i} + (y^3 + x)\,\boldsymbol{j}$ a lo largo de la circunferencia de radio R cuyo centro se halla en el origen de coordenadas.

4454. El potencial del campo de velocidades de las partículas de un fluido corriente es igual a $u = \ln r$, donde $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Calcular la cantidad del líquido que sale del contorno cerrado L que rodea el origen de coordenadas, en la unidad de tiempo (el flujo) y la cantidad del líquido que pasa en la unidad de tiempo a lo largo de este contorno (la circulación). ¿Cómo cambiará el resultado si el origen de coordenadas se halla fuera del contorno?

4455. El potencial del campo de velocidades de las partículas de un fluido corriente es igual a $u = \varphi$, donde $\varphi = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$. Determinar el flujo y la circulación del vector a lo largo del contorno cerrado L.

4456. El potencial del campo de velocidades de las partículas de un fluido corriente es igual a $u(x, y) = x(x^2 - 3y^2)$. Calcular la cantidad del líquido que pasa en la unidad de tiempo a través del segmento de la recta que une el origen de coordenadas y el punto (1,1).

Flujo y circulación (caso espacial)

4457. Demostrar que el flujo del radio vector $\boldsymbol{r}$ a través de cualquier superficie cerrada es igual al volumen triple del cuerpo limitado por esta superficie.

4458. Calcular el flujo del radio vector a través de la superficie lateral del cilindro circular (el radio de base es R, la altura, H), si el eje del cilindro pasa por el origen de coordenadas.

4459. Determinar a qué será igual el flujo del radio vector a través de ambas bases del cilindro del ejercicio anterior valiéndose de los resultados obtenidos en los ejercicios 4457—4458.

4460. Calcular el flujo del radio vector a través de la superficie lateral del cono circular cuya base se encuentra en el plano xOy y el eje coincide con el eje Oz. (La altura del cilindro es 1, el radio de base 2).

4461. Hallar el flujo del vector $\boldsymbol{A}(P) = xy\boldsymbol{i} + yz\boldsymbol{j} + xz\boldsymbol{k}$ a través de la línea divisoria de la parte de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ que se halla en el primer octante.

4462*. Hallar el flujo del vector $\boldsymbol{A}(P) = yz\boldsymbol{i} + xz\boldsymbol{j} + xy\boldsymbol{k}$ a través de la superficie lateral de la pirámide cuyo vértice se halla en el punto $S(0, 0, 2)$ y cuya base es el triángulo de vértices $O(0, 0, 0)$, $A(2, 0, 0)$ y $B(0, 1, 0)$.

4463. Calcular la circulación del radio vector a lo largo de una espira AB de la hélice $x = a\cos t$, $y = a\,\mathrm{sen}\, t$, $z = bt$, donde A y B son los puntos que corresponden a los valores de los parámetros 0 y 2π.

4464. Un sólido gira con la velocidad angular constante ω alrededor del eje Oz. Calcular la circulación del campo de velocidades lineales a lo largo de la circunferencia de radio R cuyo centro se halla en el eje de revolución y el plano es perpendicular al eje de revolución en el sentido de la revolución.

4465*. Calcular el flujo del rotor del campo de vectores $\boldsymbol{A}(P) = y\boldsymbol{i} + z\boldsymbol{j} + x\boldsymbol{k}$ a través de la superficie del paraboloide de revolución

$$z = 2(1 - x^2 - y^2)$$

recortada por el plano $z = 0$.

Respuestas a los ejercicios

Al capítulo I

1. Todos los números n pertenecen a la serie natural, excepto $n = 1$ y $n = 2$. Si la suma de los ángulos es S y el número de lados n, se tiene $S = \pi (n - 2)$.

4. a) Para $x = -2$, $x = 1$, $x = 6$ la función se reduce a cero;
b) para $x < -2$, $-2 < x < 1$, $x > 6$ la función es positiva;
c) para $1 < x < 6$ la función es negativa.

6. $r \dfrac{1}{\sqrt{\pi h}}$. **7.** $S = \dfrac{a^2 - b^2}{4} \operatorname{tg} \alpha$. **8.** $b = \sqrt{25 - a^2}$.

9. $f(0) = -2$; $f(1) = -0{,}5$; $f(2) = 0$; $f(-2) = 4$; $f\left(-\dfrac{1}{2}\right) = -5$;
$f(\sqrt{2}) = -0{,}242\ldots$, $\left|f\left(\dfrac{1}{2}\right)\right| = 1$; $\varphi(0) = 2$; $\varphi(1) = 0{,}5$;
$\varphi(2) = 0$; $\varphi(-2) = -4$; $\varphi(4) = 0{,}4$; $f(-1)$ no existe; $\varphi(-1)$ no existe.

10. $f(1) = 0$; $f(a) = a^3 - 1$; $f(a + 1) = a^3 + 3a^2 + 3a$; $f(a - 1) = a^3 - 3a^2 + 3a - 2$; $2f(2a) = 16a^3 - 2$.

11. $F(0) = \dfrac{1}{4}$; $F(2) = 1$; $F(3) = 2$; $F(-1) = \dfrac{1}{8}$; $F(2{,}5) = \sqrt{2}$;
$F(-1{,}5) = \dfrac{1}{\sqrt{128}}$; $\varphi(0) = \dfrac{1}{4}$; $\varphi(2) = 1$; $\varphi(-1) = \dfrac{1}{2}$;
$\varphi(x) = 2^{x-2}$ para $x > 0$ y $\varphi(x) = 2^{-x-2}$ para $x < 0$; $\varphi(-1) + F(1) = 1$.

12. $\psi(0) = 0$; $\psi(1) = a$; $\psi(-1) = -\dfrac{1}{a}$; $\psi\left(\dfrac{1}{a}\right) = a^{\frac{1-a}{a}}$; $\psi(a) = a^{a+1}$;
$\psi(-a) = -a^{1-a}$.

13. $\varphi(t^2) = t^6 + 1$; $[\varphi(t)]^2 = t^6 + 2t^3 + 1$.

20. La relación $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ es igual a la tangente del ángulo formado entre la secante que pasa por los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$, y el sentido positivo del eje Ox.

22. a) $x_1 = 0$, $x_2 = 2$; b) $x_1 = -1$, $x_2 = 3$.

23. $x_1 = -2$, $x_2 = 5$, $x_3 = -\dfrac{1}{2}$.

24. $x = a$ siempre será una raíz.

25. 4 y -2; -2, 2, 4, 10.
26. $x_1=-3$; $x_2=-2$, $x_3=2$, $x_4=3$.
27. $x\leqslant -1$ y $x\geqslant 2$.
28. $a=4$, $b=-1$.

29. $a=-\dfrac{1}{2\operatorname{sen}0{,}5}\approx -1{,}04$ (poniendo sen $0{,}5\approx 0{,}48$); $b=1$; $c=-\dfrac{1}{2}+2k\pi$ ó $a=\dfrac{1}{2\operatorname{sen}0{,}5}\approx 1{,}04$; $b=-1$; $c=\dfrac{1}{2}+(2k+1)\pi$ $(k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$. 30. $y=(x+1)^2$. 31. $y=\left|\dfrac{1}{\cos x}\right|$. 32. $y=\sqrt[3]{(a^t+1)^2}$.

33. $u=\sqrt{1+(\lg\operatorname{sen}x)^2}$. 34. $v=\operatorname{sen}(1+x)$.

35. 1) $y=v^3$, $v=\operatorname{sen}x$; 2) $y=\sqrt[3]{v}$, $v=u^2$, $u=x+1$; 3) $y=\lg v$, $v=\operatorname{tg}x$; 4) $y=u^3$, $u=\operatorname{sen}v$, $v=2x+1$; 5) $y=5^u$, $u=v^2$, $v=3x+1$.

36. a) $-\dfrac{3}{8}$; b) 0; c) sen 12; d) $-\operatorname{sen}2x\cos^2 2x$; e) $x^9-3x^7+3x^5-2x^3+x$; f) 0; g) $\operatorname{sen}(2\operatorname{sen}2x)$.

38. 1) $y=\pm\sqrt{1-x^2}$; 2) $=\pm\dfrac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$; 3) $y=\sqrt[3]{a^3-x^3}$; 4) $y=\dfrac{C}{x}$; 5) $y=\dfrac{\log_2 5}{x}$; 6) $y=\dfrac{10\,000}{x}-1$; 7) $y=\log_2(x^3+7)-\log_2(x^2-2)-x$; 8) $y=\operatorname{Arccos}\dfrac{x^2}{1+x}$.

39*. Sean $x>0$ e $y>0$, entonces se tiene $y+y-x-x=0$; $y=x$ (la gráfica es la bisectriz del primer ángulo coordenado). Sean $x>0$ e $y<0$, entonces se tiene $y-y-x-x=0$; $x=0$ (la gráfica es el semieje negativo Oy). Sean $x<0$ e $y>0$, entonces se tiene $y+y-x+x=0$; $y=0$ (la gráfica es el semieje negativo Ox). Sean $x<0$ e $y<0$, entonces se tiene $y-y-x+x=0$, que es la identidad (la gráfica es el conjunto de todos los puntos interiores del tercer ángulo coordenado).

40.

x	1	2	3	4	5	6
y	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{120}$	$\frac{1}{720}$

41.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
u	0	1	2	2	3	3	4	4	4	4	5	5	6	6	6	6	7	7	8	8

42.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
u	0	0	0	1	0	2	0	2	1	2	0	4	0	2	2	3	0	4	0	4

43. Si $f(x)$ es el peso del segmento AM, se tiene $f(x) = 2x$ para $0 \leqslant x \leqslant 1$, $f(x) = 2 + \frac{3}{2}(x-1)$ para $1 < x \leqslant 3$, $f(x) = x + 2$ para $3 < x \leqslant 4$. La función viene determinada cuando $0 \leqslant x \leqslant 4$.

44. Para $0 \leqslant x \leqslant R$ $S = \pi (2R - x)^2$, para $R \leqslant x \leqslant 3R$ $S = \pi R^2$, para $3R \leqslant x \leqslant 4R$ $S = \pi(6Rx - x^2 - 8R^2)$. Fuera del intervalo $[0, 4R]$ la función $S = f(x)$ no está determinada.

45. $V = \pi x \left(R^2 - \frac{x^2}{4}\right)$; $0 < x < 2R$.

46. $S = \frac{\pi x^2}{2R}\sqrt{4R^2 - x^2}$; $0 \leqslant x < 2R$.

47. 1) $x > 0$; 2) $x > -3$; 3) $x \leqslant \frac{5}{2}$; 4) $-\infty < x \leqslant 0$; 5) todo el eje numérico, excepto los puntos $x \pm = 1$; 6) todo el eje numérico; 7) no está determinado sólo para $x = 0$, $x = -1$, $x = 1$; 8) todo el eje numérico excepto los puntos $x = 1$ y $x = 2$; 9) $-1 \leqslant x \leqslant 1$; 10) $-\infty < x < 0$ y $4 < x < \infty$; 11) $-\infty < x \leqslant 1$ y $3 \leqslant x < \infty$; en el intervalo $(1, 3)$ la función no está definida; 12) $-\infty < x < 1$ y $2 < x < \infty$; en el intervalo $[1, 2]$ la función no está definida; 13) $-4 \leqslant x \leqslant 4$; 14) $1 \leqslant x \leqslant 3$; 15) $0 \leqslant x \leqslant 1$; 16) $-\frac{3}{2} \leqslant x \leqslant \frac{5}{2}$; 17) $0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}$; 18) $-1 \leqslant x \leqslant 1$; 19) $-\infty < x < 0$; 20) no tiene sentido; 21) $1 \leqslant x \leqslant 4$; 22) $2k\pi < x < (2k+1)\pi$, donde k es un entero; 23) $2k\pi \leqslant x \leqslant (2k+1)\pi$, donde k es un entero; 24) $0 < x < 1$ y $1 < x < \infty$.

48. 1) $-2 \leqslant x < 0$ y $0 < x < 1$; 2) $-1 \leqslant x \leqslant 3$; 3) $1 \leqslant x < 4$; 4) $\frac{3}{2} < x < 2$ y $2 < x < \infty$; 5) el dominio de definición consta sólo del punto $x = 1$; 6) $-1 < x < 0$ y $1 < x < 2$; $2 < x < \infty$; 7) $3 - 2\pi < x < 3 - \pi$; $3 < x \leqslant 4$; 8) $-4 \leqslant x \leqslant -\pi$ y $0 \leqslant x \leqslant \pi$; 9) $2k\pi < x < (2k+1)\pi$, donde k es un entero; 10) $4 < x < 5$ y $6 < x < \infty$; 11) no está definida en parte alguna; 12) $-1 < x \leqslant 1$ y $2 \leqslant x < 3$; 13) todo el eje numérico; 14) $4 \leqslant x \leqslant 6$; 15) $2 < x < 3$.

49. 1) Sí; 2) son idénticas en cualquier intervalo que no contenga el punto $x = 0$; 3) son idénticas en el intervalo $[0, \infty)$; 4) son idénticas en el intervalo $(0, \infty)$.

50. 1) Por ejemplo, $y = \sqrt{4 - x^2}$; 2) por ejemplo, $y = \frac{1}{x\sqrt{4 - x^2}}$; 3) por ejemplo, $y = \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-3} + \frac{1}{x-4}$.

51. 1) $1 < x \leqslant 3$; 2) $0 \leqslant x < +\infty$ para dos ramas y $1 \leqslant x < +\infty$ para otras dos ramas.

52. $-\infty < x < \infty$.

53. 1) $y > 0$ para $x > 2$; $y < 0$ para $x < 2$; $y = 0$ para $x = 2$; 2) $y > 0$ para $x < 2$ y $x > 3$; $y < 0$ para $2 < x < 3$; $y = 0$ para $x_1 = 2$ y $x_2 = 3$; 3) $y > 0$ en el intervalo $(-\infty, \infty)$, la función no tiene ceros; 4) $y > 0$ en los intervalos $(0, 1)$, $(2, +\infty)$; $y < 0$ en los intervalos $(-\infty, 0)$ y $(1, 2)$; $y = 0$ para $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$; 5) $y > 0$ para $x \neq 0$; $y = 0$ para $x = 0$.

54. 1), 3), 8), 10), 11), 15) son pares; 5), 6), 9), 12), 14), 17) son impares; 2), 4), 7), 13), 16) no son pares ni impares.

55. 1) $y = (x^2 + 2) + 3x$; 2) $y = (1 - x^4) + (-x^3 - 2x^5)$; 3) $y = (\operatorname{sen} 2x + \operatorname{tg} x) + \cos\frac{x}{2}$.

57. 1) $y=\frac{a^x+a^{-x}}{2}+\frac{a^x-a^{-x}}{2}$;

2) $y=\frac{(1+x)^{100}+(1-x)^{100}}{2}+\frac{(1+x)^{100}-(1-x)^{100}}{2}$.

59. Las funciones 1), 5), 6), 8).

60. Véanse las gráficas en las figs. 80 y 81.

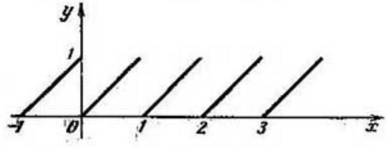

Fig. 80

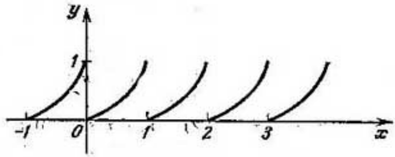

Fig. 81

61. 1) En el intervalo $(-\infty, 0)$ decrece, en el intervalo $(0, +\infty)$ crece; 2) en el intervalo $(-\infty, 0)$ decrece, en el intervalo $(0, +\infty)$ conserva su valor constante, que es el cero.

62. 1) El valor máximo es 1, el valor mínimo es 0; 2) el valor máximo es 1, el valor mínimo es igual a -1; 3) el valor máximo es 2, el valor mínimo es 0; 4) no tiene valor máximo, el mínimo es 1.

65. $I=\frac{E}{3}$. 66. a) $p=0{,}727h$; b) 10,5 gf/cm^2; c) 36,4 cm. 67. $F=\frac{8}{45}w$.

68. 1) $y=\frac{2}{3}x+4$; 2) $y=1{,}195x+1{,}910$; 3) $y=-0{,}57x+8{,}63$.

69. a) $V=100+0{,}35t$; b) 100 cm^3.

70. $S=16{,}6+1{,}34t$. 71. $V=12-0{,}7t$.

72. $\Delta y=6$. 73. $\Delta y=-6$. 74. $\Delta x=4$.

75. El valor finito $x_2=2a$.

76. $x=3$; gráficamente se busca el punto de intersección de la gráfica de la función $y=\varphi(x)$ y la recta $y=2x-4$.

78*. Es necesario prestar atención a que los datos del problema llevan suprimido el signo de igualdad de la siempre válida relación $|f(x)+\varphi(x)|\leqslant\leqslant|f(x)|+|\varphi(x)|$. La estricta desigualdad se verifica para $x<3$ y $x>4$. El problema puede ser solucionado construyendo las gráficas de las funciones $\Phi(x)=|f(x)+\varphi(x)|$ y $\psi(x)=|f(x)|+|\varphi(x)|$.

79. $x<2$. Véase la indicación al ejercicio 78*.

82. $y=\begin{cases} 0 & \text{sobre el intervalo } (-\infty; -3); \\ -\frac{5}{9}x^2+5 & \text{sobre el intervalo } [-3; 3], \\ \frac{2}{3}x-2 & \text{sobre el intervalo } [3; 6]. \end{cases}$

83. 1) $y=-\frac{7}{8}$ para $x=\frac{1}{4}$; 2) $y=\frac{17}{4}$ para $x=-\frac{3}{2}$; 3) $y=5$ para $x=0$; 4) $y=-\frac{7a^2}{8}$ para $x=\frac{a}{4}$; 5) $y=\frac{a^3}{4b^2}$ para $x=\frac{a^2}{2b^2}$.

84. 1) $y=-6$ para $x=-2$; 2) $y=0{,}31875$ para $x=\frac{3}{8}$; 3) $y=\frac{5}{8}$ para $x=\frac{1}{4}$; 4) $y=a^4$ para $x=0$; 5) $y=-\frac{9}{4}b^2$ para $x=\frac{b}{2a}$.

85. $a=\frac{a}{2}+\frac{a}{2}$. 86. $a=\frac{a}{2}+\frac{a}{2}$. 87. 4 m. 88. Cada uno a 50 cm.

89. Aquel cuya sección axial es un cuadrado.

90. Cuanto menor es la altura del cono, tanto mayor es su superficie lateral. La función alcanza su valor máximo cuando el radio de la base es igual a $\frac{P}{4}$, es decir, cuando el cono degenera en un disco plano.

91. 12,5 cm.

92. La altura del rectángulo debe ser igual a la mitad de la altura del triángulo.

93. El radio del cilindro debe ser igual a la mitad del radio del cono.

94. El radio del cilindro debe ser igual a $\frac{RH}{2(H-R)}$ para $H>2R$; para $H\leqslant 2R$ la superficie total del cilindro inscrito será tanto mayor cuanto mayor es el radio de su base.

95. $\frac{P}{2}$. 96. $a=\frac{P}{6-\sqrt{3}}$. 97. $\frac{4}{\pi+4}$.

98. El lado debe ser igual a 10 cm.

99. El lado de la base y cada una de las aristas deben medir 10 cm.

100. El lado del triángulo debe ser igual a $\frac{3a}{9+4\sqrt{3}}$.

101. El punto buscado es $\left(\frac{b}{6},\ \frac{b}{6}\right)$.

102. El punto buscado es $\left(\frac{15}{11},\ \frac{37}{11}\right)$.

104. $x_1\approx-1{,}1$; $x_2\approx 2{,}1$; 2) $x_1=-1$, $x_2=\frac{5}{2}$; 3) $x_1\approx 0{,}5$, $x_2\approx 4{,}1$; 4) $x_1=x_2=\frac{3}{2}$; 5) no tiene raíces reales.

105. $x_1=-3$, $x_2=8$. En la solución gráfica se busca el punto de intersección de la gráfica de la función $y=\varphi(x)$ y de la parábola $y^2=7x+25$.

106. Si $b^2-4ac>0$ y $a>0$, la función está definida en todo el eje numérico excepto el intervalo $x_1\leqslant x\leqslant x_2$ donde x_1 y x_2 son las raíces del trinomio. Para $b^2-4ac>0$ y $a<0$ la función está definida sólo cuando $x_1<x<x_2$.

Si $b^2-4ac<0$ y $a>0$, la función está definida en todo el eje numérico. Si $b^2-4ac<0$ y $a<0$, la función no está definida en parte alguna. Por fin, para $b^2-4ac=0$ la función está definida en todo el eje numérico excepto un punto, a saber, $x=-\frac{b}{2a}$ si $a>0$, pero si $a<0$, la función no está definida en parte alguna.

107. $f(x+1)=2x^2+5x+3$.

108*. Sea $\frac{x^2+2x+c}{x^2+4x+3c}=m$, donde m es cualquier número real, entonces, $(m-1)x^2+2(2m-1)x+c(3m-1)=0$. El argumento x debe ser un número real, por consiguiente, $(2m-1)^2-(m-1)(3mc-c)\geqslant 0$ ó $(4-3c)m^2+4(c-1)m-(c-1)\geqslant 0$, pero como m es un número real, esta desigualdad, a su vez, es válida sólo cuando

$$\begin{cases} 4-3c>0 \\ 4(c-1)^2+(4-3c)(c-1)\leqslant 0, \end{cases}$$

de donde $0\leqslant c\leqslant 1$, pero como $c\neq 0$, por consiguiente, $0<c\leqslant 1$.

109. $pv=1748$.

110. La variable x es inversamente proporcional a v.

111. La variable x es directamente proporcional a v.

112. La cantidad de la sustancia desprendida es inversamente proporcional al volumen del solvente.

114. 1) para $x=1$, $y=4$ (el valor máximo);

para $x=5$, $y=\frac{4}{5}$ (el valor mínimo);

2) para $x=-1$, $y=\frac{1}{7}$ (el valor máximo);

para $x=2$, $y=-2$ (el valor mínimo);

3) para $x=0$, $y=1$ (el valor máximo);

para $x=4$, $y=-\frac{3}{5}$ (el valor mínimo).

117. 1) $y=x$; 2) $y=\frac{x}{2}$; 3) $y=\frac{1-x}{3}$; 4) $y=\pm\sqrt{x-1}$; 5) $y=\frac{1}{x}$;

6) $y=\frac{x-1}{x}$; 7) $y=1\pm\sqrt{x+1}$; 8) $y=\pm\sqrt{x^3-1}$;

9) $y=\lg\frac{x}{10}$; 10) $y=-2+10^{x-1}$; 11) $y=2^{\frac{1}{x}}$;

12) $y=\log_2\frac{x}{1-x}$; 13) $y=\frac{1}{2}\lg\frac{x}{2-x}$; 14) $y=\frac{1}{3}\operatorname{arcsen}\frac{x}{2}$;

15) $y=\dfrac{1+\operatorname{arcsen}\frac{x-1}{2}}{1-\operatorname{arcsen}\frac{x-1}{2}}$; 16) $y=\pm\cos\frac{x}{4}$ $(0\leqslant x\leqslant 2\pi)$.

119. $d=-a$. **122.** $1<x\leqslant 3$; $y=1+2^{1-x^2}$.

123. $y=\operatorname{arcsen}\sqrt[3]{x-x^2-2}$.

125. $x_1\approx -0{,}5$, $x_2=1$, $x_3\approx 54{,}5$.

126*. 1) $x_1\approx 1{,}4$, las demás raíces son imaginarias; x_1 es la abscisa del punto de intersección de las gráficas de las funciones cúbica y lineal: $y=x^3$ e $y=-x+4$; 2) $x_1=1$, $x_2=-1$, $x_3=3$; es conveniente aplicar el cambio de la variable $x=x'+\alpha$ seleccionando α de tal modo que el coeficiente de

x'^2 se reduzca a cero; y luego, como en el punto 1); 3) $x_1 = 4$, $x_2 = x_3 = 1$; véase la indicación al punto 2); 4) $x_1 = -1$, las demás raíces son imaginarias; véase la indicación al punto 2).

127. 1) 1,465 . . .; 2) $\approx 14,26$ cm; 3) casi 6,8 cm.

128. Si $y_1 = x^n$, $y_2 = \sqrt[n]{x}$, se tiene
cuando $n > 1$ para $0 < x < 1$ $y_1 < y_2$ y para $1 < x < \infty$ $y_1 > y_2$,
cuando $0 < n < 1$ para $0 < x < 1$ $y_1 > y_2$, y para $1 < x < \infty$ $y_1 < y_2$,
cuando $-1 < n < 0$ para $0 < x < 1$ $y_1 < y_2$, y para $1 < x < \infty$ $y_1 > y_2$,
cuando $n < -1$ para $0 < x < 1$ $y_1 > y_2$, y para $1 < x < \infty$ $y_1 < y_2$.

133. $x_1 = 1$, $x_2 = 2$.

134. Los puntos de intersección son (1, 2); (3, 8); $\left(3, \frac{4}{3}\right)$; (−1,5; 0,3).

135. $n = 15$.

136. Partiendo de la definición de las funciones hiperbólicas es posible demostrar que $\operatorname{sh}(-x) = -\operatorname{sh} x$, $\operatorname{th}(-x) = -\operatorname{th} x$, $\operatorname{ch}(-x) = \operatorname{ch} x$. Estas funciones no son periódicas.

140. $y_{\min} \approx 0,8$ para $x \approx 0,4$.

141. La gráfica de la función es simértica respecto al origen de coordenadas porque la función es impar. $y = \frac{a^x - a^{-x}}{2}$.

143. 1) $A = 1$, $T = \frac{2}{3}\pi$; 2) $A = 5$, $T = \pi$; 3) $A = 4$, $T = 2$; 4) $A = 2$, $T = 4\pi$; 5) $A = 1$, $T = \frac{8}{3}$; 6) $A = 3$, $T = \frac{16}{5}\pi$.

144. 1) 2; $\frac{2\pi}{3}$; $\frac{3}{2\pi}$; 5; 2) 1; 4π; $\frac{1}{4\pi}$; $\frac{3\pi - 1}{2}$; 3) $\frac{1}{3}$; 1; 1; $-\frac{\pi}{3}$; 4) 1; $6\pi^2$; $\frac{1}{6\pi^2}$; $\frac{1}{2\pi}$.

146. El dominio de definición es $(0, \pi)$. El área es máxima cuando $x = \frac{\pi}{2}$.

147. $x = R \operatorname{sen}\left(\frac{vt}{R} + \frac{\pi}{2} + \arccos\frac{a}{R}\right)$.

148. $y = \operatorname{sen}\left[\frac{t - t_0}{t_1 - t_0}(\operatorname{arcsen} y_1 - \operatorname{arcsen} y_0) + \operatorname{arcsen} y_0\right]$;

$$T = \frac{2\pi(t_1 - t_0)}{\operatorname{arcsen} y_1 - \operatorname{arcsen} y_0}; \qquad \varphi_{\text{inic}} = \frac{t_1 \operatorname{arcsen} y_0 - t_0 \operatorname{arcsen} y_1}{t_1 - t_0}.$$

149. $x = R(1 - \cos\varphi) + a - \sqrt{a^2 - R^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}$, donde $\varphi = 2\pi nt$.

151. 1) $x_1 = 0$, $x_{2,3} \approx \pm 1,9$; 2) $x = 0$; $\pm 4,5$; $\pm 7,72$: luego, con exactitud considerable se puede apreciar $x \approx \pm \frac{(2n+1)\pi}{2}$ $(n > 3)$; 3) $x \approx 0,74$; 4) $x_1 = 0,9$, $x_2 = 2,85$, $x_3 = 5,8$; 5) existe un sinnúmero de raíces; $x_1 = 0$, x_2 es un poco menos que $\frac{\pi}{2}$, x_3 es un poco mayor que $\frac{3\pi}{2}$, etc.

152. 1) 2π; 2) 2π; 3) 24; 4) 2.

153. 1) $y = \sqrt{2} \operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$;

2) $y = \sqrt{5 + 2\sqrt{3}} \operatorname{sen}(x + \varphi_0)$, donde $\varphi_0 = \operatorname{arcsen}\frac{1}{\sqrt{5 + 2\sqrt{3}}}$.

155*. 1) El período es $\frac{\pi}{2}$. Sobre el intervalo $[0, 2\pi]$ la función es susceptible de ser presentada de la siguiente forma:

$$y = \operatorname{sen} x + \cos x \text{ sobre el intervalo } \left[0, \frac{\pi}{2}\right],$$

$$y = \operatorname{sen} x - \cos x \text{ sobre el intervalo } \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right],$$

$$y = -\operatorname{sen} x - \cos x \text{ sobre el intervalo } \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right],$$

$$y = -\operatorname{sen} x + \cos x \text{ sobre el intervalo } \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right].$$

2) El período es 2π. Sobre el intervalo $[0, 2\pi]$ la función es susceptible de ser presentada de la siguiente forma:

$$y = \operatorname{tg} x \text{ sobre el intervalo } \left[0, \frac{\pi}{2}\right).$$

$$y = 0 \text{ sobre el intervalo } \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right],$$

$$y = -\operatorname{tg} x \text{ sobre el intervalo } \left[\pi, \frac{3}{2}\pi\right).$$

$$y = 0 \text{ sobre el intervalo } \left(\frac{3}{2}\pi, 2\pi\right].$$

156. 1) El dominio de definición está compuesto de una infinidad de intervalos de la forma $(2n\pi, (2n+1)\pi)$, donde $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$; no es par ni impar; periódica, el período es 2π. Sobre el intervalo $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ el seno crece desde 0 hasta 1, por consiguiente, $\lg \operatorname{sen} x$ crece hasta 0 sin dejar de ser negativo. En el intervalo $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ el seno decrece desde 1 hasta 0, por consiguiente, decrece $\lg \operatorname{sen} x$. En el intervalo $(\pi, 2\pi)$ el seno tiene valores negativos, por consiguiente, la función $\lg \operatorname{sen} x$ no está definida. 2) El dominio de definición está compuesto de puntos separados de la forma $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, donde $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ En estos puntos $y = 0$. La gráfica son puntos sueltos del eje de las abscisas. 3) La función está definida en todo el eje numérico, excepto los puntos $x = \pi n$, donde $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

158. $\omega = 2 \arcsen \frac{\alpha}{2\pi}$. **159.** $\gamma = \operatorname{arctg} \frac{a(l \cos\varphi + b \operatorname{sen}\varphi)}{b^2 + l^2 + a(b\cos\varphi - l\operatorname{sen}\varphi)}$.

160. $\alpha = \arccos\left[1 - \frac{x(2a - x)}{2R(a + R - x)}\right]$.

161. 1) $-1 \leqslant x \leqslant 1$;
2) $0 \leqslant x \leqslant 1$; 3) $0 \leqslant x \leqslant 1$; 4) $-1 \leqslant x \leqslant 0$; 5) $0 < x < \infty$;
6) $-\infty < x < 0$; 7) $0 < x < \infty$; 8) $-\infty < x \leqslant 0$;
9) $-\infty < x < 1$; 10) $1 < x < \infty$.

162. 1) $-1 \leqslant x \leqslant 1$; 2) $0 \leqslant x \leqslant 1$; 3) $-\infty < x < \infty$; 4) está definida por todas partes, excepto $x = 0$.

163*. El período es 2π. Véase la gráfica en la fig. 82. *Indicación*. Sobre el intervalo $-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$ tenemos $y = \arcsen(\operatorname{sen} x) \equiv x$ de acuerdo con la

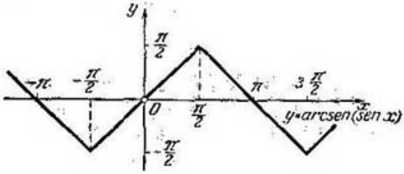

Fig. 82

definición de la función arcsen x. Para obtener la gráfica de la función sobre el intervalo $\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant 3\frac{\pi}{2}$ ponemos $z = x - \pi$, entonces tenemos $x = \pi + z$, $-\frac{\pi}{2} \leqslant z \leqslant \frac{\pi}{2}$,

$$y = \arcsen(\operatorname{sen} x) = \arcsen \operatorname{sen}(z+\pi) = -\arcsen(\operatorname{sen} z) = -z;$$

$$y = \pi - x, \text{ etc.}$$

167. $y_{\text{máx}} \approx 15$, $y_{\text{mín}} \approx 5{,}5$; la función pasa del crecimiento al decrecimiento para $x = -2$. Cero de la función: $x \approx -3{,}6$.

169. $y = \frac{1}{32}(267 - 10x - x^2)$ ó $y = -0{,}0312x^2 - 0{,}3125x + 8{,}344$; ceros de la función: $x_1 \approx -22{,}09$, $x_2 \approx 12{,}09$. Para obtener raíces con exactitud hasta 0,01 los coeficientes deben ser tomados con exactitud hasta 0,0001.

170. $x_1 \approx 2{,}60$ cm, $x_2 \approx 7{,}87$ cm.

171. $x_1 \approx -2{,}3$, $x_2 \approx 3$; las demás raíces son imaginarias.

172*. Seleccionar α de modo que el coeficiente de x'^3 se reduzca a cero; $x_1 \approx -3{,}6$, $x_2 \approx -2{,}9$, $x_3 \approx 0{,}6$, $x_4 \approx 4{,}8$.

173. $x_1 \approx 0{,}59$, $x_2 \approx 3{,}10$, $x_3 \approx 6{,}29$, $x_4 \approx 9{,}43$; en general, $x \approx \approx \pi n$ $(n > 2)$.

174. $x_1 \approx -0{,}57$, $y_1 \approx -1{,}26$; $x_2 = -0{,}42$, $y_2 \approx 1{,}19$, $x_3 \approx 0{,}46$, $y_3 \approx \approx 0{,}74$, $x_4 \approx 0{,}54$, $y_4 \approx -0{,}68$.

Al capítulo II

176. $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 1$, $n \geqslant 4$.

177. $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$; $n > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$. 178. $n = 19\,999$.

179. $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = 0$; $n \geqslant 1000$. La magnitud v_n ora es mayor que su límite ora menor, ora igual a él (en este último caso para $n = 2k + 1$, donde $k = = 0, 1, 2, \ldots$).

180. $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 1$; $n \geqslant 14$; $n \geqslant \log_2 \frac{1}{\varepsilon}$.

181. $n \geqslant \frac{1}{3}\sqrt{\frac{5-6\varepsilon}{\varepsilon}}$, si $\varepsilon \leqslant \frac{5}{6}$; $n - 0$, [si $\varepsilon > \frac{5}{6}$.

182. $n \geqslant \frac{a}{\sqrt{\varepsilon(2+\varepsilon)}}$; la sucesión u_n es decreciente.

183. $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = 0$; v_n alcanza su límite para $n = m + 1$, porque, a partir de este valor de n, $v_n = 0$.

185. 0.**186.** 1) No. 2) Sí.

189. Cuando $a = 0$ este límite puede ser igual a cualquier número o no existir.

190. $\delta < \sqrt{4+\varepsilon}-2$; $\delta < 0{,}00025$. **191.** $\delta < 2-\sqrt{3}$. **192.** $\delta < \frac{2}{13}$.

193. $\left|x-\frac{\pi}{2}\right| < \frac{\pi}{2} - \operatorname{arcsen} 0{,}99 \approx 0{,}136$.

194. $N \geqslant \sqrt{\frac{1}{\varepsilon}-1}$, si $\varepsilon \leqslant 1$; $N = 0$, si $\varepsilon > 1$.

195. $N \geqslant \sqrt{\frac{4}{\varepsilon}-3}$, si $\varepsilon \leqslant \frac{4}{3}$; $N = 0$, si $\varepsilon > \frac{4}{3}$.

196. $n > \frac{N-1}{2}$,

197. u_n es una magnitud positiva infinitamente grande si la diferencia de la progresión $d > 0$, y negativa, cuando $d < 0$. En el caso de la progresión geométrica esta aserción es válida sólo cuando el valor absoluto del denominador de la progresión es mayor que 1.

198. $-\frac{1}{10^4+2} < x < \frac{1}{10^4-2}$. **199.** $\frac{3000}{1001} < x < \frac{3000}{999}$.

200. $\delta < \frac{1}{\sqrt{N}} - 0{,}01$. **201.** $\log_2 0{,}99 < x < \log_2 1{,}01$.

202. $M \geqslant 10^N = 10^{100}$. **203.** $\operatorname{sen} x$, $\cos x$ y todas las funciones trigonométricas inversas. **205.** No. Sí. **206.** No. **207.** 1) Por ejemplo, $x_n = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$ y $x_n = 2\pi n$; 2) No.

209. Si $a > 1$, la función no es acotada (pero no es infinitamente grande) cuando $x \to +\infty$; cuando $x \to -\infty$ tiende a cero. Si $0 < a < 1$, la función no es acotada para $x \to -\infty$ (pero la función no es infinitamente grande). Cuando $x \to +\infty$, tiende a cero. Para $a = 1$ la función es acotada en todo el eje numérico.

210. 1), 3) y 5) no; 2) y 4) sí.

213. $\frac{-1}{10001} < x < \frac{1}{9999}$.

214. $N \geqslant \left(\frac{1-\varepsilon^2}{2\varepsilon}\right)^2$

215. 1) $y = 1 + \frac{1}{x^3-1}$; 2) $y = \frac{1}{2} + \frac{-1}{2(2x^2+1)}$; 3) $y = -1 + \frac{2}{1+x^2}$.

216*. Comparar u_n con la suma de los términos de la progresión geométrica $\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \ldots, \frac{1}{3^n}$. **220.** 3. **221.** Sí.

222. $f(x) = 9\pi$ para $0 \leqslant x \leqslant 5$; $f(x) = 4\pi$ para $5 < x \leqslant 10$; $f(x) = \pi$ para $10 < x \leqslant 15$. La función es discontinua cuando $x = 5$ y $x = 10$.

223. $a = 1$. **224.** $A = -1$, $B = 1$. **225.** $x = 2$; $x = -2$. **226.** 2/3.

227. La función $y=\frac{\operatorname{sen} x}{x}$ tiene, en el punto $x=0$, una discontinuidad superable, la función $y=\frac{\cos x}{x}$ tiene una discontinuidad de segundo género (infinita).

228. La función es discontinua cuando $x=0$.

229. La función tiene tres puntos de discontinuidad. Para $x=0$ la discontinuidad es superable, para $x=\pm 1$ la discontinuidad es de segundo género (infinita).

230. No. Si $x \to 0$ a la derecha, $f(x) \to \pi/2$; si $x \to 0$ a la izquierda, $f(x) \to -\pi/2$.

231. La función es discontinua cuando $x=0$. 232. 0.

234. No. Si $x \to 1$ a la derecha, $y \to 1$; si $x \to 1$ a la izquierda, $y \to 0$.

235. Si $x \to 0$ a la derecha, $y \to 1$; si $x \to 0$ a la izquierda, $y \to -1$.

236. La función es discontinua cuando $x=0$ (discontinuidad de primer género).

237. La función tiene discontinuidades de primer género en los puntos $x = \frac{\pi}{2}(2k+1)$.

238. Cuando $x=0$ la función es continua; cuando $x \neq 0$ la función es discontinua.

239. Las tres funciones son discontinuas cuando x es igual a un entero (negativo o positivo) o a cero.

241*. Escribir el polinomio en la forma $x^n\left(a_0+\frac{a_1}{x}+\ldots+\frac{a_n}{x^n}\right)$ y analizar su comportamiento para $x \to \pm\infty$.

244*. Construir, de modo esquemático, la gráfica de la función $y=\frac{a_1}{x-\lambda_1}+\frac{a_2}{x-\lambda_2}+\frac{a_3}{x-\lambda_3}$ analizando su comportamiento en los entornos de los puntos λ_1 λ_2 λ_3.

245. 1. 246. 1/2. 247. 3. 248. ∞. 249. 0. 250. 0. 251. 15/17.
252. 1. 253. 0. 254. 4. 255. 1. 256. 0. 257. 0. 258. 0. 259. 1.
260. 4/3. 261. 1/2. 260. $-1/2$. 263. -1.

264*. 1. Fijarse en que $\frac{1}{(n-1)n}=\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}$. 265. $\frac{1}{2}$. 266. 1. 267. 0.

268. 9. 269. $\frac{3}{4}$. 270∞. 271. 0. 272.0

273. $-2/5$. 274. 1/2. 275. 6. 276. ∞.
277. -1. 278. ∞. 279. 0. 280. m/n. 281. 0. 282. ∞. 283. 1/2.
284. -1. 285. 0. 286. 1/4. 287. $-1/2$. 288. 100. 289. -1.
290. 1. 291. ∞. 292. 0.
293. 0. 294. ∞. 295. 4. 296. 1/4. 297. 3.

298. $\frac{1}{2\sqrt{x}}$, si $x>0$; ∞, si $x=0$. 299. $\frac{1}{3}$. 300. $\frac{2}{3}$.

301. $\frac{1}{4a\sqrt{a-b}}$. 302. $\frac{m}{n}$. 303*. $\frac{1}{2}$. Sumar y restar una unidad al numerador. 304. $-1/4$. 305. Una raíz tiende a $-c/b$, otra, a ∞.

306. 0. 307. 0. 308. 0, si $x \to +\infty$; ∞, si $x \to -\infty$. 309. 1/2, si $x \to +\infty$; $-\infty$, si $x \to -\infty$. 310. $\frac{a+b}{2}$, si $x \to +\infty$; ∞, si $x \to -\infty$.

311. $\pm 5/2$. 312. 0. 313. 1. 314. 3. 315. k. 316. α/β. 317. 2/5.
318. 0, si $n > m$; 1, si $n = m$; ∞, si $n < m$. 319. 2/3. 320. 1/3.
321. 1/2. 322. 3/4. 323. ∞. 324. -1. 325. 1/2. 326. ∞. 327. 0.
328. 1/2. 329. ∞. 330. $-3/2$. 331. 1. 332. $\pi/2$. 333. $2/\pi$.

334. $-\frac{a}{\pi}$. 335. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. 336. 2. 337. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. 338. -2. 339. $-2\operatorname{sen} a$.

340. $\frac{\beta^2-\alpha^2}{2}$. 341. $\cos^3\alpha$. 342. $\frac{\operatorname{sen} 2\beta}{2\beta}$. 343. $-\operatorname{sen}\alpha$.

344. $\frac{2\operatorname{sen} a}{\cos^3 a}$. 345. $\frac{\sqrt{2}}{8}$. 346. 1. 347. 6. 348. $\frac{3}{2}$. 349. -1.

350*. $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$. Poner $\arccos x = y$. 351. $\frac{1}{e}$. 352. $\frac{1}{e}$. 353. 1.

354. e^{mk}. 355. e^6. 356. $e^{-\frac{2}{3}}$.

357. e^2. 358. 0, si $x \to +\infty$; ∞, si $x \to -\infty$. 359. ∞, si $x \to +\infty$; 0, si $x \to -\infty$. 360. 1. 361. ∞, si $x \to +\infty$; 0, si $x \to -\infty$.

362. e^2. 363. e. 364. $\sqrt{e}$. 365. k. 366. $1/a$. 367. a. 368. $1/e$.

369. $\ln a$. 370. 2/3. 371. e. 372*. 3/2; sumar y restar una unidad al numerador. 373. 2. 374. 1. 375. $a-b$. 376. 1.

377. 0, si $x \to +\infty$; ∞, si $x \to -\infty$.

378. 1, si $x \to +\infty$; -1, si $x \to -\infty$.

379. 1) a^n; 2) 0, si $A \pm 0$; a^n, si $A = 0$ y $a \neq 0$, y ∞, si $A = a = 0$; 3) $\frac{1}{1+A}$.

380. 0, si $x \to +\infty$; $-\infty$, si $x \to -\infty$.

381. Para $a > 1$ el límite es igual a 1, si $x \to +\infty$, e igual a 0, si $x \to -\infty$. Para $a < 1$ el límite es igual a 0, si $x \to +\infty$, e igual a 1, si $x \to -\infty$. Para $a = 1$ el límite es igual a 1/2.

382. Para $a > 1$ el límite es igual a 1, si $x \to +\infty$, e igual a -1, si $x \to -\infty$. Para $a < 1$, viceversa. Para $a = 1$ el límite es igual a 0.

383. 0. 384. 0. 385. 1.

386. 0. 387. $-\cos a$. 388. 1/12. 389. 1/8.

390*. $\frac{\operatorname{sen} x}{x}$. Multiplicar y dividir por $\operatorname{sen}\frac{x}{2^n}$.

391. 1/2. 392. 0. 393*. $-1/2$. Valerse de la fórmula $\operatorname{arctg} b - \operatorname{arctg} a = \operatorname{arctg}\frac{b-a}{1+ab}$. 394. $\frac{1}{2}$. 395*. $\frac{1}{2}$. Sustituir $\operatorname{arcsen} x$ por $\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ y recurrir a la indicación al ejercicio 393.

396. ∞, si $n < 1$; e, si $n = 1$; 1, si $n > 1$.

397.* 1. Tomar la expresión $1-(1-\cos x)$ en vez de $\cos x$.

398. $-1/2$. 399. $1/e$. 400. e. 421. e^{ab}.

402. v_n es de orden infinitesimal superior. 403. u_n y v_n son magnitudes infinitesimales equivalentes. 405. Son del mismo orden. 406. Para $x = 0$ el orden infinitesimal es distinto. Cuando $x = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$ las magnitudes Δy y Δx son equivalentes. 407. No.

408. De tercer orden. 409. 1) 2; 2) 1/2; 3) 1; 4) 10.

410. $x = \frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{a^2}{2b^2}}$. 411. $a = k$. 412. No. 414. 1) $\frac{1}{3}$; 2) $\frac{1}{2}$; 3) $\frac{1}{2}$;

4) es infinitesimal equivalente; 5) es infinitesimal equivalente; 6) 1; 7) es infinitesimal equivalente; 8) 2; 9) 2; 10) 1; 11) 2/3; 12) 2.

415. $a^2\sqrt{3}$. 416. $2\pi R^2$; $4R^2$.

418. La línea quebrada viene aproximándose a la recta en el sentido de que sus puntos se aproximan, pero de ello no se deduce que la longitud de la línea quebrada tiende a la longitud del segmento.

419. a. 420. a, $\frac{\pi a}{2}$. 421. $2\pi(R+r)$.

422. El segmento y el ángulo son del orden 1/2.

425. 1) 10,25; 2) 30,2; 3) 16,125; 4) 40,4; 5) 0,558; 6) 0,145.

426. 1) 10,16; 2) 20,12; 3) 1,02; 4) 4,04.

427. $\ln 1{,}01 \approx 0{,}01$; $\ln 1{,}02 \approx 0{,}0{,}2$; $\ln 1{,}1 \approx 0{,}1$; $\ln 1{,}2 \approx 0{,}2$.

Al capítulo III

428. a) 5; b) 5. 429. a) $v=0{,}25\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$; b) $v=0{,}55\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$; c) $\frac{t_1+t_2}{1200}\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

430. 75,88; 60,85; 49,03; 48,05. 431. $53{,}9\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$; $49{,}49\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$; $49{,}25\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$; $49{,}005\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$; $v_5=49{,}0\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$; $v_{10}=98{,}0\frac{\text{m}}{\text{s}}$; $v=9{,}8t\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

432. a) $4\frac{\text{g}}{\text{cm}}$; b) $40\ \frac{\text{g}}{\text{cm}}$; c) $4l\ \frac{\text{g}}{\text{cm}}$, donde l es la longitud del segmento AM.

433. 1) $95\ \frac{\text{g}}{\text{cm}}$; 2) a) $35\ \frac{\text{g}}{\text{cm}}$; b) $5\ \frac{\text{g}}{\text{cm}}$; c) $185\ \frac{\text{g}}{\text{cm}}$.

434. 1) $1{,}002\,\frac{\text{calorías}}{\text{g}\cdot\text{grados}}=4198\,\frac{\text{julios}}{\text{kg}\cdot\text{grados}}$; 2) $1{,}013\,\frac{\text{calorías}}{\text{g}\cdot\text{grados}}$.

435*. Introducir la velocidad angular media, luego, pasando al límite, obtener la magnitud buscada.

438. $k=\frac{f'(t)}{f(t)}$, donde k es el coeficiente de la dilatación lineal.

439. $k=S\,\frac{\varphi'(P)}{\varphi(P)}$. 440. 1) 56; 2) 19; 3) 7,625; 4) 1,261.

441. 1) 4,52; 2) −0,249; 3) 0,245. 442. a) 6,5; b) 6,1; c) 6,01; d) 6,001.

443. $f'(5)=10$; $f'(-2)=-4$; $f'\left(-\frac{3}{2}\right)=-3$. 444. 3; 0; 6; $\frac{1}{3}$.

445. $x_1=0$, $x_2=2$. 446. Para la función $f(x)=x^3$ no es válida. 447. 1.

448. 0,4343. 449. 2,303.

454. 1) 0; 2) 6; 3) −4; 4) $k_1=2$, $k_2=4$.

455. (1, 1); (−1, −1). 456. 1) (0, 0); 2) (1/2, 1/4). 457. No puede.

458. $\alpha_1=\operatorname{arctg}\frac{1}{7}$, $\alpha_2=\operatorname{arctg}\frac{1}{13}$. 459. $\alpha_1=\frac{\pi}{2}$, $\alpha_2=\operatorname{arctg}\frac{3}{4}$.

460. arctg 3. 461. $y=12x-16$; $x+12y-98=0$; la subtangente es igual a $\frac{2}{3}$, la subnormal es igual a 96.

462. Para $x=0$ y para $x=2/3$.

463. 1) (2, 4); 2) (−3/2, 9/4); 3) (−1, 1) y (1/4, 1/16).

466. 1) $6x-5$; 2) $4x^3-x^2+5x-0{,}3$; 3) $2ax+b$; 4) $\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$;

5) $\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{x^2}$; 6) $\frac{0{,}2}{\sqrt[5]{y^3}}-10y^2-\frac{0{,}4}{y^3}$; 7) $\frac{1}{n}-\frac{n}{x^2}+\frac{2x}{m^2}-\frac{2m^2}{x^3}$

8) $\frac{3}{2}m\sqrt{x}+\frac{7}{6}n\sqrt[6]{x}+\frac{1}{2}+p\frac{1}{\sqrt{x^3}}$; 9) $\frac{2mz+n}{p+q}$;

10) $-\frac{1}{15}t^{-\frac{5}{3}}+7{,}28t^{-2{,}4}-\frac{0{,}5}{t\sqrt[5]{t}}$; 11) $2x-1$;

12 $3{,}5x^2\sqrt{x}-1+\frac{1}{2\sqrt{x}}$; 13) $3v^2+2v-1$; 14) $6(a-x)$;

15) $\frac{2ax}{a+b}+\frac{b}{a+b}-\frac{c}{(a+b)x^2}$; 16) $\frac{3m(mu+n)^2}{p^3}$.

467. $f(1)=1$; $f'(1)=2$; $f(4)=8$; $f'(4)=2{,}5$; $f(a^2)=3a^2-2|a|$; $f'(a^2)=$
$=3-\frac{1}{|a|}$.

468. $f(-1)=-5$; $f'(-1)=-8$; $f'(2)=\frac{19}{16}$; $f'\left(\frac{1}{a}\right)=3a^4+10a^3-a^2$.

469. 13. **471.** 1) $4x^3-3x^2-8x+9$; 2) $7x^6-10x^4+8x^3-12x^2+4x+3$;

3) $-\frac{1}{2\sqrt{x}}\left(1+\frac{1}{x}\right)$; 4) $\frac{1}{9}\left(\frac{60}{\sqrt[6]{6}}-\frac{5}{x\sqrt[6]{x^5}}+\frac{\sqrt{3}}{x\sqrt[3]{x}}-48\sqrt[6]{27x^2}\right)$;

5) $\frac{1+12x}{3\sqrt[3]{x^2}}+\frac{9\sqrt[3]{x^2}+10x\sqrt[3]{x}+36x\sqrt[3]{x^2}}{3\sqrt[3]{x^2}}$; 6) $2x(3x^4-28x^2+49)$;

7) $\frac{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+2\sqrt{2x}+2\sqrt{3x}+2\sqrt{6x}+2x\sqrt{6}}{2\sqrt{x}}$.

472. $\frac{2}{(x-1)^2}$. **473.** $\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$. **474.** $\frac{3t^2-6t-1}{(t-1)^2}$.

475. $\frac{v^4+2v^3+5v^2-2}{(v^2+v+1)^2}$. **476.** $\frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$.

477. $-\frac{4x}{3(x^2-1)^2}+1+2x-3x^2$. **478.** $\frac{2v^4(v^3-5)}{(v^3-2)^2}$. **479.** $-\frac{6x^2}{(x^3+1)^2}$.

480. $-\frac{6x^2}{(x^3-1)^2}$. **481.** $\frac{2v-1}{a^2-3}$. **482.** $-\frac{3x^2}{\sqrt{\pi}}$. **483.** $\frac{2t+1}{(t^2+t+1)^2}$.

484. $\frac{3-2t}{(t^2-3t+6)^2}$. **485.** $\frac{4x^3(2b^2-x^2)}{(b^2-x^2)^2}$. **486.** $\frac{1+2x+3x^2-2x^3-x^4}{(1+x^3)^2}$.

487. $\frac{6x(1+3x-5x^3)}{(1-x^2)^2(1-2x^3)^2}$. **488.** $\frac{a+2bx}{m(a+bm)}$.

489. $-\frac{a^2b^2c^2[(x-b)(x-c)+(x-c)(x-a)+(x-a)(x-b)]}{(x-a)^2(x-b)^2(x-c)^2}$.

490. $f'(0)=0$; $f'(1)=6$. **491.** $F'(0)=11$; $F'(1)=2$; $F'(2)=-1$.

492. $F'(0)=-\frac{1}{4}$; $F'(-1)=\frac{1}{2}$; **493.** $s'(0)=\frac{3}{25}$; $s'(2)=\frac{17}{15}$.

494. $y'(1)=16$; $y'(a)=15a^2+\frac{2}{a^3}-1$. **495.** $\rho'(2)-\frac{5}{9}$; $\rho'(0)=1$.

496. $\varphi'(1)=-\frac{a+1}{4}$.

497. $z'(0)=1$.

498. 1) $4x^3-3x^2(a+b+c+d)+2x(ab+ac+ad+bc+db+cd)-(abc+abd+acd+bcd)$; 2) $8x(x^2+1)^3$; 3) $-20(1-x)^{19}$; 4) $60(1+2x)^{29}$; 5) $-20x(1-x^2)^9$; 6) $5(15x^2+2x)(5x^3+x^2-4)^4$; 7) $6(3x^2-1)(x^3-x)^5$; 8) $6\left(14x+\frac{4}{x^2}\right)\left(7x^2-\frac{4}{x}+6\right)^5$; 9) $4\left(3t^2+\frac{3}{t^4}\right)\left(t^3-\frac{1}{t^3}+3\right)^3$; 10) $-\frac{4(x+1)}{(x-1)^3}$; 11) $\frac{5(x^2+2x-1)(1+x^2)^4}{(1+x)^6}$; 12) $24(x^2+x+1)\times\times(2x^3+3x^2+6x+1)^3$. **499.** $\frac{(s+2)(s+4)}{(s+3)^2}$.

500. $\frac{(3-t)t^2}{(1-t)^3}$. **501.** $\frac{1-\sqrt{2}}{2\sqrt{x}(1+\sqrt{2x})^2}$. **502.** $-\frac{4}{3\sqrt[3]{4x^2}(1+\sqrt[3]{2x})^2}$.

503. $-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$. **504.** $-\frac{4(1-2\sqrt{x})^3}{\sqrt{x}}$. **505.** $\frac{mv^{m-1}}{(1-v)^{m+1}}$.

506. $-\frac{4(2x-1)}{(x^2-x+1)^3}$. **507.** $\frac{x}{\sqrt{(a^2-x^2)^3}}$. **508.** $-\frac{2x}{3\sqrt[3]{(1+x^2)^4}}$.

509. $\frac{2x^3+4x^7}{\sqrt{(1-x^4-x^8)^3}}$. **510.** $\frac{3-x}{2\sqrt{(1-x)^3}}$. **511.** $\frac{x(x^2+2a^2)}{\sqrt{(x^2+a^2)^3}}$.

512. $-\frac{v+\sqrt{a^2+v^2}}{a^2\sqrt{a^2+v^2}}$. **513.** $-\frac{2}{3\sqrt[3]{(2x-1)^4}}-\frac{15x}{2\sqrt[4]{(x^2+2)^7}}$.

514. $u'(1)=9$. **515.** $y'(2)=-\frac{\sqrt{3}}{3}$. **516.** 0. **517.** $\cos x-\operatorname{sen} x$.

518. $\frac{1-\cos x-x\operatorname{sen} x}{(1-\cos x)^2}$. **519.** $\frac{x-\operatorname{sen} x\cdot\cos x}{x^2\cos^2 x}$. **520.** $\varphi\cos\varphi$.

521. $(\alpha\cos\alpha-\operatorname{sen}\alpha)\left(\frac{1}{\alpha^2}-\frac{1}{\operatorname{sen}^2\alpha}\right)$. **522.** $\frac{1}{1+\cos t}$.

523. $\frac{\operatorname{sen} x+\cos x+x(\operatorname{sen} x-\cos x)}{1+\operatorname{sen} 2x}$.

524. $\frac{(1+\operatorname{tg} x)(\operatorname{sen} x+x\cos x)-x\operatorname{sen} x\sec^2 x}{(1+\operatorname{tg} x)^2}$. **525.** $-\operatorname{sen} 2x$.

526. $\operatorname{tg}^3 x\sec^2 x$. **527.** $-\operatorname{sen}^3 x$. **528.** $\frac{3}{2}\operatorname{sen} 2x(2-\operatorname{sen} x)$. **529.** $\operatorname{tg}^4 x$.

530. $2x\frac{\operatorname{sen} x}{\cos^3 x}$. **531.** $-\frac{16\cos 2x}{\operatorname{sen}^3 2x}$. **532.** $3\cos 3x$ **533.** $-\frac{a}{3}\operatorname{sen}\frac{x}{3}$.

534. $9\cos(3x+5)$. 535. $\dfrac{1}{2\cos^2\dfrac{x+1}{2}}$. 536. $\dfrac{1}{\sqrt{1+2\operatorname{tg}x}\cdot\cos^2 x}$.

537. $-\dfrac{\cos\dfrac{1}{x}}{x^2}$. 538. $\cos(\operatorname{sen}x)\cdot\cos x$. 539. $-12\cos^2 4x\operatorname{sen}4x$.

540. $\dfrac{1}{4\sqrt{\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}}\cdot\cos^2\dfrac{x}{2}}$. 541. $\dfrac{x\cos\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}}$.

542. $-\dfrac{2x}{3\operatorname{sen}^2\sqrt[3]{1+x^2}\cdot\sqrt[3]{(1+x^2)^2}}$. 543. $4(1+\operatorname{sen}^2 x)^3\operatorname{sen}2x$.

544. $\dfrac{x^2-1}{2x^2\cos^2\left(x+\dfrac{1}{x}\right)\sqrt{1+\operatorname{tg}\left(x+\dfrac{1}{x}\right)}}$. 545. $\dfrac{\operatorname{sen}\left(2\dfrac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\right)}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^2}$.

546. $-3\operatorname{sen}3x\operatorname{sen}(2\cos 3x)$. 548. $\operatorname{arcsen}x+\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

549. $\dfrac{\pi}{2(\arccos x)^2\sqrt{1-x^2}}$. 550. $\dfrac{2\operatorname{arcsen}x}{\sqrt{1-x^2}}$. 551. $\operatorname{arcsen}x$.

552. $-\dfrac{1}{(\operatorname{arcsen}x)^2\sqrt{1-x^2}}$.

553. $\operatorname{sen}x\cdot\operatorname{arctg}x+x\cos x\cdot\operatorname{arctg}x+\dfrac{x\operatorname{sen}x}{1+x^2}$.

554. $-\dfrac{x+\arccos x\sqrt{1-x^2}}{x^2\sqrt{1-x^2}}$. 555. $\dfrac{\operatorname{arctg}x}{2\sqrt{x}}+\dfrac{\sqrt{x}}{1+x^2}$. 556. 0.

557. $\dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$. 558. $-\dfrac{2x^2}{(1+x^2)^2}$. 559. $\dfrac{\sqrt{1-x^2}+x\operatorname{arcsen}x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$.

560. $\dfrac{2x}{\operatorname{arctg}x}-\dfrac{x^2}{(1+x^2)(\operatorname{arctg}x)^2}$. 561. $\dfrac{1}{\sqrt{2x-x^2}}$.

562. $-\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{1+2x-2x^2}}$. 563. $\dfrac{2x}{1+x^4}$. 564. $-\dfrac{2}{|x|\sqrt{x^2-4}}$.

565. $\dfrac{\cos x}{|\cos x|}$. 566. $-\dfrac{2\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}}{1+x^2}$. 567. $\dfrac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}\cdot\sqrt{1-(\arccos x)^2}}$.

568. $-\dfrac{1}{(1+x)\sqrt{2x(1-x)}}$.

569. $\dfrac{x+1}{8\sqrt[4]{(\operatorname{arcsen}\sqrt{x^2+2x})^3}\sqrt{(1-2x-x^2)(x^2+2x)}}$.

570. $\dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{1-\cos\alpha\cos x}$. 571. $\dfrac{\sqrt{a^2-b^2}}{a+b\cos x}$. 572. $\dfrac{1}{2(1+x^2)}$.

573. $2x\log_3 x+\frac{x}{\ln 3}$. 574. $\frac{2\ln x}{x}$. 575. $\frac{\ln x+1}{\ln 10}$. 576. $\frac{1}{2x\sqrt{\ln x}}$.

577. $\frac{x\ln x-x+1}{x\ln^2 x}\ln 2$. 578. $\operatorname{sen} x\ln x+x\cos x\ln x+\operatorname{sen} x$.

579. $-\frac{1}{x\ln^2 x}$. 580. $\frac{1-n\ln x}{x^{n+1}}$. 581. $-\frac{2}{x(1+\ln x)^2}$.

582. $\frac{1+x^2-2x^2\ln x}{x(1+x^2)^2}$. 583. $x^{n-1}(n\ln x+1)$. 584. $\frac{\ln x}{x\sqrt{1+\ln^2 x}}$.

585. $-\frac{2}{1-2x}$. 586. $\frac{2x-4}{x^2-4x}$. 587. $\operatorname{ctg} x$. 588. $\frac{2x}{(x^2-1)\ln 3}$.

589. $\frac{2}{\operatorname{sen} 2x}$. 590 $-\frac{2}{\arccos 2x\sqrt{1-4x^2}}$. 591. $4\ln^3\operatorname{sen} x\cdot\operatorname{ctg} x$.

592. $\frac{a}{(ax+b)[1+\ln^2(ax+b)]}$. 593. $n(1+\ln\operatorname{sen} x)^{n-1}\operatorname{ctg} x$.

594. $\frac{1}{x\log_5 x\log_3(\log_5 x)\ln 2\ln 3\ln 5}$.

595. $\frac{x}{\operatorname{arctg}\sqrt{1+x^2}\,(2+x^2)\sqrt{1+x^2}}$. 596. $\frac{6x^2\arcsen[\ln(a^3+x^3)]}{(a^3+x^3)\sqrt{1-\ln^2(a^3+x^3)}}$.

597. $\frac{\operatorname{ctg}\frac{x+3}{4}}{12\sqrt[3]{\ln^2\operatorname{sen}\frac{x+3}{4}}}$. 598. $2^x\ln 2$. 599. $10^x\ln 10$. 600. $-\frac{\ln 3}{3^x}$.

601. $4^{-x}(1-x\ln 4)$. 602. $10^x(1+x\ln 10)$. 603. $e^x(1+x)$.

604. $\frac{1-x}{e^x}$. 605. $\frac{2^x(\ln 2-1)+3x^2-x^3}{e^x}$. 606. $e^x(\cos x-\operatorname{sen} x)$.

607. $\frac{e^x}{\operatorname{sen}^2 x}(\operatorname{sen} x-\cos x)$. 608. $-\frac{\operatorname{sen} x+\cos x}{e^x}$. 609. $\frac{(\ln x-1)\ln 2}{\ln^2 x}2^{\frac{x}{\ln x}}$.

610. $3x^2-3^x\ln 3$. 611. $\frac{e^x}{2\sqrt{1+e^x}}$. 612. $e^x(x^2+1)$. 613. $\frac{2e^x}{(1-e^x)^2}$.

614. $-\frac{2\cdot 10^x\ln 10}{(1+10^x)^2}$. 615. $\frac{e^x(x-1)^2}{(x^2+1)^2}$. 616. $e^x(\cos x+\operatorname{sen} x+2x\cos x)$.

617. $-e^{-x}$. 618. $2\cdot 10^{2x-3}\ln 10$. 619. $\frac{e^{\sqrt{x+1}}}{2\sqrt{x+1}}$. 620. $2^x\ln 2\cdot\cos(2^x)$.

621. $3^{\operatorname{sen} x}\cos x\cdot\ln 3$. 622. $3\operatorname{sen}^2 x\cos x\cdot a^{\operatorname{sen}^3 x}\ln a$. 623. $\frac{2e^{\arcsen x}}{\sqrt{1-4x^2}}$.

624. $2^{3x}\cdot 3^x\ln 2\cdot\ln 3$. 625. $\frac{e^{\sqrt{\ln x}}}{2x\sqrt{\ln x}}$.

626. $\cos(e^{x^2+3x-2})\,e^{x^2+3x-2}(2x+3)$.

627. $-12\cdot 10^{1-\operatorname{sen}^4 3x}\ln 10\cdot\operatorname{sen}^3 3x\cos 3x$.

628. $\frac{(2ax+b)\,e^{\sqrt{\ln(ax^2+bx+c)}}}{2(ax^2+bx+c)\sqrt{\ln(ax^2+bx+c)}}$.

629. $\frac{\operatorname{ctg}\sqrt[3]{\operatorname{arctg}(e^{3x})}\cdot e^{3x}}{(1+e^{6x})\sqrt[3]{[\operatorname{arctg}(e^{3x})]^2}}$. 630. $-2ab^2xe^{-b^2x^2}$.

631. $\frac{2}{a^2}xe^{\frac{-x^2}{a^2}}(a^2-x^2)$. 632. $Ae^{-k^2x}[\omega\cos(\omega x+\alpha)-k^2\operatorname{sen}(\omega x+\alpha)]$.

633. $a^x x^a\left(\frac{a}{x}+\ln a\right)$. 634. $3\operatorname{sh}^2 x\operatorname{ch} x$. 635. $\operatorname{th} x$. 636. $\frac{1}{\operatorname{ch} 2x}$.

637. $-\frac{2x}{\operatorname{ch}^2(1-x^2)}$. 638. $2\operatorname{sh} 2x$. 639. $\operatorname{sh}(\operatorname{sh} x)\operatorname{ch} x$. 640. $\frac{\operatorname{sh} x}{2\sqrt{\operatorname{ch} x}}$.

641. $e^{\operatorname{ch}^2 x}\operatorname{sh} 2x$. 642. $\frac{1}{x\operatorname{ch}^2(\ln x)}$. 643. $x\operatorname{ch} x$. 644. $\frac{3\operatorname{th} x}{2\operatorname{ch}^2 x\sqrt[4]{1+\operatorname{th}^2 x}}$.

645. $\frac{1}{4\operatorname{ch}^4\frac{x}{2}}$. 646. $\frac{1}{2\sqrt{\operatorname{ch} x-\operatorname{sh} x}}$. 647. $\frac{1}{1-\operatorname{sh}^4 x}$.

648. $\frac{x(4+\sqrt{x})\operatorname{sh} 2x+2(2x^2\sqrt{x}-1)\operatorname{ch} 2x}{2x^2}$.

649. $\frac{xe^{3x}}{\operatorname{sh}^2 x}[(3x+2)\operatorname{sh} x-x\operatorname{ch} x]$.

650. $x^{x^2+1}(2\ln x+1)$. 651. $x^{x^x}\cdot x^x\left(\ln^2 x+\ln x+\frac{1}{x}\right)$.

652. $(\operatorname{sen} x)^{\cos x}\left(\frac{\cos^2 x}{\operatorname{sen} x}-\operatorname{sen} x\ln\operatorname{sen} x\right)$. 653. $(\ln x)^x\left(\frac{1}{\ln x}+\ln\ln x\right)$.

654. $2\sqrt[x]{(x+1)^2}\left[\frac{1}{x(x+1)}-\frac{\ln(x+1)}{x^2}\right]$.

655. $x^2e^{x^2}\operatorname{sen} 2x(3+2x^2+2x\operatorname{ctg} 2x)$.

656. $-\frac{2(x-2)(x^2+11x+1)}{3(x-5)^4\sqrt[3]{(x+1)^2}}$. 657. $2x^{\ln x-1}\ln x$.

658. $\frac{57x^2-302x+361}{20(x-2)(x-3)}\cdot\frac{(x+1)^2\sqrt[4]{x-2}}{\sqrt[5]{(x-3)^2}}$.

659. $\frac{1}{2}\sqrt{x\operatorname{sen} x\sqrt{1-e^x}}\left(\frac{1}{x}+\operatorname{ctg} x-\frac{1}{2}\cdot\frac{e^x}{1-e^x}\right)$.

660. $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}[(\operatorname{arcsen} x)^2-1]}\sqrt{\frac{1-\operatorname{arcsen} x}{1+\operatorname{arcsen} x}}$. 661. $x^{\frac{1}{x}-2}(1-\ln x)$.

662. $x^{\operatorname{sen} x}\left(\cos x\ln x+\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)$. 663. $\left(\frac{x}{x+1}\right)^x\left(\frac{1}{x+1}+\ln\frac{x}{x+1}\right)$.

664. $x^{\sqrt{x}-\frac{1}{2}}(2+\ln x)$. 665. $(x^2+1)^{\operatorname{sen} x}\left[\frac{2x\operatorname{sen} x}{x^2+1}+\cos x\ln(x^2+1)\right]$.

666. $\frac{x^4+6x^2+1}{3x(1-x^4)}\sqrt[3]{\frac{x(x^2+1)}{(x^2-1)^2}}$. 667. $\frac{(1+\sqrt[3]{x})^2}{\sqrt[3]{x^2}}$.

668. $\frac{a}{k\cos^2\left(\frac{x}{k}+b\right)}$. 669. $\frac{p}{2\sqrt{1+\sqrt{2px}}\sqrt{2px}}$.

670. $\frac{2x-3}{1+(x^2-3x+2)^2}$. 671. $\frac{1+\operatorname{sen} x}{(x-\cos x)\ln 10}$. 672. $\frac{3}{2}\operatorname{sen} 2x(\cos x-2)$.

673. $\sec^2\frac{x}{5}$. 674. $-\frac{1+2\sqrt{x}}{6\sqrt{x}\sqrt[3]{(x+\sqrt{x})^4}}$.

675. $2\operatorname{sen}\frac{x}{2}\cos 2x+\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}\operatorname{sen} 2x$. 676. $e^{\cos x}(\cos x-\operatorname{sen}^2 x)$.

677. $\frac{x^4(7x^6-40)}{\sqrt[3]{(x^6-8)^2}}$. 678. $e^{-x^2}\left(\frac{1}{x}-2x\ln x\right)$.

679. $\frac{5(x-1)}{x\sqrt{x}}\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^9$. 680. $-\frac{1}{1+x^2}$. 681. $2x^2e^{2x+3}$.

682. $\frac{2\operatorname{sen} 2x}{\cos^2 2x}$. 683. $\frac{1+x^2}{1+x^2+x^4}$. 684. $-\frac{2(x\cos x+\operatorname{sen} x)}{x^2\operatorname{sen}^2 x}$.

685. $\frac{1}{3}\operatorname{ctg}\frac{x}{2}\frac{2x}{3}-\frac{1}{2}\operatorname{sen}^2\frac{x}{3}\operatorname{cosec}^2\frac{x}{2}$. 686. $-\frac{4(31x^5+18)}{27x^5\sqrt[9]{(4x^5+2)^8}}$.

687. $\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}$. 688. $\operatorname{arctg}\sqrt{x}+\frac{\sqrt{x}}{2(1+x)}$.

689. $\frac{\operatorname{tg} x(1+2\operatorname{tg}^2 x)}{\cos^2 x\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x+\operatorname{tg}^4 x}}$. 690. $\frac{\cos 2x}{x}-2\operatorname{sen} 2x\ln x$.

691. $\frac{1+x^4}{1+x^6}$. 692. $\frac{n\cos x}{\sqrt{1-n^2\operatorname{sen}^2 x}}$. 693. $\frac{\cos x}{2\sqrt{\operatorname{sen} x-\operatorname{sen}^2 x}}$.

694. $\operatorname{sen}^5 3x\cos^3 3x$. 695. $\frac{x\arcsen x}{\sqrt{1-x^2}}$. 696. $-\frac{1}{2}\operatorname{sen}\frac{\arcsen x}{2}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

697. $\frac{1+2\sqrt{x}+4\sqrt{x}\sqrt{x+\sqrt{x}}}{8\sqrt{x}\sqrt{x+\sqrt{x}}\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}$. 698. $\frac{3}{2\sqrt{3x-9x^2}}$.

699. $\frac{\ln x-2}{x^2}\operatorname{sen}\left[2\left(\frac{1-\ln x}{x}\right)\right]$. 700. $\frac{2x-\cos x}{(x^2-\operatorname{sen} x)\ln 3}$.

701. $-\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}$. 702. $-\frac{1}{x\sqrt{1-x^2}(x+\sqrt{1-x^2})}$.

703. $\arcsen(\ln x)+\frac{1}{\sqrt{1-\ln^2 x}}$. 704. $-\frac{2e^x}{(1+e^x)^2}\sec^2\left(\frac{1-e^x}{1+e^x}\right)$.

705. $-\frac{2\operatorname{sen}^3 x}{\sqrt{1+\operatorname{sen}^2 x}}$.

706. $-0{,}8\left(\cos\frac{2x+1}{2}-\operatorname{sen} 0{,}8x\right)\left(\operatorname{sen}\frac{2x+1}{2}+0{,}8\cos 0{,}8x\right)$.

707. $10^{\sqrt{x}}\left(1+\frac{\sqrt{x}}{2}\ln 10\right)$. 708. $-\frac{4}{\operatorname{tg} 2x\operatorname{sen}^2 2x}$.

709. $-\frac{1}{(x^2+2x+2)\operatorname{arctg}\frac{1}{1+x}}$. 710. $-\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$.

711. $\frac{x+2}{2\sqrt{x+3}\sqrt[3]{(1+x\sqrt{x+3})^2}}$. 712. $\frac{x(8+9\sqrt{x})}{4\sqrt{1+\sqrt{x}}}$.

713. $-\dfrac{\operatorname{sen} 2x}{2\sqrt{(1+\operatorname{sen}^2 x)^3}}$. **714.** $3x^2 \operatorname{arctg} x^3 + \dfrac{3x^5}{1+x^6}$.

715. $\dfrac{\operatorname{ctg} x \ln \cos x + \operatorname{tg} x \ln \operatorname{sen} x}{\ln^2 \cos x}$. **716.** $\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$.

717. $\dfrac{4}{(1-4x)^2}\left(\sqrt{\dfrac{1-4x}{1+4x}} + \operatorname{arcsen} 4x\right)$. **718.** $-\dfrac{e^{\frac{1}{\ln x}}}{x \ln^2 x}$.

719. $\dfrac{1}{e^x - 1}$. **720.** $10^{x \operatorname{tg} x} \ln 10 \left(\operatorname{tg} x + \dfrac{x}{\cos^2 x}\right)$.

721. $2 \operatorname{sen} x (x \operatorname{sen} x \cos x^2 + \cos x \operatorname{sen} x^2)$. **722.** $\dfrac{2 \operatorname{sen} x}{\cos 2x \sqrt{\cos 2x}}$.

723. $\dfrac{2-3x-x^3}{2(1-x)(1+x^2)}\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x^2}}$. **724.** $\dfrac{x^2}{1-x^4}$. **725** $2^{\frac{x}{\ln x}} \dfrac{\ln x - 1}{\ln^2 x} \ln 2$.

726. $\sqrt{\dfrac{a-x}{x-b}}$. **727.** $-\dfrac{2(2\cos^2 x + 1)}{\operatorname{sen}^2 2x}$.

728. $-\dfrac{1}{(1+x)\sqrt{1-x^2}} e^{\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}$. **729.** $\sqrt{\dfrac{a-x}{a+x}}$. **730.** $\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}$.

731. $-\cos 2x$. **732.** $\dfrac{x^2}{\sqrt{(x^2-1)^3}}$. **733.** $(a^2+1) \operatorname{sen} x e^{ax}$.

734. $e^{1-\cos x}(1 + x \operatorname{sen} x)$. **735.** $\dfrac{2e^{-2x}}{(1+e^{-4x})(\operatorname{arctg} e^{-2x})^2}$.

736. $10e^x \operatorname{sen} 3x$. **737.** $9x^2 \operatorname{arcsen} x$.

738. $\dfrac{e^{-\sqrt{x}}}{4\sqrt{x}\sqrt{(1+e^{-\sqrt{x}})^3}}$. **739.** $\dfrac{x}{\sqrt{2+4x-x^2}}$.

740. $\dfrac{(\cos x - \operatorname{sen} x)(e^x + e^{-x})}{e^x \cos x + e^{-x} \operatorname{sen} x}$. **741.** $\dfrac{\operatorname{arctg} x}{\sqrt{(1+x^2)^3}}$.

742. $\dfrac{\operatorname{sen}(x - \cos x)(1 + \operatorname{sen} x)}{\cos^2(x - \cos x)}$. **743.** $e^x \operatorname{sen} x \cos^3 x (1 + \operatorname{ctg} x - 3 \operatorname{tg} x)$.

744. $\dfrac{54\sqrt[5]{x^4}}{55\sqrt[11]{(9+6\sqrt[5]{x^9})^{10}}}$. **745.** $\dfrac{1}{\sqrt{e^{2x}+4e^x+1}}$.

746. $\dfrac{e^{\operatorname{arctg}\sqrt{1+\ln(2x+3)}}}{(2x+3)[2+\ln(2x+3)]\sqrt{1+\ln(2x+3)}}$.

747. $\dfrac{e^{x^2}}{(e^x+e^{-x})^2}[2x(e^x+e^{-x}) - (e^x - e^{-x})]$. **748.** $\dfrac{\ln(1+\operatorname{sen} x)}{\operatorname{sen}^2 x}$.

749. $\dfrac{40}{2x - 3\sqrt{1-4x^2}}$. **750.** $\dfrac{x^5+1}{x^4(x^2+1)}$. **751.** $\dfrac{x^2}{\sqrt{1-2x-x^2}}$.

752. $\dfrac{1}{x} - \dfrac{x}{1-x^2} + \operatorname{ctg} x$. **753.** $\dfrac{(1+2x^2)\operatorname{sen} x + x(1+x^2)\cos x}{\sqrt{1+x^2}}$.

754. $\dfrac{(x^2-32x-73)(3-x)^3}{2(x+1)^6\sqrt{x+2}}$.

755. $\dfrac{3e^{\sqrt{x}}(2+\sqrt{x})}{10\sqrt[5]{(1+xe^{\sqrt{x}})^2}}$.

756. $\left(2x-\dfrac{1}{1+x^2}\right)\dfrac{e^{x^2-\operatorname{arctg} x+\frac{1}{2}\ln x+1}}{\sqrt{x}}$. 757. $\dfrac{1}{\cos^5 x}$.

758. $\dfrac{e^x \operatorname{arctg} x}{\ln^5 x}\left[1+x+\dfrac{x}{(1+x^2)\operatorname{arctg} x}-\dfrac{5}{\ln x}\right]$.

759. $\dfrac{(1-x^2)\,e^{3x-1}\cos x}{(\arccos x)^3}\left[\dfrac{3-2x-3x^2}{1-x^2}-\operatorname{tg} x+\dfrac{3}{\sqrt{1-x^2}\arccos x}\right]$.

760. $4\sqrt{(x^2+a^2)^3}$. 761. $(\operatorname{arcsen} x)^2$. 762. $\dfrac{e^{-x}-e^x}{e^{-x}+e^x}$.

763. $\dfrac{1}{ae^{mx}+be^{-mx}}$. 764. $\dfrac{1}{x^3+1}$. 765. $\dfrac{1}{x}\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$.

766. $(\operatorname{tg} 2x)^{\operatorname{ctg}\frac{x}{2}}\left(\dfrac{4\operatorname{ctg}\frac{x}{2}}{\operatorname{sen} 4x}-\dfrac{\ln\operatorname{tg} 2x}{2\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}}\right)$.

767. $\dfrac{3x^2+10x+20}{15(x^2+4)\sqrt[3]{(x-5)^2\sqrt[5]{x^2+4}}}$. 768. $\dfrac{1}{x^4+x^2+1}$.

769. $-\dfrac{2nx^{n-1}}{x^{2n}+1}$, si n es un número par, y $-\dfrac{2nx^n}{|x|(x^{2n}+1)}$, si n es un número impar. 770. $\dfrac{24x^3}{(1+8x^3)^2}$. 774. a) $\dfrac{1-(n+1)x^n+nx^{n+1}}{(1-x)^2}$;
b) $\dfrac{2-n(n+1)x^{n-1}+2(n^2-1)x^n-n(n-1)x^{n+1}}{(1-x)^3}$. *Indicación*: aplicar el valor de la suma $x+x^2+\ldots+x^n$.

776. $\sqrt{1-y^2}\,e^{\operatorname{arcsen} y}$ y $\dfrac{\cos\ln x}{x}$. 777. $\dfrac{1}{3(s^2-1)}$. 779. $\dfrac{1}{2\sqrt{x-x^2}}$.

780. $\alpha'(x)=\dfrac{1}{x[1+\ln\alpha(x)]}$. 781. $(\operatorname{Arsh} x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$;
$(\operatorname{Arch} x)'=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$; $(\operatorname{Arth} x)'=\dfrac{1}{1-x^2}$. 782. $\dfrac{e^t}{1-t}$.

783. $\dfrac{-(1+x^4)^2}{8x^3}$; $-\dfrac{1}{2\sqrt[4]{(1-y)^3(1+y)^5}}$. 784. $\dfrac{1}{3y^2-4}$.

785. $\dfrac{1}{2^s\ln 2}\sqrt{1-2^{2s}}$, $\dfrac{1}{\ln 2}\operatorname{ctg} t$. 789. $\sqrt{2}$. 790. $-\dfrac{1}{a}$.

791. $-\dfrac{1}{4}$. 792. $-\dfrac{b^2x}{a^2y}$. — 793. $\sqrt{\dfrac{y}{x}}$. 794. $\dfrac{ay-x^2}{y^2-ax}$.

795. $\dfrac{3a^2\cos 3x+y^2\operatorname{sen} x}{2y\cos x}$. 796. $\dfrac{2a}{3(1-y^2)}$. 797. $\dfrac{y}{y-x}$.

798. $-\dfrac{x}{y}\cdot\dfrac{y^2-2x^2}{2y^2-x^2}$. 799. $-\dfrac{3x^2+2axy+by^2}{ax^2+2bxy+3y^2}$.

800. $-\frac{y\cos^2(x+y)(\cos(xy)-\operatorname{sen}(xy))-1}{x\cos^2(x+y)(\cos(xy)-\operatorname{sen}(xy))-1}$. 801. $2^{x-y}\frac{2^y-1}{1-2^x}$.

802. $\frac{1}{2(1+\ln y)}$. 803. $\frac{\sqrt{1-y^2}(1-\sqrt{1-x^2})}{\sqrt{1-x^2}(1-\sqrt{1-y^2})}$.

804. $\frac{y^2-xy\ln y}{x^2-xy\ln x}$. 805. $-\frac{\operatorname{sen}(x+y)}{1+\operatorname{sen}(x+y)}$. 806. $-\frac{1+y\operatorname{sen}(xy)}{x\operatorname{sen}(xy)}$.

807. $-\sqrt[3]{\frac{y}{x}}$. 808. $\frac{e^y}{2-y}$. 809. $\frac{\operatorname{sen} y}{2\operatorname{sen} 2y-\operatorname{sen} y-x\cos y}$.

810. $\frac{\sqrt{1-k^2}}{1+k\cos x}$. 811. $\frac{y\cos x+\operatorname{sen}(x-y)}{\operatorname{sen}(x-y)-\operatorname{sen} x}$.

812. $\frac{1+y^2}{y^2}$. 814. (2,4).

816. $y+4x+4=0$; $8y-2x+15=0$; la subtangente es igual a $1/2$; la subnormal es igual $a-8$.

819. a) $t_1=0$, $t_2=8$; b) $t_1=0$, $t_2=4$, $t_3=8$.

820. $181{,}5\cdot 10^3$ erg. 821. $\omega=13\frac{\text{rd}}{\text{s}}$. 822. $\omega=2\pi\frac{\text{rd}}{\text{s}}$.

823. $\omega=(2at-b)\frac{\text{rd}}{\text{s}}$; la velocidad se reduce a cero cuando $t=\frac{b}{2a}$ s.

824. $23A$. 825. (0, 0); (1, 1); (2,0). 827. (1, 0); (−1, −4).

828. $y=2x-2$; $y=2x+2$. 829. $3x+y+6=0$.

830. La tangente es $y-y_0=(x-x_0)\cos x_0$; la normal es $y-y_0=-(x-x_0)\sec x_0$.

831. La tangente es $x_0(y-y_0)=x-x_0$; la normal es $(y-y_0)+x_0(x-x_0)=0$.

832. La tangente es $x+2y=4a$; la normal es $y=2x-3a$.

833. La tangente es $y-y_0=\frac{x_0^2(3a-x_0)}{y_0(2a-x_0)^2}(x-x_0)$; la normal es $y-y_0=-\frac{y_0(2a-x_0)^2}{x_0^2(3a-x_0)}(x-x_0)$.

835. Las subtangentes son iguales a $x/3$; $2x/3$ y $-2x$, respectivamente; las subnormales son iguales a $-3x^5$; $-3x^2/2$ y $1/2x^2$, respectivamente.

836. $y=\frac{x_0}{2a}\left(x-\frac{x_0}{2}\right)$; $y-y_0-=\frac{2a}{x_0}(x-x_0)$. 837. $2x-y+1=0$.

838. $27x-3y-79=0$. 839. $2x-y-1=0$.

840. $4x-4y-21=0$. 842. 3,75. 844. $x+25y=0$; $x+y=0$.

845. (0, 1). 846. $y=x$. 848. $x-y-3e^{-2}=0$. 849. $2/\sqrt{5}$.

850. $(1+\sqrt{3/2};\ 1)$.

857. $2x-y\pm 1=0$.

858. Si $y=f(x)$ es la ecuación de la curva dada, la ecuación del lugar geométrico buscado es $y=xf'(x)$. a) La parábola $y^2=\frac{1}{2}px$; b) la recta paralela al eje Ox $y=\frac{1}{\ln b}$; c) la curva «kappa» $y\sqrt{a^2-x^2}+x^2=0$; d) la circunferencia $x^2+y^2=a$.

859. 1) $\varphi_1=0$, $\varphi_2=\operatorname{arctg}\frac{18}{31}$; 2) $\operatorname{arctg}\frac{8}{15}$. 862. 1) arctg 3, 2) 45°.

861. 90°. 862. 45° y 90°. 863. arctg 3. 864. $\operatorname{arctg}(2\sqrt{2})$.

865. Cuando n es impar la tangente es $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=2$, la normal es $ax-by=$ $=a^2-b^2$. Cuando n es par las tangentes son $\frac{x}{a}\pm\frac{y}{b}=2$, las normales son $ax\pm by=a^2-b^2$.

879. $\Delta y=1,461$; $dy=1,4$. 880. $\Delta y=0,1012$; $dy=0,1$; $\frac{dy}{\Delta y}=0,9880$.

881. 4. 882. -2. 883. $\Delta y=1,91$; $dy=1,9$; $\Delta y-dy=0,01$; $\frac{\Delta y-dy}{\Delta y}=$ $=0,0052$. 884. $\Delta y=0,1$; $dy=0,1025$; $\Delta y-dy=-0,0025$; $\frac{\Delta y-dy}{\Delta y}=-0,025$.

885.

$\Delta x=1$,	0,1,	0,01
$\Delta y=18$,	1,161,	0,110601,
$dy=11$,	1,1,	0,11
$\Delta y-dy=7$,	0,061,	0,000601,
$\delta=\frac{\Delta y-dy}{\Delta y}=0,39$,	0,0526,	0,0055.

886. $\Delta y\approx 1,3$; $dy\approx 1,1$; $\Delta y-dy\approx 0,2$; $\delta=\frac{\Delta y-dy}{\Delta y}\approx 0,15$.

887. a) $dy=16$, $\frac{\Delta y-dy}{\Delta y}\ \%=5,88\%$;

b) $dy=8$, $\frac{\Delta y-dy}{\Delta y}\ \%=3,03\%$;

c) $dy=1,6$, $\frac{\Delta y-dy}{\Delta y}\ \%=0,62\%$

888. a) $dy=4,8\ \text{cm}^2$; b) $dy=6,0\ \text{cm}^2$; c) $dy=9,6\ \text{cm}^2$.

889. 1) $\frac{0,125}{\sqrt{x}}\,dx$; 2) $\frac{5\,dx}{3\sqrt[3]{x^2}}$; 3) $-\frac{4\,dx}{x^3}$; 4) $-\frac{dx}{x^5}$; 5) $-\frac{dx}{4x\sqrt{x}}$;

6) $-\frac{dx}{3nx\sqrt[3]{x}}$; 7) $\frac{dx}{2(a+b)\sqrt{x}}$; 8) $-\frac{p\ln q}{q^x}\,dx$;

9) $-\frac{0,2\,(m-n)}{x^{1,2}}\,dx$; 10) $-\frac{(m+n)\,dx}{2x\sqrt{x}}$;

11) $\left[(2x+4)(x^2-\sqrt{x})+(x^2+4x+1)\left(2x-\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\right]dx$;

12) $-\frac{6x^2\,dx}{(x^3-1)^2}$; 13) $\frac{2t\,dt}{(1-t^2)^2}$; 14) $3(1+x-x^2)^2(1-2x)\,dx$;

15) $\frac{2\operatorname{tg}x}{\cos^2 x}\,dx$; 16) $5^{\ln\operatorname{tg}x}\frac{2\ln 5}{\operatorname{sen}2x}\,dx$; 17) $-2^{-\frac{1}{\cos x}}\ln 2\,\frac{\operatorname{sen}x}{\cos^2 x}\,dx$;

18) $-\frac{dx}{2\operatorname{sen}\frac{x}{2}}\,dx$; 19) $\frac{(x^2-1)\operatorname{sen}x+2x\cos x}{(1-x^2)^2}\,dx$;

20) $\left(\frac{1}{2\sqrt{\arcsen x}\sqrt{1-x^2}}+\frac{2\operatorname{arctg}x}{1+x^2}\right)dx$;

21) $\left(\frac{5}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{1}{1+x^2}\right)\frac{dx}{2}$;

22) $\left(3^{-\frac{1}{x^2}} \cdot \frac{2}{x^3} \cdot \ln 3 + 9x^2 - \frac{2}{\sqrt{x}}\right) dx.$

890. 1) $-0{,}0059$; 2) $-0{,}0075$; 3) $0{,}0086$; 4) 0; 5) $0{,}00287$. **891.** $\Delta y \approx$ ≈ 0.00025; $\operatorname{sen} 30°1' \approx 0{,}50025$. **892.** $0{,}00582$. **893.** $-0{,}0693$.

894. $d\rho = -\frac{k \operatorname{sen} 2\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}}\, d\varphi.$

895. 0,3466. **896.** $\operatorname{sen} 60°\,03' = 0{,}8665$; $\operatorname{sen} 60°\,18' = 0{,}8686$.
899. 0,995.

900. $\operatorname{arctg} 1{,}02 \approx 0{,}795$; $\operatorname{arctg} 0{,}97 \approx 0{,}770$. **901.** 0,355. **902.** 0,52164.

903. a) El cambio que sufre la longitud del hilo es: $2ds = \frac{8f}{3l}\, df$; b) el cambio operado en la flecha es: $df = \frac{3l}{4f}\, ds$.

904. El error producido al calcular el ángulo por su seno es: $\Delta x_s =$ $= \operatorname{tg} x \cdot \Delta y$; el error producido al calcular el ángulo por su tangente es: $\Delta x_T =$ $= \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2x \cdot \Delta z$ (donde Δy, Δz son los errores de las magnitudes y y z); $\frac{\Delta x_S}{\Delta x_T} =$ $= \frac{1}{\cos^2 x}$; la exactitud obtenida para el ángulo con ayuda del logaritmo de su tangente es mayor que la obtenida mediante el logaritmo de su seno.

905. 0,3%. **906.** 1) $dy = \frac{(2t^3 + 4t + 7)(3t^2 + 2)\, dt}{3\sqrt[3]{[(t^3 + 2t + 1)(t^3 + 2t + 6)]^2}}$;

2) $ds = -\frac{t}{2} \operatorname{sen} \frac{t^2 - 1}{2}\, dt$; 3) $dz = -ds$; 4) $dv = \frac{2 \ln 3}{3^{\frac{1}{\ln \operatorname{tg} s}} \ln^2 \operatorname{tg} s} \cdot \frac{ds}{\operatorname{sen} 2s}$;

5) $ds = \frac{(4u - 3)\, du}{2\sqrt{2u^2 - 3u + 1}}$; 6) $dy = -\frac{2\, ds}{\cos 2s}$.

908. Es continua y derivable.

909. La función $f(x)$ es continua por todas partes excepto los puntos $x = 0$ y $x = 2$; $f'(x)$ existe y es continua por todas partes excepto los puntos $x = 0$, 1, 2, donde no existe.

910. Para $x = k\pi$, donde k es cualquier entero.

911. Es continua, pero no es derivable.

912. $f'(0) = 0$.

913. Es continua, pero no es derivable.

914. Δy y Δx son las magnitudes de distinto orden infinitesimal.

915. Es continua, pero no es derivable. **916.** Sí; no. **917.** a. **918.** $a\omega e^{a\varphi}$.

919. La abscisa varía con la velocidad $v_x = -2r\omega \operatorname{sen} 2\varphi$; la ordenada varía con la velocidad $v_y = -2r\omega \cos 2\varphi$.

920. La velocidad de la variación de la abscisa es $v_x = v(1 + \cos\varphi)$; la velocidad de la variación de la ordenada es $v_y = v \operatorname{sen} \varphi$ (φ es el ángulo formado entre el eje de ordenadas y el radio polar del punto).

921. $-\frac{p \ln 2}{5540} \approx -0{,}000125p$.

922. $2\,\frac{\text{unidades}}{\text{s}}$ en el punto (3,6) y $-2\,\frac{\text{unidades}}{\text{s}}$ en el punto $(3, -6)$.

923. $2\,\frac{\text{cm}}{\text{s}}$ en el punto (3, 4) y $-2\,\frac{\text{cm}}{\text{s}}$ en el punto $(-3, 4)$.

924. En los puntos $(3, 16/3)$ y $(-3, -16/3)$.
925. $4v$ y $2av$. 926. $2\pi v$ y $2\pi rv$.

927. $4\pi r^2 v$ y $8\pi rv$. 928. Para $x = 2\pi k \pm \frac{\pi}{3}$ y para $x = 2\pi k \pm \frac{2\pi}{3}$.

929. Para $x = 2\pi k$. 930. En $1/n^2$ veces. 932. a) Sí; b) no.
934. 1) $x^2 - 18x + 9y = 0$; 2) $y^2 = 4x^2(1 - x^2)$; 3) $y^3 = (x - 1)^2$;
4) $x = \text{Arccos}(1-y) \mp \sqrt{2y - y^2}$; 5) $y = \frac{2(1+x-x^2)}{1+x^2}$.

935. 1) $t = (2k+1)\pi$; 2) $t = 1$; 3) $t = \pi/4 + \pi k$; 4) $t_1 = 1$, $t_2 = -1$.

936. $-\frac{b}{a}\operatorname{ctg}\varphi$. 937. $-\frac{b}{a}\operatorname{tg}\varphi$. 938. $\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}$. 939. $\frac{3t^2-1}{2t}$.

940. -1. 941. $\frac{t}{2}$.

942. $\frac{\cos\varphi - \varphi \operatorname{sen}\varphi}{1 - \operatorname{sen}\varphi - \varphi\cos\varphi}$. 943. $\frac{1+t^2}{t(2+3t-t^3)}$.

944. $\frac{1-\operatorname{tg} t}{1+\operatorname{tg} t}$. 945. $\frac{t(2-t^3)}{1-2t^3}$. 946. $-\frac{4}{3}$. 947. 0 y $\frac{1}{3}$.

948. No existe. 949. $\sqrt{3}/6$.
950. 1) $t = \pi/2 + \alpha$; 2) $t = \pi - \alpha$; 3) $t = \pi/6 + \alpha/3$, donde α es el ángulo formado entre la tangente y el eje Ox.

956. 1) Las curvas se cortan en dos puntos formándose los ángulos $\alpha_1 = \alpha_2 = \operatorname{arctg}\frac{41}{2} \approx 87°\,12'$; 2) las curvas se cortan en tres puntos formándose los ángulos $\alpha_1 = \alpha_2 = 30°$ y $\alpha_3 = 0°$.

958. La longitud de la tangente es $T = \left|\frac{y}{\operatorname{sen}\frac{3}{2}t}\right|$; la longitud de la normal es $N = \left|\frac{y}{\cos\frac{3}{2}t}\right|$; la longitud de la subtangente es $S_T = \left|y\operatorname{ctg}\frac{3}{2}t\right|$; la longitud de la subnormal es $S_N = \left|y\operatorname{tg}\frac{3}{2}t\right|$.

959. $\left|\frac{y}{\cos t}\right|$, $\left|\frac{y}{\operatorname{sen} t}\right|$, $|y\operatorname{tg} t|$ y $|y\operatorname{ctg} t|$.

961. $\left|\frac{y}{\operatorname{sen} t}\right|$, $\left|\frac{y}{\cos t}\right|$, $|y\operatorname{ctg} t|$ y $|y\operatorname{tg} t|$.

963. $x + 2y - 4 = 0$; $2x - y - 3 = 0$. 964. $4x + 2y - 3 = 0$; $2x - 4y + 1 = 0$.

965. $y = 2$, $x = 1$. 966. 1) $4x + 3y - 12a = 0$; $3x - 4y + 6a = 0$;
2) $x + y = \frac{\pi^2\sqrt{2}}{16}$; $y - x = \frac{\pi\sqrt{2}}{2}$; 3) $y = 1 + x\ln a$.

969. $p = 2a\cos t$. 970. $\theta = \varphi$, $\alpha = 2\varphi$.
974. 3; -3. 975. 1) 0; 2) 0; $\sqrt{3}$; $-\sqrt{3}$.

977. $\frac{f_1(t)\,f_2'(t)}{f_1'(t)} = \operatorname{tg}\theta$. 978. $\operatorname{arctg}\frac{2}{3}bt^2 = \operatorname{arctg}\frac{2}{3}\varphi$.

979. $\rho = \sqrt{a^2\cos^2 t + b^2\operatorname{sen}^2 t}$; $\varphi = \operatorname{arctg}\left(\frac{b}{a}\operatorname{tg} t\right)$, la tangente del ángulo formado entre la tangente y el radio polar es igual a $\frac{2ab}{(b^2-a^2)\operatorname{sen} 2t}$.

980. La subtangente polar es $S_T = \dfrac{\rho^2}{\dfrac{d\rho}{d\varphi}}$; la subnormal polar es $S_N = \dfrac{d\rho}{d\varphi}$. 983. $\dfrac{\rho}{\ln a}$. 984. $\rho \ln a$. 985. $\sqrt{1+a^2}$.

986. $\dfrac{r}{\sqrt{r^2-x^2}} = \dfrac{r}{y}$. 987. $\dfrac{\sqrt{b^4x^2+a^4y^2}}{b^2x}$.

988. $\sqrt{1+\dfrac{p}{2x}}\,dx$ ó $\dfrac{\sqrt{y^2+p^2}}{y}\,dx$. 989. $\sqrt{1+\dfrac{4}{9ax}}$.

990. $\sqrt{1+\cos^2 x}\,dx$. 991. $\dfrac{e^x+e^{-x}}{2} = y$. 992. r.

993. $2a \operatorname{sen}\dfrac{t}{2}$. 994. $3a \cos t \operatorname{sen} t\,dt$. 995. $a\sqrt{1+t^2}\,dt$.

996. $4a \operatorname{sen}\dfrac{t}{2}\,dt$. 997. $a \operatorname{ctg} t\,dt$. 998. at. 999. $a\sqrt{\operatorname{ch} 2t}\,dt$.

1000. $\dfrac{3}{2}$ m/min; el vector de la velocidad está dirigido verticalmente hacia abajo.

1001. $10\sqrt{26} \approx 51$ km/hora; el vector de la velocidad es paralelo a la hipotenusa del triángulo rectángulo un cateto del cual es horizontal e igual a 50 km, y el otro es vertical e igual a 10 km.

1002. 14,63 km/hora. 1003. 40 km/hora.

1004. $R_\omega\left(\operatorname{sen}\alpha + \dfrac{R \operatorname{sen} 2\alpha}{2\sqrt{l^2-R^2\operatorname{sen}^2\alpha}}\right)$. 1005. 9,43 m/s. 1006. 2.

1007. $-24x$. 1008. 207 360. 1009. 360. 1010. $6(5x^4+6x^2+1)$.

1011. $4 \operatorname{sen} 2x$. 1012. $\dfrac{4}{e}$. 1013. $-\dfrac{1}{2}$. 1014. $\dfrac{51}{(1-x)^6}$.

1015. $\dfrac{6}{x}$. 1016. $\dfrac{an(n+1)}{x^{n+2}}$. 1017. $16a \operatorname{sen} 2\varphi$.

1018. $\dfrac{2(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}}$. 1019. $2e^{x^2}(3x+2x^3)$. 1020. $\dfrac{6x(2x^3-1)}{(x^3+1)^3}$.

1021. $\dfrac{2x}{1+x^2} + 2 \operatorname{arctg} x$. 1022. $-\dfrac{a^2}{\sqrt{(a^2-x^2)^3}}$.

1023. $-\dfrac{x}{\sqrt{(1+x^2)^3}}$. 1024. $\dfrac{a+3\sqrt{x}}{4x\sqrt{x}(a+\sqrt{x})^3}$.

1025. $\dfrac{e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x}-1)}{4x\sqrt{x}}$. 1026. $\dfrac{\operatorname{arcsen} x + x\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$.

1027. $\dfrac{a(a^2-1)\operatorname{sen} x}{\sqrt{(1-a^2\operatorname{sen}^2 x)^3}}$. 1028. $x^x\left[(\ln x+1)^2+\dfrac{1}{x}\right]$.

1029. $a^n e^{ax}$. 1030. $(-1)^n e^{-x}$.

1031. $a^n \operatorname{sen}\left(ax+n\dfrac{\pi}{2}\right) + b^n \cos\left(bx+n\dfrac{\pi}{2}\right)$.

1032. $2^{n-1}\operatorname{sen}\left[2x+(n-1)\dfrac{\pi}{2}\right]$. 1033. $e^x(x+n)$.

1034. $(-1)^n \frac{(n-2)!}{x^{n-1}}$ $(n \geqslant 2)$. **1035.** $\frac{(-1)^n a^n n!}{(ax+b)^{n+1}}$.

1036. $\frac{(-1)^{n-1} a^n (n-1)!}{(ax+b)^n}$. **1037.** $(-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{x^n \ln a}$.

1038. $(-1)^n \frac{n!}{2} \left[\frac{1}{(x+1)^{n+1}} + \frac{1}{(x-1)^{n+1}} \right]$.

1039. $(-1)^n n! \left[\frac{1}{(x-2)^{n+1}} - \frac{1}{(x-1)^{n+1}} \right]$.

1040. $4^{n-1} \cos \left(4x + n \frac{\pi}{2}\right)$. **1054.** $\frac{d^2x}{dy^2} = -\frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left(\frac{dy}{dx}\right)^3}$.

1056. $-\frac{b^4}{a^2y_3}$. **1057.** $-\frac{3r^3x}{y^5}$. **1058.** $-\frac{2(3y^4+8y^2+5)}{y^8}$.

1059. $\frac{(3-s)e^{2s}}{(2-s)^3}$. **1060.** $-\frac{2a^3xy}{(y^2-ax)^3}$.

1061. $-\frac{y}{[1-\cos(x+y)]^3}$. **1062.** $-\frac{y[(x-1)^2+(y-1)^2]}{x^2(y-1)^3}$.

1063. $\frac{d^2x}{dy^2} = \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left(\frac{dy}{dx}\right)^3}$. **1064.** $\frac{1}{e^2}$. **1065.** $-\frac{p^2}{\sqrt{(y^2+p^2)^3}}$.

1069. $-\frac{2a}{9b^2t^4}$. **1070.** $-\frac{a^2}{y^3} = -\frac{1}{a \operatorname{sen}^3 t}$. **1071.** $-\frac{3b \cos t}{a^3 \operatorname{sen}^5 t}$.

1072. $-\frac{1}{a(1-\cos\varphi)^2}$. **1073.** 1) $\frac{\cos^2 t - 4 \operatorname{sen}^2 t}{9a^2 \cos^7 t \operatorname{sen}^3 t}$; 2) 0, porque $x+y=0$.

1074. 1) $4t^2$; 2) $-\frac{2}{1-t^2}$. **1075.** $\frac{2+t^2}{a(\cos t - t \operatorname{sen} t)^3}$. **1080.** 16 m/s^2.

1081. $v=2t-4$, $a=2$. **1082.** $-\pi^2/18$ cm/s^2. **1084.** $-0{,}0015$ m/s^2.

1085. $-1/8$ m/s^2. **1088.** 1) $(x^2-379) \operatorname{sen} x - 40x \cos x$;

2) $e^x \sum_{k=0}^{n} C_n^k \operatorname{sen}\left(x + k\frac{\pi}{2}\right)$; 3) $\alpha^n x^3 \operatorname{sen}\left(\alpha x + n\frac{\pi}{2}\right) + 3n\alpha^{n-1}x^2 \times$

$\times \operatorname{sen}\left[\alpha x + (n-1)\frac{\pi}{2}\right] + 3n(n-1)\alpha^{n-2}x \operatorname{sen}\left[\alpha x + (n-2)\frac{\pi}{2}\right] + n(n-1) \times$

$\times (n-2)\alpha^{n-3} \operatorname{sen}\left[\alpha x + (n-3)\frac{\pi}{2}\right]$.

1093. $y^{(2n)}(0) = 0$; $y^{(2n+1)}(0) = [1\cdot 3\cdot 5 \ldots (2n-1)]^2$.

1095. $y^{(2n-1)}(0) = 0$; $y^{(2n)}(0) = 2[2\cdot 4\cdot 6 \ldots (2n-2)]^2$.

1096. $-\frac{2dx^2}{9x\sqrt[3]{x}}$. **1097.** $m(m-1)(m-2)x^{m-3}dx^3$.

1098. $4(x+1)(5x^2-2x-1)dx^2$. **1099.** $4^{-x^2} \cdot 2 \cdot \ln 4 \cdot (2x^2 \ln 4 - 1)dx^2$.

1100. $\frac{ab(a^2-b^2) \operatorname{sen} 2x \, dx^2}{(a^2\cos^2 x + b^2 \operatorname{sen}^2 x)^2}$. **1101.** $\frac{4\ln x - 4 - \ln^3 x}{x^2\sqrt{(\ln^2 x - 4)^3}} dx^2$.

1102. $-4 \operatorname{sen} 2x\, dx^3$. **1103.** $\pm \frac{3a \sec^2 \varphi}{4\sqrt{\operatorname{tg} \varphi}}(1+5 \operatorname{tg}^2 \varphi)\, d\varphi^2$.

1104. $\frac{a^{\frac{2}{3}}\, dx^2}{3x^{\frac{3}{4}} y^{\frac{1}{2}}}$. **1105.** 1) $d^2y = \frac{4x}{x^4-1} d^2x - \frac{4(1+3x^4)}{(x^4-1)^2} dx^2$;
2) $d^2y = -4 \sec^2 2t\, dt^2$.
1106. 1) $d^2y = \cos z d^2z - \operatorname{sen} z\, dz^2$;
2) $d^2y = a^x \cos(a^x) \ln a\, d^2x - a^x \ln^2 a\, (a^x \operatorname{sen} a^x - \cos a^x)\, dx^2$;
3) $d^2y = a^{t^3} \ln a\, [\cos a^{t^3} (6t + 9t^4 \ln a) - a^{t^3} \operatorname{sen} a^{t^3} 9t^4 \ln a]\, dt^2$.

Al capítulo IV

1110. 1) Es el punto del máximo; 2) decrece; 3) crece; 4) es el punto del mínimo; 5) es el punto del máximo; 6) es el punto del mínimo; 7) es el punto del mínimo; 8) es el punto del máximo; 9) es el punto del mínimo.
1112. En el punto $x_1 = 0$ crece, en el punto $x_2 = 1$ decrece, en el punto $x_3 = -\pi/2$ crece y en el punto $x_4 = 2$ decrece.
1113. En el punto $x_1 = 1/2$ decrece, crece en los puntos $x_2 = 2$ y $x_3 = e$; el punto del mínimo es $x_4 = 1$.
1114. Crece en el punto $x_1 = 1$, decrece en el punto $x_2 = -1$; el punto del mínimo es $x_3 = 0$.
1115. Decrece en el punto $x_1 = 1/2$, crece en el punto $x_2 = 1/2$; el punto del máximo es $x_3 = 0$.
1125. Tres raíces pertenecientes a los intervalos (1, 2), (2, 3) y (3, 4), respectivamente.
1127. $\operatorname{sen} 3x_2 - \operatorname{sen} 3x_1 = 3(x_2 - x_1) \cos 3\xi$, donde $x_1 < \xi < x_2$.
1128. $a(1 - \ln a) - b(1 - \ln b) = (b - a) \ln \xi$, donde $a < \xi < b$.
1129. $\operatorname{arcsen}[2(x_0+\Delta x)] - \operatorname{arcsen} 2x_0 = \frac{2\Delta x}{\sqrt{1-4\xi^2}}$, donde $x_0 < \xi < x_0 + \Delta x$.
1135. Para $x \to 0$ ξ tiende a cero tomando no todos los valores intermedios sino tal sucesión de éstos para la cual $\cos \frac{1}{\xi}$ tiende a cero.
1136. 0,833. **1137.** 0,57. **1138.** 1,0414. **1139.** 0,1990. **1140.** 0,8449.
1141. 1,7853.
1149*. La desigualdad necesaria es debida al crecimiento de la función $y = \frac{\operatorname{tg} x}{x}$ en el intervalo $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.
1150. $(-\infty, -1)$ crece, $(-1, 3)$ decrece, $(3, \infty)$ crece.
1151. $(-\infty, -1)$ decrece, $(-1, 0)$ crece, $(0, 1)$ decrece, $(1, \infty)$ crece.
1152. $(-\infty, -1/2)$ crece, $(-1/2, 11/18)$ decrece, $(11/18, \infty)$ crece.
1153. $\left(-\infty, \frac{2}{3}a\right)$ crece, $\left(\frac{2}{3}a, a\right)$ decrece, (a, ∞) crece.
1154. $(-\infty, -1)$ crece, $(-1, 1)$ decrece, $(1, \infty)$ crece.
1155. $(-\infty, 0)$ decrece, $(0, 1/2)$ decrece, $(1/2, 1)$ crece, $(1, \infty)$ decrece.
1156. $(-\infty, 0)$ crece, $(0, \infty)$ decrece.
1157. $(-\infty, 0)$ decrece, $(0, 2)$ crece, $(2, \infty)$ decrece.
1158. $(0, 1)$ decrece, $(1, e)$ decrece, (e, ∞) crece.
1159. $(0, 1/2)$ decrece, $(1/2, \infty)$ crece.
1160. $(0, \pi/3)$ decrece, $(\pi/3, 5\pi/3)$ crece, $(5\pi/3, 2\pi)$ decrece.
1161. $(0, \pi/6)$ crece, $(\pi/6, \pi/2)$ decrece, $(\pi/2, 5\pi/6)$ crece, $(5\pi/6, 3\pi/2)$ decrece, $(3\pi/2, 2\pi)$ crece.

1162. Crece de manera monótona. **1163.** Crece de manera monótona.

1164. $\left(0, \frac{3}{4}a\right)$ crece; $\left(\frac{3}{4}a, a\right)$ decrece.

1165. $y_{\text{máx}} = 0$ para $x = 0$, $y_{\text{mín}} = -1$ para $x = 1$.

1166. $y_{\text{máx}} = 17$ para $x = -1$, $y_{\text{mín}} = -47$ para $x = 3$.

1167. $y_{\text{máx}} = 4$ para $x = 0$, $y_{\text{mín}} = 8/3$ para $x = -2$.

1168. $y_{\text{máx}} = 2$ para $x = 0$, $y_{\text{mín}} = \sqrt[3]{4}$ para $x = 2$.

1169. $y_{\text{máx}} = \frac{31}{\ln 3}$ para $x = -3$. **1170.** $y_{\text{máx}} = 0$ para $x = 0$.

1171. $y_{\text{máx}} = 0$ para $x = 0$, $y_{\text{mín}} = -2/3$ para $x = 1$.

1172. $y_{\text{mín}} = 2$ para $x = 2/3$. **1173.** $y_{\text{máx}} = \sqrt{205}/10$ para $x = 12/5$.

1174. $y_{\text{máx}} = \sqrt[3]{a^4}$ para $x = 0$, $y_{\text{mín}} = 0$ para $x = \pm a$.

1175. $y_{\text{mín}} = 0$ para $x = 0$. **1176.** Crece de manera monótona.

1177. $y_{\text{máx}} = \frac{81}{8}\sqrt[3]{18}$ para $x = \frac{1}{2}$, $y_{\text{mín}} = 0$ para $x = -1$ y para $x = 5$.

1178. $y_{\text{máx}} = 2{,}5$ para $x = 1$, $y_{\text{mín}} = \frac{e(4-e)}{2} \approx 1{,}76$ para $x = e$.

1179. $y_{\text{máx}} = 1/2$ para $x = 0$, $y_{\text{mín}} = \pi/8$ para $x = 1$.

1180. $y_{\text{máx}} = 0$ para $x = 0$, $y_{\text{mín}} = \frac{3\sqrt{3} - 2\pi}{48}$ para $x = \frac{1}{2}$.

1181. $y_{\text{máx}} = \frac{6\pi\sqrt{3} - \pi^2 + 18}{36} \approx 1{,}13$ para $x = \pm\frac{\pi}{3}$, $y_{\text{mín}} = 1$ para $x = 0$.

1182. $y_{\text{máx}} = \operatorname{sen}\frac{1}{2} + \frac{1}{16}$ para $x = \frac{1}{2}$,

$$y_{\text{mín}} = \frac{36\sqrt{3} - 12\pi\sqrt{3} + 72 - \pi^2 + 6\pi}{144} \text{ para } x = \frac{\pi}{6}.$$

1183. $y_{\text{máx}} = 1/\pi$ para $x = 1$, $y_{\text{mín}} = -1/\pi$ para $x = 3$.

1184. Si $ab \leqslant 0$, no existen valores extremos. Si $ab > 0$ y $a > 0$, se tiene $y_{\text{mín}} = 2\sqrt{ab}$ para $x = \frac{1}{2p}\ln\frac{b}{a}$; si $ab > 0$ y $a < 0$, se tiene $y_{\text{máx}} = -2\sqrt{ab}$ para $x = \frac{1}{2p} = \frac{1}{2p}\ln\frac{b}{a}$.

1185. 13 y 4. **1186.** 8 y 0. **1187.** 2 y -10. **1188.** 2 y -12. **1189.** 10 y 6.
1190. 1 y 3/5. **1191.** 3/5 y -1.
1192. El valor mínimo es igual a $(a + b)^2$, el valor máximo no existe.
1193. $\pi/2$ y $-\pi/2$.
1194. El valor máximo es igual a 1, el valor mínimo no existe.

1195. El valor mínimo es igual a $\left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}}$, el valor máximo no existe.

1196. $\sqrt[3]{9}$ y 0. **1197.** $\frac{\pi}{4}$ y 0. **1208.** 4 y 4. **1209.** 1. **1210.** 6 y 6.

1211. 3, 6 y 4 cm. **1212.** 3 cm. **1213.** 1 cm. **1214.** $\sqrt{4v}$.

1215. El radio de la base es igual a la altura, igual a $\sqrt[3]{\frac{v}{\pi}}$.

1216. $H=2R$. 1217. $\frac{20\sqrt{3}}{3}$ cm. 1218. $2\pi\sqrt{\frac{2}{3}}\approx 293°56'$.

1219. El lado es igual a $3p/4$, la base es igual a $p/2$. 1220. El lado es igual a $3p/5$, la base es igual a $4p/5$.

1221. $\frac{2R\sqrt{3}}{3}$. 1222. $\frac{4}{3}R$. 1223. $\frac{2m_0}{3k}$, $\frac{2}{27}\frac{m_0^3g^2}{k^2}$. 1224. $\sqrt{\frac{2aP}{k}}$.

1225. 20 km/hora, 720 rublos. 1226. Al cabo de $1\frac{27}{43}$ hora ≈ 1 hora 38 minutos.

1227. La distancia que medie entre la cuerda y el punto A debe ser igual a 3/4 del diamétro de la circunferencia.

1228. $\frac{4R\sqrt{5}}{5}$ y $\frac{R\sqrt{5}}{5}$.

1229. La altura del rectángulo es igual a $\frac{\sqrt{8R^2+h^2}-3h}{4}$, donde h es la distancia desde el centro de la cuerda que subtiende el arco del segmento, R es el radio del círculo.

1230. El radio de la base del cono debe ser 1,5 veces mayor que el del cilindro.

1231. $4R$. 1232. $\approx 49°$. 1233. $60°$. 1234. $R\sqrt{3}$. 1235. $\frac{4}{3}R$.

1237. $\frac{x}{3}+\frac{y}{6}=1$. 1238. $a\sqrt{2}$ y $b\sqrt{2}$.

1239. El área del rectángulo es igual a $\frac{2}{\pi}\times$ el área de la elipse.

1240. Por el punto (2, 3). 1241. $C(-\sqrt{6}, -\sqrt{6})$.

1242. $x=a-p$, si $a>p$; $x=0$, si $a\leqslant p$.

1243. La sección del canalón ha de tener la forma de semicírculo.

1244. La longitud de la viga es de $13\frac{1}{3}$ m, el lado de la sección transversal es de $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ m.

1245. El valor buscado es igual a la media aritmética de los resultados de los cálculos:

$$x=\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}.$$

1246. Que dista 3 km del campamento. 1247. A la altura $R\sqrt{2}/2$.

1248. La distancia que media entre el punto buscado y el manantial de luz de intensidad luminosa I_1, es igual a $\frac{l\sqrt[3]{I_1}}{\sqrt[3]{I_1}+\sqrt[3]{I_2}}$, en otras palabras, la distancia l se divide por el punto buscado a razón de $\sqrt[3]{I_1}:\sqrt[3]{I_2}$.
1249. 2,4 m.

1250. $F_{\min}=\frac{kP}{\sqrt{1+k^2}}$ para $\varphi=\operatorname{arctg} k$.

1251. $\approx 4,5$.

1252. $2b+\sqrt{\frac{Sb}{a}}$ y $2a+\sqrt{\frac{Sa}{b}}$.

1253*. $\frac{RHL}{(L-R)(L+2R)}$, donde L es la generatriz del cono. Tomar en consideración que la diferencia entre la distancia que media entre el centro de la esfera y el vértice del cono, y el radio de la esfera es igual a la diferencia entre la altura del cono y la altura de la parte sumergida del segmento.

1254. $R/4$. **1255.** $R/2$. **1256.** $P\ (p,\ \pm p\sqrt{2})$.

1263*. $\frac{3}{4}$. Como la función es constante ($y' = 0$), su valor es igual al valor de la función dada para cualquier valor de x, por ejemplo, para $x = 0$.

1264. π. **1265.** 0. **1267.** $y_{\text{máx}} = \frac{4}{27}a^3$ para $x = \frac{a}{3}$, $y_{\text{mín}} = 0$ para $x = a$.

1268. $y_{\text{máx}} = \frac{a^4}{16}$ para $x = \frac{a}{2}$, $y_{\text{mín}} = 0$ para $x = 0$ y para $x = a$.

1269. $y_{\text{máx}} = -2a$ para $x = -a$, $y_{\text{mín}} = 2a$ para $x = a$.

1270. $y_{\text{máx}} = 5/4$ para $x = 3/4$.

1271. $y_{\text{máx}} = 1$ para $x = 1$, $y_{\text{mín}} = -1$ para $x = -1$.

1272. $y_{\text{mín}} = 1$ para $x = 0$.

1273. $y_{\text{máx}} = 4/e^2$ para $x = 2$, $y_{\text{mín}} = 0$ para $x = 0$.

1274. $y_{\text{mín}} = e$ para $x = e$. **1275.** $y_{\text{máx}} = \sqrt[e]{e}$ para $x = e$.

1276. Para $a = 2$ es máximo. **1277.** $a = -2/3$, $b = -1/6$.

1278. Es convexa en el entorno del punto (1, 11), cóncava en el entorno del punto (3, 3).

1279. Es convexa en el entorno del punto $(1, \pi/4)$, cóncava en el entorno del punto $(-1, -\pi/4)$.

1280. Es convexa en el entorno del punto $(1/e^2, -2/e^4)$, cóncava en el entorno del punto (1, 0).

1287. El punto de inflexión es (5/3, −250/27). Los intervalos son: de la convexidad $(-\infty, 5/3)$, de la concavidad $(5/3, \infty)$.

1288. No tiene puntos de inflexión, la gráfica es cóncava.

1289. Los puntos de inflexión son (2, 62) y (4, 206). Los intervalos son: de la concavidad $(-\infty, 2)$, de la convexidad (2, 4), de la concavidad $(4, \infty)$.

1290. Los puntos de inflexión son (−3, 294) y (2, 114). Los intervalos son: de la convexidad $(-\infty, -3)$, de la concavidad (−3, 2), de la convexidad $(2, \infty)$.

1291. El punto de inflexión es (1, −1). Los intervalos son: de la convexidad $(-\infty, 1)$, de la concavidad $(1, \infty)$.

1292. No tiene puntos de inflexión, la gráfica es cóncava.

1293. Los puntos de inflexión son $(-3a, -9a/4)$, $(0, 0)$, $(3a, 9a/4)$. Los intervalos son: de la concavidad $(-\infty, -3a)$, de la convexidad $(-3a, 0)$, de la concavidad $(0, 3a)$, de la convexidad $(3a, \infty)$.

1294. El punto de inflexión es (b, a). Los intervalos son: de la convexidad $(-\infty, b)$, de la concavidad (b, ∞).

1295. El punto de inflexión $\left(\operatorname{arcsen}\frac{\sqrt{5}-1}{2},\ e^{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}\right)$. Los intervalos son: de la concavidad $\left(-\frac{\pi}{2},\ \operatorname{arcsen}\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$, de la convexidad $\left(\operatorname{arcsen}\frac{\sqrt{5}-1}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$.

1296. Los puntos de inflexión $(\pm 1, \ln 2)$. Los intervalos son: de la convexidad $(-\infty, -1)$, de la concavidad $(-1, 1)$, de la convexidad $(1, \infty)$.

1297. El punto de inflexión es $\left(ae^{\frac{3}{2}},\ \frac{3}{2}e^{-\frac{3}{2}}\right)$. Los intervalos son: de la convexidad $(0,\ ae^{\frac{3}{2}})$, de la concavidad $(ae^{\frac{3}{2}},\ \infty)$. **1298.** No tiene puntos de inflexión. La gráfica es cóncava.

1299. El punto de inflexión $\left(\frac{1}{2},\ e^{\operatorname{arctg}\frac{1}{2}}\right)$. El intervalo de la concavidad es $\left(-\infty,\ \frac{1}{2}\right)$, el de la convexidad es $\left(\frac{1}{2},\ \infty\right)$.

1300. El punto de inflexión es $(1,\ -7)$. Los intervalos son: de la convexidad $(0,\ 1)$, de la concavidad $(1,\ \infty)$.

1305. $a=-3/2$, $b=9/2$. **1306.** $\alpha=-20/3$, $\beta=4/3$. Los puntos $(-2;\ -2{,}5)$ y $(0,\ 0)$ también son puntos de inflexión.

1307. Para $a\leqslant -e/6$ y para $a>0$.

1316. Los puntos de inflexión son $(1,\ 4)$ y $(1,\ -4)$.

1317. Para $t=3\pi/4$ los puntos de inflexión son $\pm k\pi$ $(k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$.

1318. $\dfrac{\operatorname{sen} b-\operatorname{sen} a}{\ln\frac{b}{a}}=\xi\cos\xi$, donde $a<\xi<b$.

1319. $e^b-e^a=2e^{\xi}$, donde $a<\xi<b$.

1324. $\dfrac{2}{3\sqrt[6]{a}}$. **1325.** 0. **1326.** 1. **1327.** $\dfrac{\alpha}{\beta}$. **1328.** $\dfrac{1}{3}$. **1329.** $\dfrac{a}{\sqrt{b}}$.

1330. $-\dfrac{1}{2}$. **1331.** 2. **1332.** $\dfrac{m}{n}a^{m-n}$. **1333.** $\dfrac{\ln\frac{a}{b}}{\ln\frac{c}{d}}$. **1334.** -2. **1335.** 2.

1336. $\ln\dfrac{a}{b}$. **1337.** $\cos a$. **1338.** 2. **1339.** 1. **1340.** 1. **1341.** $\dfrac{1}{128}$. **1342.** 16.

1343. 1. **1344.** 1. **1345.** -2. **1346.** 0. **1347.** 0. **1348.** a. **1349.** $\dfrac{1}{2}$.

1350. $\dfrac{4a^2}{\pi}$. **1351.** -1. **1352.** 0.

1353. ∞. **1354.** $\dfrac{a+b+c}{3}$. **1355.** 1.

1356. ∞. **1357.** 1. **1358.** 1. **1359.** e. **1360.** 1. **1361.** e^2. **1362.** e^{π}. **1363.** 1.

1364. 1/2. **1366.** Los valores de x^x son mayores que los de $a^x x^a$.

1367. Los valores de $f(x)$ son mayores que los de $\ln f(x)$.

1374. $f(115)\approx 1\,520\,990$; $f(120)\approx 1\,728\,120$; $\delta_{x=100}\approx 0{,}03$ (error absoluto).

1375. $y=\pm\dfrac{b}{a}x$. **1376.** $x=0$, $y=0$. **1377.** $y=0$. **1378.** $x=b$, $y=c$.

1379. $x=-1$, $y=\dfrac{1}{2}x-1$. **1380.** $x+y=0$. **1381.** $y=x+2$.

1382. $y=\pm x$. **1383.** $x=0$, $y=0$; $x+y=0$.

1384. $x=b$; $x=2b$; $y=x+3(b-a)$.

1385. $y+1=0$; $2x+y+1=0$. **1386.** $x=-1/e$, $y=x+1/e$.

1387. $x=0$, $y=x$. **1388.** $x=0$, $y=x+3$. **1389.** $y=\dfrac{\pi}{2}x-1$.

1390. $y=2x\pm\pi/2$.

1391. $y = x$; si $f(x)$ no es constante idéntica.

1392. Si $\lim\limits_{t\to t_0} \varphi(t) = \infty$ y $\lim\limits_{t\to t_0} \psi(t) = b$, $y = b$ es asíntota; si $\lim\limits_{t\to t_0} \psi(t) = \infty$ y $\lim\limits_{t\to t_0} \varphi(t) = a$, entonces $x = a$ es asíntota.

1393. $x = -1$, $y = 0$. **1394.** $y = \frac{1}{2}x + c$. **1395.** $y = \pm\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$.

1396. $x + y + a = 0$. **1397.** $x = 2$; $2x + 8y + 1 = 0$; $6x - 40y + 9 = 0$.

1398. Está definida por todas partes. La gráfica es simétrica respecto al origen. $y_{\text{máx}} = 1/2$ para $x = 1$, $y_{\text{mín}} = -1/2$ para $x = -1$. Los puntos de inflexión de la gráfica son $(-\sqrt{3}, -\sqrt{3}/4)$, $(0, 0)$ y $(\sqrt{3}, \sqrt{3}/4)$. La asíntota es $y = 0$.

1399. Está definida por todas partes, excepto los valores $x = \pm 1$. La gráfica es simétrica respecto al eje de ordenadas. No tiene máximos. $y_{\text{mín}} = 1$ para $x = 0$. No tiene puntos de inflexión. Las asíntotas son $x = \pm 1$, $y = 0$.

1400. Está definida por todas partes, excepto los valores $x = \pm 1$. La gráfica es simétrica respecto al origen. No tiene extremos. El punto de inflexión es $(0, 0)$. Las asíntotas son $x = -1$, $x = 1$, $y = 0$.

1401. Está definida por todas partes, excepto los valores $x = 1$, $x = 2$ $x = 3$. $y_{\text{máx}} \approx -2{,}60$ para $x \approx 2{,}58$, $y_{\text{mín}} \approx 2{,}60$ para $x \approx 1{,}42$. No tiene puntos de inflexión. Las asíntotas son $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$, $y = 0$.

1402. No está definida cuando $x = \pm 1$. La gráfica es simétrica respecto al eje de ordenadas. $y_{\text{máx}} = 0$ para $x = 0$. No tiene mínimos. Cuando $x < -1$ crece; cuando $x > 1$, decrece. La gráfica no tiene puntos de inflexión. Las asíntotas son $x = \pm 1$, $y = 1$.

1403. Está definida por todas partes, la gráfica es simétrica respecto al eje de ordenadas. $y_{\text{mín}} = -1$ para $x = 0$; $(1, 0)$ y $(-1, 0)$ son puntos de inflexión de la gráfica con la tangente horizontal; los puntos de inflexión son $(\pm\sqrt{5}/5, -64/125)$. No tiene asíntotas.

1404. Está definida por todas partes; la gráfica es simétrica respecto al eje de ordenadas. $y_{\text{máx}} = 0$ para $x = 0$, $y_{\text{mín}} = -27/8$ para $x = \pm 1/2$. Los puntos de inflexión de la gráfica con la tangente horizontal son $(\pm 1, 0)$. Cuando $x \approx \pm 0{,}7$ y $x \approx \pm 0{,}26$ también existen otros cuatro puntos de inflexión de la gráfica. No tiene asíntotas.

1405. Está definida por todas partes, excepto $x = 0$. $y_{\text{mín}} = 3$ para $x = 1/2$. No tiene máximos. El punto de inflexión de la gráfica es $(-\sqrt[3]{2}/2, 0)$. La asíntota es $x = 0$.

1406. Está definida por todas partes, excepto $x = 0$. La gráfica es simétrica respecto al eje de ordenadas. $y_{\text{mín}} = 2$ para $x = \pm 1$. No tiene máximos. La gráfica no tiene puntos de inflexión. La asíntota es $x = 0$.

1407. Está definida por todas partes, excepto $x = 1$. $y_{\text{mín}} = -1$ para $x = 0$. No tiene máximos. El punto de inflexión de la gráfica es $(-1/2, -8/9)$. Las asíntotas son $x = 1$ e $y = 0$.

1408. Está definida por todas partes, excepto $x = \pm\sqrt{3}$. La gráfica es simétrica respecto al origen de coordenadas. $y_{\text{máx}} = -4{,}5$ para $x = 3$, $y_{\text{mín}} = 4{,}5$ para $x = -3$. El punto de inflexión de la gráfica es $(0, 0)$. Las asíntotas son $x = \pm\sqrt{3}$ y $x + y = 0$.

1409. Está definida por todas partes, excepto $x = -1$. No tiene mínimos. $y_{\text{máx}} = -3\,\frac{3}{8}$ para $x = -3$. El punto de inflexión de la gráfica es $(0, 0)$. Las asíntotas son $x = -1$ e $y = \frac{1}{2}x - 1$.

1410. Está definida por todas partes, excepto $x = 1$. No tiene máximos. $y_{\text{mín}} = 27/4$ para $x = 3/2$. El punto de inflexión de la gráfica es $(0, 0)$. La asíntota es $x = 1$.

1411. Está definida por todas partes, excepto $x=1$. $y_{\text{máx}}=0$ para $x=0$, $y_{\text{mín}}=\frac{4}{3}\sqrt[3]{4}$ para $x=\sqrt[3]{4}$. El punto de inflexión de la gráfica es $\left(-\sqrt[3]{2},\ -\frac{2}{3}\sqrt[3]{2}\right)$. La asintotas son $x=1$ e $y=x$.

1412. Está definida por todas partes, excepto $x = -1$. $y_{\text{máx}} = 2/27$ para $x = 5$, $y_{\text{mín}} = 0$ para $x = 1$. Las abscisas de los puntos de inflexión de la gráfica son $5 \pm 2\sqrt{3}$. Las asíntotas son $x = -1$ e $y = 0$.

1413. Está definida por todas partes, excepto $x = 0$. $y_{\text{máx}} = 7/2$ para $x = 1$, $y_{\text{máx}} = -11/6$ para $x = -3$, $y_{\text{mín}} = 27/8$ para $x = 2$. La abscisa del punto de inflexión de la gráfica es $9/7$. Las asíntotas son $x = 0$ e $y = \frac{1}{2}x + 1$.

1414. Está definida por todas partes, excepto $x = 0$. No tiene máximos. $y_{\text{mín}} \approx -0,28$ para $x \approx 1,46$. La abscisa del punto de inflexión de la gráfica es $-\sqrt[3]{2}$. La asíntota es $x = 0$.

1415. Está definida por todas partes, excepto $x = 0$. $y_{\text{máx}} = -2,5$ para $x = -2$; no tiene mínimos. La gráfica no tiene puntos de inflexión. Las asíntotas son $x = 0$ e $y = x$.

1416. Está definida por todas partes. $y_{\text{máx}} = 1/e$ para $x = 1$. No tiene mínimos. El punto de inflexión de la gráfica es $\left(2, \frac{2}{e^2}\right)$. La asíntota es $y = 0$.

1417. Está definida por todas partes. $y_{\text{máx}} = 4/e^2$ para $x = 2$, $y_{\text{mín}} = 0$ para $x = 0$. Las absicas de los puntos de inflexión de la gráfica son $2 \pm \sqrt{2}$. La asíntota es $y = 0$.

1418. Está definida por todas partes, excepto $x = 0$, $y_{\text{mín}} = e$ para $x = 1$. No tiene máximos. La gráfica no tiene puntos de inflexión. Las asíntotas son $x = 0$, $y = 0$.

1419. Está definida para $x > -1$. $y_{\text{mín}} = 0$ para $x = 0$. No tiene máximos. La gráfica no tiene puntos de inflexión. La asíntota es $x = -1$.

1420. Está definida por todas partes. La gráfica es simétrica respecto al eje de ordenadas. $y_{\text{mín}} = 0$ para $x = 0$. No tiene máximos. Los puntos de inflexión de la gráfica son $(\pm 1, \ln 2)$. No tiene asíntotas.

1421. Está definida por todas partes. La gráfica es simétrica respecto al eje de ordenadas. $y_{\text{máx}}=\frac{1}{e}$ para $x=\pm 1$, $y_{\text{mín}}=0$ para $x=0$. Las abscisas de los puntos de inflexión de la gráfica son $\pm\frac{\sqrt{5\pm\sqrt{17}}}{2}$. La asíntota es $y=0$.

1422. Está definida por todas partes. $y_{\text{máx}} = 27/e^3$ para $x = 3$. No tiene mínimos. Las abscisas de los puntos de inflexión son 0 y $3 \pm \sqrt{3}$. La asíntota es $y = 0$.

1423. Está definida por todas partes. La gráfica es simétrica respecto al origen la coordenadas $y_{\text{máx}}=\frac{1}{\sqrt{e}}$ para $x=1$, $y_{\text{mín}}=-\frac{1}{\sqrt{e}}$ para $x=-1$.

Los puntos de inflexión de la grafica son $(0, 0)$, $(\sqrt{3}, \sqrt{2}e^{-\frac{3}{2}})$ y $-(\sqrt{3}, -\sqrt{3}e^{-\frac{3}{2}})$. La asíntota es $y=0$.

1424. Está definida por todas partes, excepto $x=0$. No tiene extremos. La gráfica no tiene puntos de inflexión. Las asíntotas son $x=0$, $y=0$ e $y=-1$.

1425. Esta definida para $x>0$. No tiene extremos. El punto de inflexión de la gráfica es $\left(e^{\frac{3}{2}}, e^{\frac{3}{2}}+\frac{3}{2}e^{-\frac{3}{2}}\right)$. La asíntotas son $x=0$ e $y=x$.

1426. La función está definida cuando $-\infty<x<-1$ y cuando $0<x<\infty$. En el intervalo $(-\infty, -1)$ crece desde e hasta ∞; en el intervalo $(0, +\infty)$ crece desde 1 hasta e. La gráfica consta de dos ramas separadas. Las asíntotas son $y=e$ y $x=-1$.

1427. Está definida por todas partes. No tiene extremos. Cuando $x=\pm k\pi$ $(k=1, 3, 5, \ldots)$ es estacionaria. La gráfica es simértica respecto al origen de coordenadas, no tiene asíntotas; los puntos de inflexión son $(k\pi, k\pi)$ $(k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$; en los puntos de inflexión la gráfica cruza la recta $y=x$.

1428. Está definida por todas partes. La gráfica es simétrica respecto al eje de ordenadas. Los puntos extremos satisfacen la ecuación $\operatorname{tg} x=-x$. Las abscisas de los puntos de inflexión satisfacen la ecuación $x \operatorname{tg} x=2$. No tiene asíntotas.

1429. Está definida en los intervalos $(-\pi/2+2k\pi, \pi/2+2k\pi)$, donde $k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ El período es 2π. La gráfica es simétrica respecto al eje de ordenadas. $y_{\text{máx}}=0$ para $x=2k\pi$. La gráfica no tiene puntos de inflexión. Las asíntotas son $x=\pi/2+k\pi$.

1430. Está definida en los intervalos $(-\pi/2+2k\pi, \pi/2+2k\pi)$, donde $k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ El período es 2π. La gráfica es simétrica respecto al eje de ordenadas. $y_{\text{mín}}=1$ para $x=2k\pi$. La gráfica no tiene puntos de inflexión. Las asíntotas son $x=\pi/2+k\pi$.

1431. Está definida por todas partes. La gráfica es simétrica respecto al origen de coordenadas. $y_{\text{máx}}=\pi/2-1$ para $x=-1$, $y_{\text{mín}}=1-\pi/2$ para $x=1$. El punto de inflexión es $(0, 0)$. Las asíntotas son $y=x\pm\pi$.

1432. Está definida por todas partes, excepto $x=1$ y $x=3$. $y_{\text{máx}}=1/e$ para $x=2$. No tiene mínimos. Las asíntotas son $x=1$, $x=3$ e $y=1$.

1433. Está definida por todas partes. El período es 2π. $y_{\text{mín}}=1$ para $x=k\pi$, donde $k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$; $y_{\text{máx}}=e-1$ para $x=\pi/2+2k\pi$ e $y_{\text{máx}}=1+1/e$ para $x=3\pi/2+2k\pi$. No tiene asíntotas.

1434. Está definida por todas partes. $y_{\text{máx}}=4/27$ para $x=8/27$, $y_{\text{mín}}=0$ para $x=0$. La gráfica no tiene puntos de inflexión, ni asíntotas.

1435. Está definida por todas partes. La gráfica es simétrica respecto al eje de ordenadas. $y_{\text{máx}}=0$ para $x=0$, $y_{\text{mín}}=-3$ para $x=\pm 1$. La gráfica no tiene puntos de inflexión, ni asíntotas.

1436. Está definida por todas partes. La gráfica es simétrica respecto al origen de coordenadas. $y_{\text{máx}}=2/3$ para $x=1$, $y_{\text{mín}}=-2/3$ para $x=-1$. El punto de inflexión de la gráfica es $(0, 0)$. No tiene asíntotas.

1437. Está definida por todas partes. $y_{\text{máx}}=2$ para $x=0$, $y_{\text{mín}}=0$ para $x=-1$. El punto de inflexión de la gráfica es $(-1/2, 1)$. La asíntota es $y=1$.

1438. Está definida por todas partes. $y_{\text{máx}}\approx 2{,}2$ para $x=7/11$, $y_{\text{mín}}=0$ para $x=1$. Las abscisas de los puntos de inflexión de la gráfica son -1 y $\frac{7\pm 3\sqrt{3}}{11}$. No tiene asíntotas.

1439. Está definida por todas partes. $y_{\text{máx}} = 2\sqrt[3]{4}$ para $x = 4$, $y_{\text{mín}} = 0$ para $x = 0$. El punto de inflexión de la gráfica es $(6, 0)$. La asíntota es $x + y = 2$.

1440. La función está definida cuando $x \geqslant 0$, es bivalente. La función $y = x + \sqrt{x^5}$ (rama superior de la gráfica) crece de manera monótona. La función $y = x - \sqrt{x^5}$ (rama inferior de la gráfica) tiene máximo para $x = \sqrt{20}/5$. La gráfica no tiene puntos de inflexión, ni asíntotas.

1441. Está definida para $x \geqslant 0$, es bivalente. La función $y = x^2 + \sqrt{x^5}$ (rama superior de la gráfica) crece de manera monótona. La función $y = x^2 - \sqrt{x^5}$ (rama inferior de la gráfica) tiene máximo cuando $x = 16/25$. La abscisa del punto de inflexión de la rama inferior de la gráfica es $64/225$. No tiene asíntotas.

1442. Está definida para $x \geqslant -1$, es bivalente. No tiene extremos. La gráfica es simétrica respecto al eje de abscisas, sus puntos de inflexión son $(0, 1)$ y $(0, -1)$. No tiene asíntotas.

1443. Está definida en los intervalos $[-1, 0]$ y $(1, \infty)$, es bivalente. La gráfica es simétrica respecto al eje de abscisas. $|y|_{\text{máx}} = \sqrt[4]{12}/3$ para $x = -\sqrt{3}/3$. La abscisa de los puntos de inflexión de la gráfica es $\sqrt{1+\frac{\sqrt{12}}{3}}$. No tiene asíntotas.

1444. Está definida para $x \geqslant 0$, es bivalente. La gráfica es simétrica respecto al eje de abscisas. $|y|_{\text{máx}} = \sqrt{12}/9$ para $x = 1/3$. La gráfica no tiene puntos de inflexión. No tiene asíntotas.

1445. Está definida para $x = 0$ y para $x \geqslant 1$. El origen de coordenadas es un punto aislado. La gráfica es simétrica respecto al eje de abscisas. No tiene extremos. Los puntos de inflexión de la gráfica son $\left(\frac{4}{3}, \frac{4\sqrt{3}}{9}\right)$. No tiene asíntotas.

1446. Está definida para $x < 0$ y para $x \geqslant \sqrt[3]{2}$, es bivalente. La gráfica es simétrica respecto al eje de abscisas. $|y|_{\text{máx}} = 1$ para $x = -1$. La gráfica no tiene puntos de inflexión. Las asíntotas son $x = 0$ e $y = \pm x\sqrt{3}/3$.

1447. Está definida para $x \leqslant -2$ y para $x > 0$, es bivalente. La gráfica es simétrica respecto a la recta $y = x$. $y_{\text{máx}} = -2$ para $x = 1$. La gráfica no tiene puntos de inflexión. Las asíntotas son $x = 0$, $y = 0$ y $x + y = 0$.

1448. Está definida para $-a \leqslant x < a$, es bivalente. La gráfica es simétrica respecto al eje de abscisas. $|y|_{\text{máx}} = a\sqrt{\frac{5\sqrt{5}-11}{2}}$ para $x = -\frac{a}{2}(\sqrt{5}-1)$. No tiene puntos de inflexión. La asíntota es $x = a$.

1449. Está definida para $0 \leqslant x \leqslant 4$, es bivalente. La gráfica es simétrica respecto al eje de abscisas. $|y|_m = \sqrt{3}$ para $x = 3$. La abscisa de los puntos de inflexión de la gráfica es $3 - \sqrt{3}$. No tiene asíntotas.

1450. Está definida para $-2 \leqslant x \leqslant 2$, es bivalente. La gráfica es simétrica respecto a los ejes de coordenadas. $|y|_{\text{máx}} = 3\sqrt{3}/5$ para $x = \pm 1$. Los puntos de inflexión de la gráfica son $(0, 0)$ y $(\pm\sqrt{3}, \pm\sqrt{3}/5)$. No tiene asíntotas.

1451. Está definida para $-1 \leqslant x \leqslant 2$, es bivalente. La gráfica es simétrica respecto a los ejes de coordenadas. $|y|_{\text{máx}} = 1/2$ para $x = \pm\sqrt{2}/2$. El punto de inflexión de la gráfica es $(0, 0)$. No tiene asíntotas.

1452. Está definida para $x \geqslant 1$, es bivalente. La gráfica es simétrica respecto al eje de abscisas. $|y|_{máx} = 1$ para $x = 2$. La abscisa de los puntos de inflexión es $\frac{6+2\sqrt{3}}{2}$. La asíntota es $y = 0$.

1453. Está definida para $0 \leqslant x < 2a$, es bivalente. La gráfica es simétrica respecto al eje de abscisas. No tiene extremos. No tiene puntos de inflexión. La asíntota es $x = 2a$.

1454. Está definida para $x \leqslant 0$, para $0 < x \leqslant 1$ y para $x \geqslant 2$, es bivalente. La gráfica es simétrica respecto al eje de abscisas, tiene las asíntotas, que son $x = 0$ e $y = \pm 1$ y dos puntos de inflexión. No tiene extremos.

1455. Está definida para $-a \leqslant x < 0$ y para $0 < x \leqslant a$, es bivalente. La gráfica es simétrica respecto al eje de abscisas. No tiene extremos. Los puntos de inflexión de la gráfica son $\left[a(\sqrt{3}-1), \pm a\sqrt[4]{\frac{27}{4}}\right]$. La asíntota es $x = 0$.

1456. Está definida para $-1 \leqslant x \leqslant 1$ y para $x = \pm 2$, es bivalente. La gráfica es simétrica respecto a los ejes de coordenadas y tiene dos puntos aislados: $(\pm 2, 0)$, $|y|_{máx} = 1$ para $x = 0$. No tiene puntos de inflexión y asíntotas.

1457. Está definida para $-1 \leqslant x \leqslant 1$, es bivalente. La gráfica es simétrica respecto a los ejes de coordenadas. $|y|_{máx} = 1$ para $x = 0$. Los puntos de inflexión de la gráfica son $(\pm\sqrt{2}/2, \pm\sqrt{2}/4)$. No tiene asíntotas.

1458. Está definida para $x \leqslant -1$ y para $x \geqslant 1$, es bivalente. La gráfica es simétrica respecto a los ejes de coordenadas. No tiene extremos. Los puntos de inflexión de la gráfica son $(\pm\sqrt{2}, \pm 1/2)$. Las asíntotas son $y = \pm x$.

1459. Está definida para $x \geqslant 0$, es bivalente. La gráfica es simétrica respecto al eje de abscisas. $|y|_{máx} = 1$ para $x = 1/2$. La abscisa de los puntos de inflexión de la gráfica es $\frac{1+\sqrt{2}}{2}$. La asíntota es $y = 0$.

1460. Está definida por todas partes, excepto $x = 0$. No tiene extremos. Los puntos de inflexión de la gráfica son $(-1/2, e^{-2} + 1/2)$. Las asíntotas son $x = 0$ y $x + y = 1$.

1461. Está definida por todas partes, excepto $x = \pi/2 + k\pi$, donde $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ El período es π. No tiene extremos. La gráfica no tiene puntos de inflexión. Las asíntotas son $x = \pi/2 + k\pi$.

1462. Está definida por todas partes. La gráfica es simétrica respecto al eje de ordenadas. Los puntos extremos satisfacen la ecuación $x = \operatorname{tg} x$. La asíntota es $y = 0$.

1463. Está definida por todas partes. No tiene extremos. La gráfica no tiene puntos de inflexión. Cuando $x \leqslant 0$ la función es idénticamente igual a la función lineal $y = 1 - x$. La asíntota es $x + y = 3$. $(0, 1)$ es el punto angular de la gráfica con dos tangentes diferentes.

1464. Está definida por todas partes. La gráfica es simétrica respecto al eje de ordenadas. $y_{máx} = 3$ para $x = 0$, $y_{mín} = -1$ para $x \pm 2$. La gráfica no tiene puntos de inflexión, ni asíntotas, su parte derecha representa una parte de la parábola $y = x^2 - 4x + 3$, situada a la derecha del eje de ordenadas. $(0, 3)$ es el punto angular de la gráfica con dos tangentes diferentes.

1465. $x(t)$ e $y(t)$ están definidas para todas las t, e $y(x)$, para todas las x. $(-3, 3)$ es el máximo, $(5, -1)$ es el mínimo, $(1, 1)$ es el punto de inflexión. No tiene asíntotas. Cuando $x \to \infty$, el ángulo de inclinación de la línea hacia el eje de abscisas tiende a 45°.

1466. $x(t)$ e $y(t)$ están definidas para todas las t, e $y(x)$, para todas las x.

Las asíntotas son $y = x$ e $y = x + 6\pi$; $(-1 - 3\pi, -1 + 3\pi/2)$ es el máximo, $(1 - 3\pi, 1 - 3\pi/2)$ es el mínimo, $(-3\pi, 0)$ es el punto de inflexión.

1467. $x(t)$ e $y(t)$ están definidas para todas las t, excepto $t = -1$. La asíntota es $x + y + 1 = 0$. $(0, 0)$ es el punto múltiple, los ejes de coordenadas sirven de tangentes en este punto. No tienen puntos de inflexión. En el primer cuadrante está un lazo cerrado.

1468. $x(t)$ e $y(t)$ están definidas para todas las t. Cuando $x < -1/e$ la función $y(x)$ no está definida, cuando $-1/e < x < 0$ esta misma función es bivalente, cuando $x > 0$ es univalente. La línea es simétrica respecto a la recta $x + y = 0$. El máximo es $(e, 1/e)$. Existen dos puntos de inflexión. Los ejes de coordenadas hacen de asíntotas.

1469. Es una línea cerrada simétrica respecto al eje de abscisas, con un punto de retroceso $(a, 0)$.

1470. Es una rosa cerrada de tres pétalos. La función está definida en los intervalos $[0, \pi/3]$, $[2/3\pi, \pi]$, $[4/3\pi, 5/3\pi]$. Los extremos existen cuando $\varphi = \pi/6$, $\varphi = 5\pi/6$ y $\varphi = 3\pi/2$.

1471. La función está definida en los intervalos $[0, \pi/2)$, $[\pi, 3\pi/2)$. La gráfica de la función es simétrica respecto al polo. Las rectas $x = a$ y $x = -a$ son las asíntotas*.

1472. La función está definida en los intervalos $[0, \pi/2)$, $(3\pi/4, 3\pi/2)$, $(7\pi/4, 2\pi]$. La gráfica de la función es simétrica respecto al polo. Las asíntotas son $x = a$ y $x = -a$. En el polo la curva toca la recta $\varphi = 3\pi/4$.

1473. Existe para todos los valores de φ. Cuando $\varphi = 0$ el máximo es igual a $2a$, cuando $\varphi = \pi$ el mínimo es igual a 0. La línea es cerrada y simétrica respecto al eje polar. El polo es el punto de retroceso.

1474. La función está definida en los intervalos $[0, \pi/2 + \arccos 1/b]$, $[3\pi/2 - \arccos 1/b, 2\pi]$. En el punto $\varphi = 0$ la función tiene el máximo igual a $a(1 + b)$, en los puntos $\varphi = \pi/2 + \arccos 1/b$ y $\varphi = 3\pi/2 - \arccos 1/b$ tiene el mínimo igual a 0. La gráfica de la función es simétrica respecto al eje polar.

1475. Existe para $\varphi > 0$. El punto de inflexión es $(\sqrt{2\pi}; 0{,}5)$. El eje polar es la asíntota. La línea se desarrolla alrededor del polo en forma de espiral, acercándose a éste de manera asintótica.

1476. Existe para $\varphi \geqslant 0$. La gráfica es una espiral que parte del polo y se acerca, de manera asintótica, a la circunferencia $\rho = 1$.

1477. Existe para $-1 \leqslant t \leqslant 1$ situada íntegramente a la derecha del eje de ordenadas. Línea cerrada. El máximo existe cuando $t = 0$ ($\varphi = 1$ radián, $\rho = 1$). No tiene puntos de inflexión. Cuando $t = \pm 1$ toca el eje de ordenadas.

1478. Rosa de cuatro pétalos. El origen de coordenadas es el punto autotangencial doble.

1479. La línea pertenece íntegramente a la banda $-\dfrac{a\sqrt{2}}{2} \leqslant x \leqslant \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. Es simétrica respecto al origen. La asíntota es $x = 0$. $(0, 0)$ es el punto de inflexión en que el eje de abscisas sirve de tangente. Existen otros dos puntos de inflexión.

1480. Es una línea simétrica respecto a los cuatro ejes $x = 0$, $y = 0$, $y = x$, $y = -x$, cerrada, que tiene cuatro puntos de retroceso, que son $(a, 0)$, $(0, a)$, $(-a, 0)$ y $(0, -a)$. El origen de coordenadas es un punto aislado.

1481. Es una línea simétrica respecto a los ejes de coordenadas y las bisectrices de los ángulos coordenados. Las asíntotas son $(x \pm y)^2 = \dfrac{1}{2}$. El origen de

* En este ejercicio, al igual que en los que siguen más abajo, las asíntotas vienen dadas en el sistema de coordenadas cartesianas en el cual el eje polar hace de eje de abscisas, y la perpendicular hacia el eje polar que pasa por el polo, hace de eje de ordenadas.

coordenadas es el punto cuádruplo. En él, las ramas de la línea tocan los ejes de coordenadas. La línea presenta la forma de «molino».

1485. Las demás raíces son simples.

1486. $0{,}1 < x < 0{,}2$. **1487.** $-0{,}7 < x_1 < -0{,}6$ y $0{,}8 < x_2 < 0{,}9$.

1488. $0{,}32 < x < 0{,}33$.

1489. $-3{,}11 < x_1 < -3{,}10$, $0{,}22 < x_2 < 0{,}23$ y $2{,}88 < x_3 < 2{,}89$.

1490. $0{,}38 < x_1 < 0{,}39$ y $1{,}24 < x_2 < 1{,}25$.

1491. $-0{,}20 < x < -0{,}19$. **1492.** $0{,}84 < x < 0{,}85$. **1493.** $1{,}63 < x < 1{,}64$.

1494. $1{,}537 < x < 1{,}538$. **1495.** $0{,}826 < x < 0{,}827$. **1496.** $1{,}096 < x < 1{,}097$.

1497. $0{,}64 < x < 0{,}65$. Para $0 < a < 1$ existe un solo número real igual a su propio logaritmo, siendo menor que 1. Para $1 < a < e^{\frac{1}{e}}$ existen dos números distintos iguales a sus propios logaritmos: uno de éstos pertenece al intervalo $(1, e)$, el otro, pertenece al intervalo $(e, +\infty)$. Para $a = e^{\frac{1}{e}}$ el único número igual a su logaritmo es el número e (es la raíz doble de la ecuación $\log_a x = x$). Para $e^{\frac{1}{e}} < a < \infty$ no existen números reales que sean iguales a sus propios logaritmos.

1498. $(x-4)^4 + 11(x-4)^3 + 37(x-4)^2 + 21(x-4) - 56$.

1499. $(x+1)^3 - 5(x+1) + 8$.

1500. $(x-1)^{10} + 10(x-1)^9 + 45(x-1)^8 + 120(x-1)^7 + 210(x-1)^6 + 249(x-1)^5 + 195(x-1)^4 + 90(x-1)^3 + 15(x-1)^2 - 5(x-1) - 1$.

1501. $x^6 - 9x^5 + 30x^4 - 45x^3 + 30x^2 - 9x + 1$.

1502. $f(-1) = 143$; $f'(0) = -60$; $f''(1) = 26$.

1503. $-1-(x+1)-(x+1)^2-\ldots-(x+1)^n+(-1)^{n+1}\dfrac{(x+1)^{n+1}}{[-1+\theta(x+1)]^{n+2}}$, donde $0<\theta<1$.

1504. $x+\dfrac{x^2}{1}+\dfrac{x^3}{2!}+\ldots+\dfrac{x^n}{(n-1)!}+\dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}(\theta x+n+1)e^{\theta x}$, [donde $0<\theta<1$.

1505. $2+\dfrac{x-4}{4}-\dfrac{(x-4)^2}{64}+\dfrac{(x-4)^3}{512}-\ldots+(-1)^{n-1}\dfrac{(2n-2)!\,(x-4)^n}{n!\,(n-1)!\,2^{4n-2}}+\dfrac{(-1)^n(2n)!\,(x-4)^{n+1}}{2^{2n+1}n!\,(n+1)!\sqrt{[4+\theta(x-4)]^{2n+1}}}$, donde $0<\theta<1$.

1506. $1+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}+\ldots+\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}+\dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\dfrac{e^{\theta x}-e^{-\theta x}}{2}$, donde $0<\theta<1$.

1507. $(x-1)+\dfrac{5}{2!}(x-1)^2+\dfrac{11}{3!}(x-1)^3+\dfrac{6}{4!}(x-1)^4+\ldots$ $\ldots+\dfrac{(-1)^n 6(x-1)^n}{(n-3)(n-2)(n-1)n}+\dfrac{(-1)^{n+1}6(x-1)^{n+1}}{(n-2)(n-1)n(n+1)[1+\theta(x-1)]^{n-2}}$, donde $0<\theta<1$.

1508. $\dfrac{2x^2}{2!}-\dfrac{2^3x^4}{4!}+\dfrac{2^5x^6}{6!}-\dfrac{2^7x^8}{8!}+\ldots+(-1)^{n-1}\dfrac{2^{2n-1}x^{2n}}{(2n)!}+\dfrac{(-1)^n2^{2n}x^{2n+1}}{(2n+1)!}\operatorname{sen}2\theta x$, donde $0<\theta<1$.

1509. $2-(x-2)+(x-2)^2-(x-2)^3+\dfrac{(x-2)^4}{[1+\theta(x-2)]^5}$, donde $0<\theta<1$.

1510. $x+\dfrac{x^3}{3}\cdot\dfrac{1+2\operatorname{sen}^3\theta x}{\cos^4\theta x}$, donde $0<\theta<1$.

1511. $x+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{4!}\,\frac{9\theta x+6\theta^3x^3}{(1-\theta^2x^2)^{\frac{7}{2}}}$, donde $0<\theta<1$.

1512. $1-\frac{1}{2}(x-1)+\frac{1\cdot 3}{2^2\cdot 2}(x-1)^2-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2^3\cdot 3!}(x-1)^3+\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2^4\cdot 4!}\times$
$\times\frac{(x-1)^4}{\sqrt{[1+\theta(x-1)]^9}}$, donde $0<\theta<1$.

1513*. Debido a la existencia de la tercera derivada tenemos

$$f(a+h)=f(a)+hf'(a)+\frac{h^2}{2!}f''(a)+\frac{h^3}{3!}f'''(a+\theta_1 h).$$

Comparando con la expresión en el texto obtenemos:

$$\frac{h^2}{2!}[f''(a+\theta h)-f''(a)]=\frac{h^3}{3!}f'''(a+\theta_1 h),$$

es decir,

$$\frac{f''(a+\theta h)-f''(a)}{h}=\theta\,\frac{f''(a+\theta h)-f''(a)}{\theta h}=\frac{1}{3}f'''(a+\theta_1 h).$$

Sólo queda pasar al límite para $h\to 0$.
1514. La función decrece. $(0, 3)$ es el punto de inflexión de la gráfica.
1515. La función tiene el mínimo igual a 1.
1516. La función tiene el mínimo igual a 2.
1517. La función tiene el máximo igual a -11.
1518. La función crece. $(0, 0)$es el punto de inflexión de la gráfica.
1519. La función crece. $(0, 4)$ es el punto de inflexión de la gráfica.
1520. $f(x) = 1-6(x-1)+(x-1)^2+\ldots$; $f(1{,}03)\approx 0{,}82$.
1521. $f(x)=321+1087(x-2)+1648(x-2)^2+\ldots$; $f(2{,}02)\approx$ $\approx 343{,}4$; $f(1{,}97)\approx 289{,}9$.
1522. $f(x)=1+60(x-1)+2570(x-1)^2+\ldots$; $f(1{,}005)\approx 1{,}364$.
1523. $f(x)=-6+21(x-2)+50(x-2)^2+\ldots$; $f(2{,}1)\approx -3{,}4$; $f(2{,}1)=-3{,}36399$; $\delta=0{,}036$; $\delta'\approx 0{,}011=1{,}1\%$. **1524.** 1,65.
1525. 0,78, $\delta<0{,}01$. **1526.** 0,342020. **1527.** 0,985. **1528.** 0,40, $\delta<0{,}01$.

1529. $\frac{\sqrt{2}}{4}$. **1530.** $\frac{a}{b^2}$; $\frac{b}{a^2}$. **1531.** 36. **1532.** 0,128. **1533.** $\frac{\sqrt{2}}{4}$.

1534. 0. **1535.** 1. **1536.** $\frac{8\sqrt{2}}{3a}$. **1537.** $\frac{6|x|}{(1+9x^4)^{\frac{3}{2}}}$.

1538. $\frac{a^4b^4}{(b^4x^2+a^4y^2)^{\frac{3}{2}}}$. **1539.** $|\cos x|$. **1540.** $\frac{1}{3\sqrt[3]{a|xy|}}$.

1541. $\frac{|(m-1)(ab)^{2m}(xy)^{m-2}|}{(b^{2m}x^{2m-2}+a^{2m}y^{2m-2})^{\frac{3}{2}}}$. **1542.** $\frac{1}{a\,\mathrm{ch}^2\frac{x}{a}}$. **1543.** $\frac{1}{6}$.

1544. $\frac{2}{3a|\operatorname{sen}2t_1|}$. **1545.** $\frac{2}{\pi a}$. **1546.** $\frac{3}{8a\left|\operatorname{sen}\frac{t}{2}\right|}$. **1547.** $\frac{1}{\sqrt{1+\ln^2 a}}$.

1548. $\frac{2+\varphi^2}{a(1+\varphi^2)^{\frac{3}{2}}}$. **1549.** $\frac{\varphi^2+k^2+k}{a\varphi^{k-1}(\varphi^2+k^2)^{\frac{3}{2}}}$. **1550.** $\frac{(a^2+b^2)^{\frac{3}{2}}}{2ab\sqrt{2}}$.

1554. $(x+4)^2+\left(y-\frac{7}{2}\right)^2=\frac{125}{4}$. **1555.** $(x-2)^2+(y-2)^2=2$.

1556. $(x+2)^2+(y-3)^2=8$. **1557.** $\left(x-\frac{\pi-10}{4}\right)^2+\left(y-\frac{9}{4}\right)^2=\frac{125}{16}$.

1558. $\left(x+\frac{7}{3}a\right)^2+\left(y-\frac{8}{3}a\right)^2=\frac{125}{9}a^2$. **1559.** $\left(\frac{a}{4},\ \frac{a}{4}\right)$.

1560. $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\ -\frac{1}{2}\ln 2\right)$. **1561.** $\left(-\frac{1}{2}\ln 2,\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. **1562.** Para $t=k\pi$.

1563. $\frac{3}{4}a$. **1566.** $a=3,\ b=-3,\ c=1$.

1567. $y=-x^5-0{,}64^4+4{,}5x^3+0{,}1x^2$.

1568. $\xi=x-\frac{[1+n^2x^{2(n-1)}]\,x}{n-1}$, $\eta=x^n+\frac{1+n^2x^{2(n-1)}}{n(n-1)\,x^{n-2}}$.

1569. $\xi=\frac{(a^2+b^2)\,x^3}{a^4}$, $\eta=-\frac{(a^2+b^2)\,y^3}{b^4}$; $(a\xi)^{\frac{2}{3}}-(b\eta)^{\frac{2}{3}}=(a^2+b^2)^{\frac{2}{3}}$.

1570. $\xi=x+3x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}$, $\eta=y+3x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{3}}$; $(\xi+\eta)^{\frac{2}{3}}+(\xi-\eta)^{\frac{2}{3}}=2a^{\frac{2}{3}}$.

1571. $\xi=\pm\frac{4}{3}\sqrt{\frac{y}{a}}\,(3y+a)$, $\eta=-\frac{9y^2+2ay}{2a}$.

1572. $\xi=-\frac{4}{3}t^3$, $\eta=3t^2-\frac{3}{2}$, $\xi^2=\frac{16}{243}\left(\eta+\frac{3}{2}\right)^3$.

1573. $\left(\frac{3\eta}{8}\right)^4+6a^2\left(\frac{3\eta}{8}\right)^2+3a^3\xi=0$. **1574.** $\xi^{\frac{2}{3}}+\eta^{\frac{2}{3}}=(2a)^{\frac{2}{3}}$.

1576. Sí, es posible. **1579.** $2p\left[\sqrt{\left(\frac{x+p}{3p}\right)^3}-1\right]$. **1580.** $\frac{4(a^3-b^3)}{ab}$.

1581. $6a$. **1582*.** $16a$. Al obtener las ecuaciones paramétricas de la evoluta, pasar a otras coordenadas y al parámetro, poniendo $x=-x_1$, $y=-y_1$, $t=t_1+\pi$.

1583*. Valerse de la dependencia que existe entre la longitud de la evoluta y el incremento del radio de la curvatura.

1584. 0,785. **1585.** 0,073. **1586.** (3,00; 2,46). **1587.** (−0,773; −0,841). **1588.** (1,38; 4,99). **1589.** (0,57; −3,62). **1590.** 0,78. **1591.** (2,327; 0,845).

Al capítulo V

1592. 1) $\int\limits_0^3 (x^2+1)\,dx$; 2) $\int\limits_a^b (e^x+2)\,dx$; 3) $\int\limits_0^\pi \operatorname{sen} x\,dx$;

4) $\int\limits_{-2}^{2}(8-2x^2)\,dx$; 5) $\int\limits_0^1(\sqrt{x}-x^2)\,dx$; 6) $\int\limits_1^e(\ln x-\ln^2 x)\,dx$.

1593. $20-\frac{4}{n}$ y $20+\frac{4}{n}$; $\alpha=\frac{4}{n}$; $\sigma=\frac{1}{5n}$.

1594. $\alpha = \frac{149}{600} \approx 0{,}248$, $\delta \approx 0{,}039$.

1595. 31,5. 1596. $10\frac{2}{3}$. 1597. $\frac{2}{3}ah = 40$ cm². 1598. $10\frac{2}{3}$.

1599. 8. 1600. $21\frac{1}{3}$. 1601. $2\frac{7}{8}$. 1602. 140 cm. 1603. $\approx 122{,}6$ m.

1604. $20\frac{5}{6}$ cm. 1605. 625 julios. 1606. 4 cm.

1607. a) $m_n = \sum\limits_{i=0}^{n-1} v(\xi_i)(t_{i+1}-t_i)$, $t_0 = T_0$, $t_n = T_1$; b) $m = \int\limits_{T_0}^{T_1} v(t)\,dt$.

1608. a) $\theta_n = \sum\limits_{i=0}^{n-1} \psi(\xi_i)(t_{i+1}-t_i)$, $t_0 = T_0$, $t_n = T_1$; b) $\theta = \int\limits_{T_0}^{T_1} \psi(t)\,dt$.

1609. $Q_n = \sum\limits_{i=0}^{n-1} I(\xi_i)(t_{i+1}-t_i)$, $t_0 = 0$, $t_n = T$; $Q = \int\limits_0^T I(t)\,dt$.

1610. a) $A_n = \sum\limits_{i=0}^{n-1} \varphi(\xi_i)\psi(\xi_i)(t_{i+1}-t_i)$, $t_0 = T_0$, $t_n = T_1$;

b) $A = \int\limits_{T_0}^{T_1} \varphi(t)\psi(t)\,dt$.

1611. 1500 culombios. 1612. $\approx 67\,600$ julios. 1613. 2880 julios.

1614. a) $P_n = \sum\limits_{i=0}^{n-1} a\xi_i(x_{i+1}-x_i)$, $x_0 = 0$, $x_n = b$; b) $P = \int\limits_0^b ax\,dx$.

1615. a) $\frac{ab^2}{2} = 18{,}75$ kgf; b) la recta debe ser trazada de tal modo que entre ella y la superficie medie la distancia igual a $\frac{b}{\sqrt{2}} \approx 17{,}7$ cm.

1616. $e-1$. 1617. $\frac{b^{k+1}-a^{k+1}}{k+1}$. 1618. 1) 50; 2) $4a$; 3) $\frac{7a^3}{24}$; 4) $\frac{7}{3}ab^2$; 5) $a\left(a^2-\frac{a}{2}+1\right)$; 6) $\frac{4}{3}$ m; 7) 31,5; 8) $\frac{(a-b)^3}{6}$; 9) $\frac{a^2}{3}$; 10) $\frac{a(a^2-3ab+3b^2)}{3(a-b)^2}$; 11) 4; 12) $16\frac{2}{15}$; 13) 0.

1619*. $\frac{1}{k+1}$; $\approx 1{,}67\cdot 10^{11}$. Escribir la expresión cuyo límite es buscado en forma de la n-ésima suma integral de cierta función.

1620. ln 2. 1621. ln 2. 1622*. ln a; ln 3 $\approx$ 1,1. Véanse los ejercicios 1620 y 1621.

1623*. 1) $ae^a - e^a + 1$; 2) $a\ln a - a + 1$; 3) $\frac{(\ln b)^2-(\ln a)^2}{2}$.

La expresión $q + 2q^2 + \ldots + nq^n$ se halla mediante la derivación de la suma de los términos de la progresión geométrica.

1624. $\int\limits_0^{2\pi} |\operatorname{sen} x|\, dx = 2\int\limits_0^{\pi} \operatorname{sen} x\, dx$. **1625.** $\frac{1}{2}$. **1626.** $\frac{64}{3}$. **1627.** $\frac{8}{5}$.

1630. $8 < I < 9{,}8$. **1631.** $3 < I < 5$. **1632.** $\pi < I < 2\pi$. **1633.** $\frac{20}{29} < I < 1$.

1634. $\frac{\pi}{9} < I < \frac{2\pi}{3}$. **1635.** $\frac{e^2-1}{e^{e^2-1}} < I < \frac{e^2-1}{e^2}$.

1636. 1) La primera; 2) la segunda.
1637. 1) La primera; 2) la segunda; 3) la primera; 4) la segunda.
1640. $0{,}85 < I < 0{,}90$.
1641. a) $1 < I < \sqrt{2} \approx 1{,}414$;

b) $1 < I < \frac{1+\sqrt{2}}{2} \approx 1{,}207$; c) $1 < I < \sqrt{\frac{6}{5}} \approx 1{,}095$.

1642. $y_{\text{med}} = \frac{k(x_1+x_2)}{2} + b$; $\frac{x_1+x_2}{2}$.

1643. $y_{\text{med}} = \frac{a}{3}(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2)$. Si $x_1x_2 \geqslant 0$, en un solo punto; si $x_1 < 0$ y $x_2 > 0$, en dos puntos siendo válidas las desigualdades $-\frac{x_1}{2} \leqslant x_2 \leqslant -2x_1$, en caso contrario, en un solo punto.

1644. 24,5. **1645.** $\frac{\pi a}{4}$. **1646.** 0. **1647.** $\frac{2}{3}h = 1$ m.

1648. 11 A. **1649.** ≈ 1558 V. **1650.** 1) $\frac{x^3}{3}$; 2) $\frac{x^6-a^6}{6}$; 3) $\frac{x^4-x^5}{20}$.

1651. $s = \frac{2}{3}t^3$. **1652.** $A = 100s + 25s^2$ julios, s es la distancia recorrida en metros.

1653. $A = \frac{1}{R}\left(\frac{\alpha^2}{2}t^3 + \alpha\beta t^2 + \beta^2 t\right)$, donde $\alpha = \frac{E_2-E_1}{t_2-t_1}$, $\beta = \frac{E_1t_2 - E_2t_1}{t_2-t_1}$.

1654. $Q = c_0t + \frac{\alpha}{2}t^2 + \frac{\beta}{3}t^3$. **1655.** $dS = 10$, $\Delta S = 10{,}100033\ldots$ **1656.** $dS = 1$.

1657.

Δx	ΔS	dS	α	δ
1	92,25	64	28,25	0,442
0,1	6,644	6,4	0,244	0,0382
0,01	0,6424	0,64	0,0024	0,00376

1658. $\frac{1}{3}$. **1659.** 0; $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 1. **1660.** $\frac{d}{dx}\int\limits_x^a f(x)\, dx = -f(x)$.

1661. -1, $-\frac{5}{4}$. **1662.** $\frac{\operatorname{sen} 2x}{x}$. **1663.** 1) x; 2) $-4x \ln x$.

1664*. $2\ln^2 2x - \ln^2 x$. Presentar la integral $\int\limits_x^{2x} \ln^2 x\, dx$ en forma de la suma de las integrales $\int\limits_x^a \ln^2 x\, dx + \int\limits_a^{2x} \ln^2 x\, dx$, donde $a > 0$.

1665. $y' = -\frac{\cos x}{e^y}$. 1666. 1) $\frac{dy}{dx} = \operatorname{ctg} t$; 2) $\frac{dy}{dx} = -t^2$. 1667. -2.

1668. Para $x = 0$ es igual al mínimo. $I(0) = 0$. 1669. 1.

1670. $y_{\text{máx}} = 5/6$ para $x = 1$, $y_{\text{mín}} = 2/3$ para $x = 2$. El punto de inflexión de la gráfica es igual a $(3/2, 3/4)$.

1672. 1) $\frac{3}{4}$; 2) $-\frac{15}{32}$; 3) 52; 4) $4\frac{5}{6}$; 5) $45\frac{1}{6}$; 6) $\approx 0{,}08$; 7) $2-\sqrt{2}$; 8) $6\frac{2}{3}$; 9) $3\left(\frac{1}{\sqrt[3]{a}} - \frac{1}{\sqrt[3]{b}}\right)$; 10) $\frac{z_1^2 - z_0^2}{2} - \frac{4}{3}\left(\sqrt{z_1^3} - \sqrt{z_0^3}\right) + z_1 - z_0$.

1673. 1) 2; 2) 0; 3) $e^3 - 1$; 4) 1; 5) $\pi/4$; 6) $\pi/6$. 1674. 0. 1675. $1 - \sqrt{3}$; -1.

Al capítulo VI

1676. $\frac{2}{3}\sqrt{x^3} + C$. 1677. $\frac{mx^{\frac{n}{m}+1}}{n+m} + C$. 1678. $C - \frac{1}{x}$.

1679. $\approx 0{,}4343 \cdot 10^x + C$. 1680. $\frac{(ae)^x}{1+\ln a} + C$. 1681. $\sqrt{x} + C$.

1682. $\sqrt{\frac{2h}{g}} + C$. 1683. $\approx 4{,}1x^{0{,}83} + C$. 1684. $u - u^2 + C$.

1685. $\frac{2}{5}x^2\sqrt{x} + x + C$. 1686. $C - \frac{2}{3x\sqrt{x}} - e^x + \ln|x|$.

1687. $C - 10x^{-0{,}2} + 15x^{0{,}2} - 3{,}62x^{1{,}38}$. 1688. $z - 2\ln|z| - \frac{1}{z} + C$

1689. $\frac{2x^2 - 12x - 6}{3\sqrt{x}} + C$.

1690. $\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2} + \frac{18}{7}x\sqrt[6]{x} + \frac{9}{5}x\sqrt[3]{x^2} + \frac{6}{13}x^2\sqrt[6]{x} + C$.

1691. $\frac{6}{7}\sqrt[6]{x^7} - \frac{4}{3}\sqrt[4]{x^3} + C$. 1692. $\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arcsen} x + C$.

1693. $3x - \frac{2(1{,}5)^x}{\ln 1{,}5} + C$. 1694. $\frac{1}{2}(\operatorname{tg} x + x) + C$. 1695. $C - \operatorname{ctg} x - \operatorname{tg} x$.

1696. $\operatorname{tg} x - x + C$. 1697. $C - \operatorname{ctg} x - x$. 1698. $x - \operatorname{sen} x + C$.

1699. $\operatorname{arctg} x - \frac{2}{x} + C$. 1700. $\ln|x| + 2\operatorname{arctg} x + C$. 1701. $\operatorname{tg} x + C$.

1702. $\frac{\pi}{2}x + C$. 1703. $\frac{\operatorname{sen}^2 x}{2} + C$. 1704. $\frac{\operatorname{tg}^4 x}{4} + C$. 1705. $2\sqrt{1+x^2} + C$.

1706. $\frac{(x+1)^{16}}{16} + C$. 1707. $C - \frac{1}{8(2x-3)^4}$. 1708. $\frac{(a+bx)^{1-c}}{b(1-c)} + C$.

1709. $C - \frac{5}{33}(8-3x)^{\frac{11}{5}}$. 1710. $C - \frac{\sqrt{(8-2x)^3}}{3}$. 1711. $\frac{3m}{b}\sqrt[3]{a+bx} + C$.

1712. $\frac{2}{3}\sqrt{(x^2+1)^3}+C$. 1713. $C-\frac{1}{3}\sqrt{(1-x^2)^3}$.

1714. $\frac{5}{18}\sqrt[5]{(x^3+2)^6}+C$.

1715. $\sqrt{x^2+1}+C$. 1716. $\frac{2}{5}\sqrt{4+x^5}+C$. 1717. $\frac{3}{8}\sqrt[3]{(x^4+1)^2}+C$.

1718. $\sqrt{3x^2-5x+6}+C$. 1719. $\frac{1}{4}\operatorname{sen}^4 x+C$. 1720. $\sec x+C$.

1721. $3\sqrt[3]{\operatorname{sen} x}+C$. 1722. $C-\frac{2}{5}\cos^5 x$. 1723. $\frac{2}{3}\sqrt{(\ln x)^3}+C$.

1724. $\frac{(\operatorname{arctg})^3}{3}+C$. 1725. $C-\frac{1}{2(\operatorname{arcsen} x)^2}$. 1726. $2\sqrt{1+\operatorname{tg} x}+C$.

1727. $\operatorname{sen} 3x+C$. 1728. $\operatorname{tg}(1+\ln x)+C$.

1729. $\frac{1}{3}\operatorname{sen} 3x+C$. 1730. $x\cos\alpha-\frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x+C$. 1731. $C-\frac{1}{2}\cos(2x-3)$.

1732. $C-\frac{1}{2}\operatorname{sen}(1-2x)$. 1733. $\frac{1}{2}\operatorname{tg}\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)+C$ ó $\frac{1}{2}(\operatorname{tg} 4x-\sec 4x)+C$.

1734. $C-\cos(e^x)$. 1735. $\ln(1+x^2)+C$. 1736. $\ln|\operatorname{arcsen} x|+C$.

1737. $\ln(x^2-3x+8)+C$. 1738. $\frac{1}{2}\ln|2x-1|+C$.

1739. $\frac{1}{c}\ln|cx+m|+C$.

1740. $\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+C$. 1741. $\frac{1}{3}\ln|x^3+1|+C$. 1742. $\ln(e^x+1)+C$

1743. $\frac{1}{2}\ln(e^{2x}+a^2)+C$. 1744. $C-\ln|\cos x|$. 1745. $\ln|\operatorname{sen} x|+C$.

1746. $C-\frac{1}{3}\ln|\cos 3x|$. 1747. $\frac{1}{2}\ln|\operatorname{sen}(2x+1)|+C$.

1748. $C-\ln(1+\cos^2 x)$. 1749. $\ln|\ln x|+C$.

1750. $\frac{\ln^{m+1}x}{m+1}+C$, si $m\neq-1$ y $\ln|\ln x|+C$, si $m=-1$.

1751. $e^{\operatorname{sen} x}+C$. 1752. $e^{\operatorname{sen} x}+C$. 1753. $\frac{a^{3x}}{3\ln a}+C$. 1754. $C-\frac{a^{-x}}{\ln a}$.

1755. $C-\frac{e^{1-3x}}{3}$. 1756. $0{,}5e^{x^2}e^{x^3}+C$. 1757. $C-\frac{1}{3}e^{-x^3}$.

1758. $\operatorname{arcsen}\frac{x}{3}+C$.

1759. $\frac{1}{5}\operatorname{arcsen} 5x+C$. 1750. $\frac{1}{3}\operatorname{arctg} 3x+C$. 1761. $\operatorname{arcsen}\frac{x}{2}+C$.

1762. $\frac{1}{3\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}}{3}x+C$. 1763. $\frac{1}{3}\operatorname{arcsen}\frac{3x}{2}+C$.

1764. $\frac{1}{2}\operatorname{arctg} x^2+C$. 1765. $\frac{1}{2}\operatorname{arcsen}\frac{x^2}{a}+C$. 1666. $\frac{1}{6}\operatorname{arctg}\frac{x^3}{2}+C$.

1767. $\frac{1}{4}\operatorname{arcsen} x^4+C$. 1768. $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{e^x}{2}+C$. 1769. $\frac{\operatorname{arcsen} 2^x}{\ln 2}+C$.

1770. $\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{sen}\alpha}{a}+C$. 1771. $e^x+e^{-x}+C$.

1772. $\frac{1}{3}e^{3x}+\frac{3}{2}e^{2x}+3e^x+x+C$. 1773. $\operatorname{arcsen}x-\sqrt{1-x^2}+C$.

1774. $\frac{3}{2}\ln(x^2+9)-\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{3}+C$. 1775. $\operatorname{arcsen}x+\sqrt{1-x^2}+C$.

1776. $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x^2-\frac{1}{4}\ln(x^4+1)+C$. 1777. $\operatorname{arcsen}x+\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}+C$.

1778. $\frac{2}{3}[x^3-\sqrt{(x^2-1)^3}]-x+C$. 1779. $C-2\sqrt{1-x^2}-\frac{2}{3}\sqrt{(\operatorname{arcsen}x)^3}$

1780. $C-\frac{1}{9}[\sqrt{1-9x^2}+(\arccos 3x)^3]$. 1781. $x-4\ln|x+4|+C$.

1782. $\frac{1}{2}\left[x-\frac{1}{2}\ln|2x+1|\right]+C$. 1783. $\frac{A}{b}\left[x-\frac{a}{b}\ln|bx+a|\right]+C$.

1784. $C-x-6\ln|3-x|$. 1785. $2x+3\ln|x-2|+C$.

1786. $\frac{1}{2}x+\frac{5}{4}\ln|2x-1|+C$. 1787. $x+\ln(x^2+1)+C$.

1788. $x-2\operatorname{arctg}x+C$. 1789. $C-\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-x-\ln|1-x|$.

1790. $\frac{x^3}{3}-x+\operatorname{arctg}x+C$. 1791. $\ln\left|\frac{x-1}{x}\right|+C$. 1792. $\ln\left|\frac{x}{x+1}\right|+C$.

1793. $\frac{1}{5}\ln\left|\frac{2x-3}{x+1}\right|+C$. 1794. $\frac{1}{b-a}\ln\left|\frac{b-x}{a-x}\right|+C$.

1795. $x+\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C$. 1796. $\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-5}{x-2}\right|+C$.

1797. $\frac{1}{7}\ln\left|\frac{x-2}{x+5}\right|+C$. 1798. $\frac{1}{12}\ln\left|\frac{2x-3}{2x+3}\right|+C$.

1799. $\frac{1}{2\sqrt{6}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}+x\sqrt{3}}{\sqrt{2}-x\sqrt{3}}\right|+C$. 1800. $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x-1}{2}+C$.

1801. $\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{\sqrt{2}}+C$. 1802. $\frac{2}{3}\operatorname{arctg}\frac{1-2x}{3}+C$.

1803. $\frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{2}+C$. 1804. $\frac{1}{2}\operatorname{arcsen}(2x+3)+C$.

1805. $\operatorname{arcsen}(x-2)+C$. 1806. $\frac{1}{3}\operatorname{arcsen}\frac{3x-1}{3}+C$.

1807. $\frac{1}{3}\operatorname{arcsen}\frac{3x+1}{\sqrt{5}}+C$. 1808. $\frac{x}{2}+\frac{\operatorname{sen}2x}{4}+C$.

1809. $\frac{x}{2}-\frac{\operatorname{sen}2x}{4}+C$. 1810. $C-\operatorname{ctg}\frac{x}{2}$. 1811. $\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)+C$.

1812. $2\operatorname{tg}\frac{x}{2}-x+C$. 1813. $2\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)-x+C$.

1814. $\frac{1}{8}\,\mathrm{tg}^8 x+C.$ **1815.** $\ln(2+\operatorname{sen}2x)+C.$

1816. $C-\frac{1}{4}\left(\frac{\cos 4x}{2}+\cos 2x\right).$ **1817.** $\frac{1}{10}\operatorname{sen}5x+\frac{1}{2}\operatorname{sen}x+C.$

1818. $\frac{1}{6}\operatorname{sen}3x-\frac{1}{14}\operatorname{sen}7x+C.$

1819. $\frac{1}{8}\left(2x+\operatorname{sen}2x+\frac{1}{2}\operatorname{sen}4x+\frac{1}{3}\operatorname{sen}6x\right)+C.$

1820. $\ln\left|\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\right|+C.$ **1821.** $\ln(1+\operatorname{sen}x)+C.$

1822. $\frac{\cos^2 x}{2}-\ln|\cos x|+C.$ **1823.** $\frac{1}{\operatorname{sen}x}-\frac{1}{3\operatorname{sen}^3 x}+C.$

1824. $2\sqrt{\cos\alpha}\left(\frac{\cos^2\alpha}{5}-1\right)+C.$ **1825.** $\mathrm{tg}\,x+\frac{1}{3}\mathrm{tg}^3 x+C.$

1826. $\operatorname{sen}x-\frac{\operatorname{sen}^3 x}{3}+C.$ **1827.** $\frac{1}{3}\mathrm{tg}^3 x-\mathrm{tg}\,x+x+C.$

1828. $C-\cos x+\frac{2}{3}\cos^3 x-\frac{1}{5}\cos^5 x.$

1829. $\frac{3}{8}x-\frac{1}{4}\operatorname{sen}2x+\frac{1}{32}\operatorname{sen}4x+C.$

1830. $\frac{1}{2}\mathrm{tg}^2 x+\ln|\cos x|+C.$ **1831.** $C-\mathrm{ctg}\,x-\frac{2}{3}\mathrm{ctg}^3 x-\frac{1}{5}\mathrm{ctg}^5 x.$

1832. $\frac{1}{4}\operatorname{sen}2x-\frac{1}{2}x\cos 2x+C.$ **1833.** $x\operatorname{sen}x+\cos x+C.$

1834. $C-e^{-x}(x+1).$ **1835.** $\frac{3^x}{\ln^2 3}(x\ln 3-1)+C.$

1836. $\frac{x^{n+1}}{n+1}\left(\ln x-\frac{1}{n+1}\right)+C.$ **1837.** $\frac{x^2+1}{2}\,\mathrm{arctg}\,x-\frac{x}{2}+C.$

1838. $x\arccos x-\sqrt{1-x^2}+C.$ **1839.** $x\,\mathrm{arctg}\sqrt{x}-\sqrt{x}+\mathrm{acrtg}\sqrt{x}+C.$

1840. $2\sqrt{x+1}\,\mathrm{arcsen}\,x+4\sqrt{1-x}+C.$

1841. $x\,\mathrm{tg}\,x-\frac{x^2}{2}+\ln|\cos x|+C.$

1842. $\frac{x^2}{4}+\frac{1}{4}x\operatorname{sen}2x+\frac{1}{8}\cos 2x+C.$ **1843.** $C-\frac{1}{2x^2}\lg(x\sqrt{e}).$

1844. $\sqrt{1+x^2}\,\mathrm{arctg}\,x-\ln(x+\sqrt{1+x^2})+C.$

1845. $2(\sqrt{x}-\sqrt{x-1}\ \mathrm{arcsen}\sqrt{x})+C.$

1846. $x\ln(x^2+1)-2x+2\,\mathrm{arctg}\,x+C.$ **1847.** $C-\frac{x}{2(1+x^2)}+\frac{1}{2}\mathrm{arctg}\,x.$

1848. $x^2\sqrt{1+x^2}-\frac{2}{3}\sqrt{(2+x^2)^3}+C.$

1849. $\frac{(x^3+1)\ln(2+x)}{3}-\frac{x^3}{9}+\frac{x^2}{6}-\frac{x}{3}+C.$ **1850.** $C-e^{-x}(2+2x+x^2).$

1851. $e^x(x^3-3x^2+6x-6)+C$. 1852. $a^x\left(\frac{x^2}{\ln a}-\frac{2x}{\ln^2 a}+\frac{2}{\ln^3 a}\right)+C$.

1853. $C-x^3\cos x+3x^2\operatorname{sen} x+6x\cos x-6\operatorname{sen} x$.

1854. $\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{4}x^2\operatorname{sen} 2x+\frac{1}{4}x\cos 2x-\frac{1}{8}\operatorname{sen} 2x+C$.

1855. $x(\ln^2 x-2\ln x+2)+C$. 1856. $C-\frac{1}{x}(\ln^3 x+3\ln^2 x+6\ln x+6)$.

1857. $C-\frac{8}{28\sqrt{x^3}}\left(\frac{9}{4}\ln^2 x+3\ln x+2\right)$.

1858. $x(\operatorname{arcsen} x)^2+2\operatorname{arcsen} x\cdot\sqrt{2-x^2}-2x+C$.

1859. $\frac{x^2+1}{2}(\operatorname{arctg} x)^2-x\operatorname{arctg} x+\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C$.

1860. $\frac{e^x(\operatorname{sen} x-\cos x)}{2}+C$. 1861. $\frac{e^{3x}}{13}(\operatorname{sen} 2x-5\cos 2x)+C$.

1862. $\frac{e^{ax}}{a^2+n^2}(n\operatorname{sen} nx+a\cos nx)+C$. 1863. $\frac{x}{2}(\operatorname{sen}\ln x-\cos\ln x)+C$.

1864. $\frac{x}{2}(\cos\ln x+\operatorname{sen}\ln x)+C$. 1865*. $C-\frac{x}{2}\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{2}\operatorname{arcsen} x$.

(Poner $dv=\frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$, y luego $\int\sqrt{1-x^2}\,dx$ transformar a la forma $\int\frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx$.)

1866*. $\frac{x}{2}\sqrt{a^2+x^2}+\frac{a^2}{2}\ln\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right)+C$. (Poner $u=\sqrt{a^2+x^2}$).

1867. $\frac{x-2}{x+2}a^x+C$. 1868. $\frac{1}{2}[(x^2-1)\operatorname{sen} x-(x-1)^2\cos x]e^x+C$.

1869. $2[\sqrt{x+1}-\ln(1+\sqrt{x+1})]+C$.

1870. $\frac{2\sqrt{x-1}}{35}(5x^3+6x^2+8x+16)+C$.

1871. $C-\frac{11}{2(x-2)^2}-\frac{4}{x-2}$. 1872. $\ln\left|\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1}\right|+C$.

1873. $2\sqrt{x-2}+\sqrt{2}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{x-2}{2}}+C$.

1874. $2[\sqrt{x}-\ln(1+\sqrt{x})]+C$. 1875. $2\operatorname{arctg}\sqrt{x}+C$.

1876. $2(\sqrt{x}-\operatorname{arctg}\sqrt{x})+C$.

1877. $\frac{3}{2}(x+1)^{\frac{2}{3}}-3(x+1)^{\frac{1}{3}}+3\ln|1+\sqrt[3]{x+1}|+C$.

1878. $\frac{2}{a}[\sqrt{ax+b}-m\ln|\sqrt{ax+b}+m|]+C$.

1879. $x+\frac{6\sqrt[6]{x^5}}{5}+\frac{3\sqrt[3]{x^2}}{2}+2\sqrt{x}+3\sqrt[3]{x}+6\sqrt[6]{x}+6\ln|\sqrt[6]{x}-1|+C.$

1880. $3\sqrt[3]{x}+3\ln|\sqrt[3]{x}-1|+C.$

1881. $2\sqrt{x}-4\sqrt[4]{x}+4\ln(1+\sqrt[4]{x})+C.$

1882. $\frac{6}{5}[\sqrt[6]{x^5}+2\sqrt[12]{x^5}+2\ln|\sqrt[12]{x^5}-1|]+C.$

1883. $\frac{4}{21}(3e^x-4)\sqrt[4]{(e^x+1)^3}+C.$ 1884. $\ln\frac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1}+C.$

1885. $2\sqrt{1+\ln x}-\ln|\ln x|+2\ln|\sqrt{1+\ln x}-1|+C.$

1886. $0.4\sqrt{(1+\cos^2 x)^3}(3-2\cos^2 x)+C.$ 1887. $\frac{1}{2}\ln^2 \operatorname{tg} x+C.$

1888. $C-\frac{2}{9}\sqrt{a^3-x^3}(2a^3+x^3).$ 1889. $\frac{x^2-4}{2}+\frac{8}{x^2-4}+4\ln|x^2-4|+C.$

1890. $C-\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{a^2x}.$ 1891. $\frac{a^2}{2}\operatorname{arcsen}\frac{x}{a}-\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+C.$

1892. $C-\frac{1}{a}\operatorname{arcsen}\frac{a}{|x|}.$ 1893. $C-\frac{\sqrt{(1+x^2)^3}}{3x^3}.$

1894. $C-\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}-\operatorname{arcsen} x.$ 1859. $\frac{x}{a^2\sqrt{x^2+a^2}}+C.$

1896. $C-\frac{\sqrt{(9-x^2)^5}}{45x^5}.$ 1897. $\frac{\sqrt{x^2-9}}{9x}+C.$

1898. $\ln\frac{|x|}{1+\sqrt{x^2+1}}+C.$ 1899. $C-\frac{x}{a^2\sqrt{x^2-a^2}}.$

1900. $\frac{x}{4}(x^2-2)\sqrt{4-x^2}+2\operatorname{arcsen}\frac{x}{2}+C.$

1901. $\frac{1}{4\sqrt{15}}\ln\left|\frac{x\sqrt{15}+2\sqrt{4x^2+1}}{x\sqrt{15}-2\sqrt{4x^2+1}}\right|+C.$

1902*. $\arccos\frac{1}{|x|}-\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}+C.$ (Se puede realizar la sustitución $x=\frac{1}{z}$.)

1903*. $2\operatorname{arcsen}\sqrt{x}+C.$ (Se puede realizar la sustitución $x=\operatorname{sen}^2 z$.)

1904*. $\ln\left|\frac{xe^x}{1+xe^x}\right|+C.$ (Multiplicar el numerador y el denominador por e^x, y poner $xe^x=z$.) 1905. $2e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x}-1)+C.$

1906. $3[(2-\sqrt[3]{x^2})\cos\sqrt[3]{x}+2\sqrt[3]{x}\operatorname{sen}\sqrt[3]{x}]+C.$

1907. $\frac{x\operatorname{arcsen} x}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{1}{2}\ln(1-x^2)+C.$

1908. $x\operatorname{arctg} x-\frac{1}{2}(\operatorname{arctg} x^2)-\frac{1}{2}(\operatorname{arctg} x)^2+C.$

1909. $\ln \frac{|x|}{\sqrt{1+x^2}}-\frac{1}{x}\operatorname{arctg} x-\frac{1}{2}(\operatorname{arctg} x)^2+C$.

1910. $\frac{1}{3}\sqrt{(x^2+2x)^3}+C$. 1911. $\frac{1}{9}(1+e^{3x})^3+C$. 1912. $2e^{\sqrt{x}}+C$.

1913. $e^{-\cos x}+C$. 1914. $C-\frac{2}{3}(1-e^x)^{\frac{3}{2}}$. 1915. $\frac{1}{2}\operatorname{sen} x^2+C$.

1916. $C-\frac{5}{24}(2-3x^{\frac{4}{3}})^{\frac{6}{5}}$. 1917. $C-\frac{1}{3}\ln|1+3x^3-x^6|$.

1918. $\frac{2}{3}\ln(1+x^{\frac{3}{2}})+C$. 1919. $C-\ln(3+e^{-x})$.

1920. $C-\operatorname{arcsen} e^{-x}$. 1921. $2\sqrt{1+x^2+3}\ln(x+\sqrt{1+x^2})+C$.

1922. $\frac{1}{9}[2\sqrt{9x^2-4}-3\ln|3x+\sqrt{9x^2-4}|]+C$.

1923. $2\operatorname{sen}\sqrt{x}+C$. 1924. $\operatorname{arcsen}\frac{\ln x}{\sqrt{3}}+C$. 1925. $C-\frac{1}{2}\ln|1-\ln^2 x|$.

1926. $\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}+\ln(x+\sqrt{x^2+1})+C$.

1927. $\frac{(\operatorname{arctg} x)^{n+1}}{n+1}+C$, si $n\neq-1$, y $\ln|\operatorname{arctg} x|$, si $n=-1$.

1928. $C-2\operatorname{ctg} 2\varphi$. 1929. $2x-\operatorname{tg} x+C$. 1930. $\frac{1}{5}\operatorname{tg}^5 x+C$.

1931. $\frac{2}{45}\sqrt{\operatorname{tg}^5 x}\,(5\operatorname{tg}^2 x+9)+C$. 1932. $\frac{1}{3}(\operatorname{tg} 3x+\ln\cos^2 3x)+C$.

1933. $\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+x-\ln|x+1|+C$. 1934. $C-\frac{1}{x-1}-\frac{1}{2(x-1)^2}$.

1935. $\frac{\sqrt{2+4x}\,(x-1)}{6}+C$. 1936. $x\sqrt{1+2x}-\frac{1}{3}\sqrt{(1+2x)^3}+C$.

1937. $\frac{2}{15}(3x-2a)\sqrt{(a+x)^3}+C$.

1938. $\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\operatorname{sen} 2x+\frac{4}{3}\sqrt{\operatorname{sen}^3 x}-\cos x+C$. 1939. $\frac{a^{mx}b^{nx}}{m\ln a+n\ln b}+C$.

1940. $C-\ln[1-x+\sqrt{5-2x+x^2}]$.

1941. $\frac{1}{3}\ln(3x-1+\sqrt{9x^2-6x+2})+C$. 1942. $\frac{1}{3}\operatorname{arcsen}\frac{3x-2}{\sqrt{2}}+C$.

1943. $C-8\sqrt{5+2x-x^2}-3\operatorname{arcsen}\frac{x-1}{\sqrt{6}}$.

1944. $\frac{1}{2}\ln(x^2+2x+2)+\operatorname{arctg}(x+1)+C$.

1945. $C-\sqrt{3-2x-x^2}-4\arcsin\frac{x+1}{2}$.

1946. $\frac{3}{8}\left[\ln(4x^2-4x+17)+\frac{1}{6}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{4}\right]+C$.

1947. $3\sqrt{x^2+2x+2}-4\ln(x+1+\sqrt{x+2x+2})+C$.

1948. $\ln\frac{(x-4)^2}{|x-3|}+C$.

1949. $\frac{2}{9}\sqrt{9x^2+6x+2}+\frac{13}{9}\ln(3x+1+\sqrt{9x^2+6x+2})+C$.

1950. $C-\ln|2x^2-3x+1|$.

1951. $\frac{29}{45}\operatorname{arctg}\frac{5x+3}{9}-\frac{3}{10}\ln(5x^2+6x+18)+C$.

1952. $\frac{61}{16}\ln|8x+9+4\sqrt{4x^2+9x+1}|-\frac{5}{4}\sqrt{4x^2+9x+1}+C$.

1953. $\frac{1}{3}\sqrt{3x^2-11x+2}+\frac{11}{6\sqrt{3}}\ln\left|x-\frac{11}{6}+\sqrt{x^2-\frac{11}{3}x+\frac{2}{3}}\right|+C$.

1954. $\frac{1}{2}\sqrt{2x^2+3x}-\frac{3}{4\sqrt{2}}\ln\left(x+\frac{3}{4}+\sqrt{x^2+\frac{3x}{2}}\right)+C$.

1955. $\sqrt{(a-x)(x-b)}-(a-b)\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{a-x}{x-b}}+C$.

1956. $x\operatorname{arctg}x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C$. 1957. $\frac{1}{8}\operatorname{sen}2x-\frac{1}{4}x\cos 2x+C$.

1958. $\frac{1}{\omega^3}[(\omega^2x^2-2)\operatorname{sen}\omega x+2\omega x\cos\omega x]+C$.

1959. $e^{2x}\left(\frac{1}{2}x^3-\frac{3}{4}x^2+\frac{3}{4}x-\frac{3}{8}\right)+C$.

1960. $\operatorname{tg}x\cdot\ln(\cos x)+\operatorname{tg}x-x+C$. 1961. $\ln|\ln\operatorname{sen}x|+C$.

1962. $\frac{1}{4}\left[\ln(1+x^4)+\frac{1}{1+x^4}\right]+C$.

1963. $\frac{1}{3}\left(\ln\left|\operatorname{tg}\frac{3x}{2}\right|+\cos 3x\right)+C$. 1964. $\frac{1}{3}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{3x}{2}\right)+C$.

1965. $C-\frac{1}{8}\ln\frac{2+\cos 2x}{2-\cos 2x}$. 1966. $\ln\frac{e^x}{e^x+1}+C$.

1967. $2\ln(e^{\frac{x}{2}}+e^{-\frac{x}{2}})+C$. 1968. $e^{e^x}+C$. 1969. $\frac{1}{4}e^{2x^2}+C$.

1970. $\frac{1}{\sqrt{2}}\left[3\ln(x+\sqrt{1+x^2})+\frac{1}{3}(x^2-2)\sqrt{1+x^2}\right]+C$.

1971. $x-\sqrt{1-x^2}\arcsin x+C$. 1972. $C-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\operatorname{sen}^2x}+\operatorname{ctg}x\right)$.

1973. $\frac{e^x}{2}\left(1-\frac{2\operatorname{sen}2x+\cos 2x}{5}\right)+C$. 1974. $\frac{1}{2}(\operatorname{tg}x+\ln|\operatorname{tg}x|)+C$.

1975. $\ln|\operatorname{sen} x+\cos x|+C$. 1976. $\frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{\varphi}{2}+\frac{\pi}{6}\right)\right|+C$.

1977. $\sec x-\operatorname{tg} x+x+C$. 1978. $\operatorname{sen} x-\operatorname{arctg}\operatorname{sen} x+C$.

1979. $\sqrt{2}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{4}\right|+C$. 1980. $\ln x\cdot\ln\ln x-\ln x+C$.

1981. $\frac{e^{x^2}(x^2-1)}{2}+C$. 1982. $C-\frac{1}{2}e^{-x^2}(x^4+2x^2+2)$.

1983. $\frac{1}{6}(x^2-1)\sqrt{1+2x^2}+C$. 1984. $C-\frac{x(x^2-3)}{2\sqrt{1-x^2}}-\frac{3}{2}\operatorname{arcsen} x$.

1985. $\frac{1}{5}\sqrt{(x^2-a^2)^5}-\frac{a^2}{3}\sqrt{(x^2-a^2)^3}+a^4\sqrt{x^2-a^2}+a^5\operatorname{arcsen}\frac{a}{|x|}+C$.

1986. $\frac{\sqrt{4+x^2}\,(x^2-2)}{24x^3}+C$. 1987. $\frac{\sqrt{(x^2-8)^3}}{24x^3}+C$.

1988. $\frac{\sqrt{(4+x^2)^3}\,(x^2-6)}{120x^5}+C$. 1989. $\frac{\sqrt{x^2-3}\,(2x^2+3)}{27x^3}+C$.

1990. $\frac{4}{3}[\sqrt[4]{x^3}-\ln(\sqrt[4]{x^3}+1)]+C$.

1991. $x+4\sqrt{x+1}+4\ln(\sqrt{1+x}-1)+C$. 1992. $2\operatorname{arctg}\sqrt{1+x}+C$.

1993. $\ln\frac{x}{(\sqrt[6]{x}+1)^6}+C$. 1994. $\sqrt{x^2+2x}+\ln|x+1+\sqrt{x^2+2x}|+C$.

1995*. $\frac{x^6}{8(1-x^2)^4}+C$. (Es conveniente la sustitución $x=\operatorname{sen} u$.)

1996. $\frac{2}{\sqrt{ab}}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{ax}{b}}+C$. 1997. $C\frac{(1+x^8)^{\frac{3}{2}}}{12x^{12}}$.

1998. $\frac{x^2}{2\sqrt{1-x^4}}+C$. 1999. $\frac{1}{4}x^2\sqrt{x^4+4}-\ln(x^2+\sqrt{x^4+4})+C$.

2000. $\ln\left|\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}\right|+C$. 2001. $C-\frac{2}{3}\sqrt{\frac{1-x^3}{x^3}}-\frac{2}{3}\operatorname{arcsen}\sqrt{x^3}$.

2002. $C-\frac{x^3}{4(1+x^2)^2}-\frac{3x}{8(1+x^2)}+\frac{3\operatorname{arctg} x}{8}$.

2003. $\frac{(x^2+1)\operatorname{arctg} x}{\sqrt{x}}-2\sqrt{x}+C$. 2004. $\operatorname{arcsen} e^x-\sqrt{1-e^{2x}}+C$.

2005. $2\sqrt{e^x-1}-2\operatorname{arctg}\sqrt{e^x-1}+C$. 2006*. $C-\frac{1}{2}\ln^2\left(1+\frac{1}{x}\right)$ $\left(\text{sustituyendo } u=1+\frac{1}{x}\right)$. 2007. $\operatorname{arctg} x+\frac{1}{x}-\frac{1}{3x^3}+C$.

2008. $x\arccos\sqrt{\frac{x}{x+1}}-\sqrt{x}-\operatorname{arctg}\sqrt{x}+C$.

2009. $x\ln(x+\sqrt{1+x^2})-\sqrt{1+x^2}+C.$

2010. $\frac{3}{55}\sqrt[3]{\operatorname{tg}^5 x}\,(5\operatorname{tg}^2 x+11)+C.$

2011. $\frac{\sqrt{2}}{5}(\operatorname{tg}^2 x+5)\sqrt{\operatorname{tg} x}+C.$ 2012. $\ln\frac{|x+1|}{\sqrt{2x+1}}+C.$

2013. $\frac{1}{5}\ln[(x-2)^2\sqrt{2x+1}]+C.$ 2014. $\ln\left|\frac{(x-1)^4(x-4)^5}{(x-3)^7}\right|+C.$

2015. $\frac{3}{11}\ln|3x+1|+\frac{2}{33}\ln|2x-3|-\frac{1}{3}\ln|x|+C.$

2016. $\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+4x+\ln\left|\frac{x^2(x-2)^5}{(x+2)^3}\right|+C.$

2017. $\frac{1}{4}x+\ln|x|-\frac{7}{16}\ln|2x-1|-\frac{9}{16}\ln|2x+1|+C.$

2018. $\ln|2x-1|-6\ln|2x-3|+5\ln|2x-5|+C.$

2019. $\sqrt{\frac{x^2-2}{x^2-1}}+C.$

2020. $\frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\left|\frac{x-\sqrt{2}}{x+\sqrt{2}}\right|+\frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\left|\frac{x-\sqrt{3}}{x+\sqrt{3}}\right|+C.$

2021. $\frac{x^2}{2}+\ln\left|\frac{x(x-2)\sqrt{(x-1)(x+1)^3}}{x+2}\right|+C.$

2022. $\ln\left|\frac{x^2}{x+1}\right|+\frac{6}{x+1}+C.$

2023. $4\ln|x|-3\ln|x-1|-\frac{9}{x-1}+C.$

2024. $\frac{4}{x+2}+\ln|x+1|+C.$ 2025. $x+\frac{1}{x}+\ln\frac{(x-1)^2}{|x|}+C.$

2026. $C-\frac{1}{3(x-2)^3}+\frac{1}{2(x-2)^2}+\ln|x-2|.$

2027. $\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C.$ 2028. $2\ln\left|\frac{x+4}{x+2}\right|-\frac{5x+12}{x^2+6x+8}+C.$

2029. $\frac{3}{2(x-2)^2}+\ln|x-5|+C.$

2030. $\frac{x}{8}-\ln|x+1|-\frac{9x^2+12x+5}{3(x+1)^3}+C.$

2031. $\frac{(x+2)^2}{2}+\frac{1}{4(x-1)^2}-\frac{9}{4(x-1)}+\frac{31}{8}\ln|x-1|+\frac{1}{8}\ln|x+1|+C.$

2032. $\frac{1}{x-1}+\ln\frac{\sqrt{(x-1)(x-3)}}{|x|}+C.$

2033. $\frac{3}{2x}-\frac{5}{4}\ln|x|+20\ln|x-3|-\frac{47}{4}\ln|x-2|+C.$

2034. $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x}{x-2}\right|-\frac{1}{x}\left(1+\frac{1}{2x}\right)-\frac{1}{2(x-2)}+C.$

2035. $C-\frac{x}{(x^2-1)^2}.$ **2036.** $\ln\frac{|x|}{\sqrt{x^2+1}}+C.$

2037. $\frac{1}{6}\ln\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1}+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C.$

2038. $\frac{1}{3}\ln\frac{|x-1|}{\sqrt{x^2+x+1}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C.$

2039. $\ln\frac{\sqrt{(x^2-2x+5)^3}}{|x-1|}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x-1}{2}+C,$

2040. $\frac{(x+1)^2}{2}+\ln\frac{|x-1|}{\sqrt{x^2+1}}-\operatorname{arctg}x+C.$

2041. $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x+C.$

2042. $\frac{1}{4}\ln\frac{x^4}{(x+1)^2(x^2+1)}-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x+C.$

2043. $\frac{1}{2}\ln|x+1|-\frac{1}{4}\ln(x^2+1)-\frac{1}{2(x+1)}+C.$

2044. $\frac{1}{4}\left[\ln\frac{\sqrt{x^2+1}}{|x-1|}+\operatorname{arctg}x-\frac{7}{(x-1)^2}\right]+C.$

2045. $\frac{x^2}{2}-2x-\frac{2}{x}+2\ln(x^2+2x+2)-2\operatorname{arctg}(x+1)+C.$

2046. $\ln\frac{x^2+4}{\sqrt{x^2+2}}+\frac{3}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}-\frac{3\sqrt{2}}{2}\operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{2}}{2}+C.$

2047*. $\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1}+\frac{\sqrt{2}}{4}\operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{2}}{1-x^2}+C.$ (En el denominador de la expresión integrando sumar y restar $2x^2$.)

2048. $\frac{2-x}{4(x^2+2)}+\frac{\ln(x^2+2)}{2}-\frac{1}{4+\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}}+C.$

2049. $\frac{1}{16}\ln|x|-\frac{1}{18}\ln(x^2+1)+\frac{7}{288}\ln(x^2+4)-\frac{1}{24(x^2+4)}+C.$

2050. $\frac{13x-159}{8(x^2-6x+13)}+\frac{53}{16}\operatorname{arctg}\frac{x-3}{2}+C.$

2051. $\frac{3}{8}\operatorname{arctg}(x+1)-\frac{5x^3+15x^2+18x+8}{8(x^2+2x+2)^2}+C.$

2052. $\frac{x}{216(x^2+9)}+\frac{x}{36(x^2+9)^2}+\frac{1}{648}\operatorname{arctg}\frac{x}{3}+C.$

2053. $\frac{x-1}{2(x^2+1)}-\frac{1}{2}\ln|x+1|+\frac{1}{4}\ln(1+x^2)+C.$

2054. $\frac{15x^5+40x^3+33x}{48(1+x^2)^3}+\frac{15}{48}\operatorname{arctg} x+C.$

2055. $\frac{1}{4}\left(\frac{2x^6-3x^2}{x^4-1}+\frac{3}{2}\ln\left|\frac{x^2-1}{x^2+1}\right|\right)+C.$

2056. $\frac{x}{x^2+x+1}+\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}-2\ln(x^2+x+1)+\frac{x^4}{4}-\frac{2x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+$
$+2x+C.$

2057. $\frac{3x^2-x}{(x-1)(x^2+1)}+\ln\frac{(x-1)^2}{x^2+1}+\operatorname{arctg} x+C.$

2058. $C-6\ln\left|\frac{x-1}{x}\right|-\frac{12x^2-5x-1}{2(x^3-x^2)}.$

2059. $\frac{1}{x^2(x^2+1)}+\ln\sqrt{x^2+1}+C.$

2060. $\frac{1}{2}\cdot\frac{1+x}{(1+x^2)^2}+\frac{1}{4}\cdot\frac{x-2}{x^2+1}+\frac{1}{4}\operatorname{arctg} x+C.$

2061. $\frac{2}{3}\ln\left|\frac{x^3+1}{x^3}\right|-\frac{1}{3x^3}-\frac{1}{3(x^3+1)}+C.$

2062. $\frac{1}{648}\left[\operatorname{arctg}\frac{x+1}{3}+\frac{3(x+1)}{x^2+2x+10}+\frac{18(x+1)}{(x^2+2x+10)^2}\right]+C.$

2063. $\frac{3}{8}\operatorname{arctg}(x+1)+\frac{3}{8}\cdot\frac{x+1}{x^2+2x+2}+\frac{x}{4(x^2+2x+2)^2}+C.$

2064. $C-\frac{x}{8(x^2+4)}-\frac{2x+5}{2(x^2+4x+5)}-\frac{1}{16}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}-\operatorname{arctg}(x+2).$

2065. $C-\frac{57x^4+103x^2+32}{8x(x^2+1)^2}-\frac{57}{8}\operatorname{arctg} x.$

2066. $\frac{3-7x-2x^2}{2(x^3-x^2-x+1)}+\ln\frac{|x-1|}{(x+1)^2}+C.$

2067. $\left(-\frac{1}{2}x^4+\frac{5}{4}x^2-\frac{3}{5}\right)\frac{1}{x(3-2x^2)^2}+\frac{1}{8\sqrt{6}}\ln\left|\frac{\sqrt{3}+x\sqrt{2}}{\sqrt{3}-x\sqrt{2}}\right|+C.$

2068. $\ln\frac{x}{(1+\sqrt[10]{x})^{10}}+\frac{10}{\sqrt[10]{x}}-\frac{5}{\sqrt[5]{x}}+\frac{10}{3\sqrt[10]{x^3}}-\frac{5}{2\sqrt[5]{x^2}}+C.$

2069. $2\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x}-8\sqrt[4]{x}+6\sqrt[6]{x}+48\sqrt[12]{x}+3\ln(1+\sqrt[12]{x})+$
$+\frac{33}{2}\ln(\sqrt[6]{x}-\sqrt[12]{x}+2)-\frac{171}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{2\sqrt[12]{x}-1}{\sqrt{7}}+C.$

2070. $6\left[\frac{1}{9}(x+1)^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{8}(x+1)^{\frac{4}{3}}+\frac{1}{7}(x+1)^{\frac{7}{6}}-\frac{1}{6}(x+1)+\frac{1}{5}(x+1)^{\frac{5}{6}}-\right.$
$\left.-\frac{1}{4}(x+1)^{\frac{2}{3}}\right]+C.$

2071. $\ln\left|\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}\right|+2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}+C.$

2072. $(\sqrt{x}-2)\sqrt{1-x}-\operatorname{arcsen}\sqrt{x}+C$.

2073. $6\sqrt[3]{(1+x)^2}\left[\frac{(1+x)^2}{16}-\frac{1+x}{5}+\frac{\sqrt{1+x}}{7}+\frac{1}{4}\right]+C$.

2074. $\ln\frac{|u^2-1|}{\sqrt{u^4+u^2+1}}+\sqrt{x}\operatorname{arctg}\frac{1+2u^2}{\sqrt{3}}+C$, donde $u=\sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}}$.

2075*. $\frac{4}{3}\sqrt[4]{\frac{x-1}{x+2}}+C$. Multiplicar el numerador y el denominador de la fracción por $\sqrt[4]{x-1}$, y sacar los multiplicadores fuera del signo de radical.

2076. $\frac{2}{3}x\sqrt{x}+\frac{24}{11}x\sqrt[6]{x^5}+\frac{36}{13}x^2\sqrt[6]{x}+\frac{8}{5}x^2\sqrt{x}+\frac{6}{17}x^2\sqrt[6]{x^5}+C$.

2077. $3\left[\ln\left|\frac{\sqrt[3]{x}}{1+\sqrt[3]{x}}\right|+\frac{2\sqrt[3]{x}+3}{2(1+\sqrt[3]{x})^2}\right]+C$.

2078. $\frac{1}{2}\ln(\sqrt[3]{x^2+1}-1)-\frac{1}{4}\ln[\sqrt[3]{(x^2+1)^2}+\sqrt[3]{x^2+1}+1]+\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{arctg}\times$
$\times\frac{2\sqrt[3]{x^2+1}+1}{\sqrt{3}}+C$.

2079. $\frac{1}{8}\sqrt[3]{(1+x^3)^8}-\frac{1}{5}\sqrt[3]{(1+x^3)^5}+C$.

2080. $\frac{1}{6}\ln\frac{u^2+u+1}{(u-1)^2}-\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2u+1}{\sqrt{3}}+C$, donde $u=\frac{\sqrt[3]{x^3+1}}{x}$.

2081. $\frac{1}{4}\ln\frac{\sqrt[4]{1+x^4}+x}{\sqrt[4]{1+x^4}-x}-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt[4]{1+x^4}}{x}+C$.

2082. $\frac{1}{4}\ln\frac{\sqrt{1-x^4}+1}{x^2}-\frac{1}{4}\frac{\sqrt{1-x^4}}{x^4}+C$.

2083. $\frac{3}{7}(4\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}-3)\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}+C$.

2084. $6u+2\ln\frac{u-1}{\sqrt{u^2+u+1}}-2\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{2u+1}{\sqrt{3}}+C$, donde $u=\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}$

2085. $\frac{1}{5}\ln\frac{|u-1|}{\sqrt{u^2+u+1}}+\frac{\sqrt{3}}{5}\operatorname{arctg}\frac{1+2u}{\sqrt{3}}+C$, dondo $u=\sqrt[3]{1+x^5}$.

2086. $C-\frac{\sqrt[3]{1+x^3}}{x}+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2\sqrt[3]{1+x^3}+x}{x\sqrt{3}}-$
$-\frac{1}{3}\ln\left|\frac{\sqrt[3]{1+x^3}+x}{\sqrt{\sqrt[3]{(1+x^3)^2}+x\sqrt[3]{1+x^3}+x^2}}\right|$.

2087. $C-\frac{1}{10}\sqrt{\left(\frac{1+x^4}{x^4}\right)^5}+\frac{1}{3}\sqrt{\left(\frac{1+x^4}{x^4}\right)^3}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1+x^4}{x^4}}$.

2088. $\frac{u}{2(u^3+1)}-\frac{1}{6}\ln\frac{u+1}{\sqrt{u^2-u+1}}-\frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2u-1}{\sqrt{3}}+C$, donde $u=$
$=\sqrt[3]{\frac{1-x^2}{x^2}}$.

2089. $12\left[\frac{\sqrt[3]{u^{13}}}{13}-\frac{3\sqrt[3]{u^{10}}}{10}+\frac{3\sqrt[3]{u^7}}{7}-\frac{\sqrt[3]{u^4}}{4}\right]+C$, donde $u=1+\sqrt[4]{x}$.

2090. $\frac{1}{15}\cos^3 x\,(3\cos^2 x-5)+C$. **2091.** $\frac{1}{3\cos^3 x}-\frac{1}{\cos x}+C$.

2092. $\ln|\operatorname{tg} x|-\frac{1}{2\operatorname{sen}^2 x}+C$. **2093.** $\operatorname{tg} x+\frac{1}{4}\operatorname{sen} 2x-\frac{3}{2}x+C$.

2094. $\frac{1}{2}(\operatorname{tg}^2 x-\operatorname{ctg}^2 x)+2\ln|\operatorname{tg} x|+C$.

2095. $\frac{(\operatorname{tg}^2 x-1)(\operatorname{tg}^4 x+10\operatorname{tg}^2 x+1)}{3\operatorname{tg}^3 x}+C$. **2096.** $\frac{1}{\cos x-1}+C$.

2097. $\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{x}{2}-\frac{1}{6}\operatorname{ctg}^3\frac{x}{2}+C$.

2098. $\frac{5}{16}x+\frac{1}{12}\operatorname{sen} 2x\left(\cos^4 x+\frac{5}{4}\cos^2 x+\frac{15}{8}\right)+C$.

2099. $x-\frac{1}{3}\operatorname{ctg}^3 x+\operatorname{ctg} x+C$. **2100.** $\frac{1}{4}\operatorname{tg}^4 x-\frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x-\ln|\cos x|+C$.

2101. $x-\frac{1}{7}\operatorname{ctg}^7 x+\frac{1}{5}\operatorname{ctg}^5 x-\frac{1}{3}\operatorname{ctg}^3 x+\operatorname{ctg} x+C$.

2102. $C-\frac{\cos x}{2\operatorname{sen}^2 x}+\frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|$.

2103. $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg} x}\right|+\frac{1}{2}\operatorname{sen} x\cos x+C$.

2104. $C-\frac{1}{1+\operatorname{tg} x}$. **2105.** $\frac{\sqrt{2}}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{8}+\frac{x}{2}\right)\right|+C$.

2106. $\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x+\operatorname{arctg}\frac{a}{b}}{2}\right|+C$.

2107. $\ln\frac{|C\cdot\operatorname{sen} x|}{\sqrt{\cos 2x}}$. **2108.** $\ln\frac{|C\cdot\operatorname{sen} x|}{\sqrt{1-4\operatorname{sen}^2 x}}$.

2109. $\frac{1}{2}[x+\ln|\operatorname{sen} x+\cos x|]+C$. **2110.** $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(2\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)+C$.

2111. $\frac{2}{3}\operatorname{arctg}\frac{5\operatorname{tg}\frac{x}{2}+4}{3}+C$.

2112. $\ln(2+\cos x)+\frac{4}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)+C$.

2113. $\frac{\cos x(\cos x-\operatorname{sen} x)}{4}-\frac{1}{4}\ln|\cos x-\operatorname{sen} x|+C$.

2114. $\frac{4}{25}x-\frac{3}{25}\ln|\operatorname{tg} x+2|+\frac{2}{5(\operatorname{tg} x+2)}-\frac{3}{25}\ln|\cos x|+C$.

2115. $\frac{\cos 2x-15}{15(4+\operatorname{sen} 2x)}+\frac{4}{15\sqrt{15}}\operatorname{arcsen}\frac{4\operatorname{sen} 2x+1}{4+\operatorname{sen} 2x}+C.$

2116. $\frac{1}{2-\operatorname{tg}\frac{x}{2}}+C.$ 2117. $\frac{1}{3}\operatorname{arctg}(3\operatorname{tg} x)+C.$

2118. $\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}(\sqrt{2}\operatorname{tg} x)+C.$

2119. $\frac{1}{2}\operatorname{tg} x+\frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}(\sqrt{2}\operatorname{tg} x)+C.$ 2120 $\frac{1}{ab}\operatorname{arctg}\frac{a\operatorname{tg} x}{b}+C.$

2121. $C-\frac{1}{2}\left[\operatorname{ctg} x+\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}}\right)\right].$

2122. $\ln\frac{|\sqrt[3]{\operatorname{tg} x-1}|}{\sqrt[6]{\operatorname{tg}^2 x+\operatorname{tg} x+1}}-\frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\frac{2\operatorname{tg} x+1}{\sqrt{3}}+C.$

2123. $2\left(\operatorname{sen}\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right)+C$ para los valores de x que satisfacen la desigualdad $\operatorname{sen}\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\geqslant 0$, y $-2\left(\operatorname{sen}\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right)+C$ para los valores de x que satisfacen la desigualdad $\operatorname{sen}\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\leqslant 0$.

2124. $2\sqrt{\operatorname{tg} x}+C.$ 2125*. $C-\frac{4\sqrt{2}}{5}\sqrt{\operatorname{ctg}^5 x}$. (Poner $u=\operatorname{ctg} x$).

2126. $4\sqrt[4]{\operatorname{tg} x}+C.$ 2127. $\frac{1}{\sqrt{2}}\ln(\sqrt{2}\operatorname{tg} x+\sqrt{1+2\operatorname{tg}^2 x})+C.$

2128. $2\operatorname{arcsen}\sqrt{\operatorname{sen} x}+C.$ 2129. $C-\frac{1}{3}\operatorname{tg} x(2+\operatorname{tg}^2 x)\sqrt{4-\operatorname{ctg}^2 x}.$

2130. $$\frac{4}{\sqrt{\cos\frac{x}{2}}}+2\operatorname{arctg}\sqrt{\cos\frac{x}{2}}-\ln\frac{1+\sqrt{\cos\frac{x}{2}}}{1-\sqrt{\cos\frac{x}{2}}}+C.$$

2131. $\frac{1}{\sqrt{2}}[\ln(\operatorname{sen} x+\cos x-\sqrt{\operatorname{sen} 2x})+\operatorname{arcsen}(\operatorname{sen} x-\cos x)]+C.$

2132. $\operatorname{sh} x+C.$ 2133. $\operatorname{ch} x+C.$ 2134. $\operatorname{th} x+C.$ 2135. $x+C.$

2136. $\frac{1}{2a}\operatorname{sh} 2ax+C.$ 2137. $\frac{\operatorname{sh} x\cdot\operatorname{ch} x-x}{2}+C.$

2138. $x-\operatorname{th} x+C.$ 2139. $x-\operatorname{cth} x+C.$ 2140. $\frac{1}{3}\operatorname{ch}^3 x-\operatorname{ch} x+C.$

2141. $\operatorname{sh} x+\frac{1}{3}\operatorname{sh}^3 x+C.$ 2142. $x-\operatorname{th} x-\frac{1}{3}\operatorname{th}^3 x+C.$

2143. $\frac{1}{3}\operatorname{sh}^3 x+\frac{1}{5}\operatorname{sh}^5 x+C.$ 2144. $\ln|\operatorname{sh} x|-\frac{1}{2}\operatorname{cth}^2 x-\frac{1}{4}\operatorname{cth}^4 x+C.$

2145. $\ln|\operatorname{th} x|+C.$ 2146. $\ln\left|\operatorname{th}\frac{x}{2}\right|+C.$ 2147. $\frac{1}{2}\operatorname{th}\frac{x}{2}-\frac{1}{6}\operatorname{th}^3\frac{x}{2}+C.$

2148. $\frac{1}{2}\ln\frac{1+\sqrt{\operatorname{th} x}}{|1-\sqrt{\operatorname{th} x}|}-\operatorname{arctg}\sqrt{\operatorname{th} x}+C$.

2149. $x\operatorname{th} x-\ln\operatorname{ch} x+C$. 2150. $C-\frac{e^{3x}}{3\operatorname{sh}^3 x}$.

2151*. $\ln\frac{|cx|}{2+x+2\sqrt{x^2+x+1}}$. (Se puede aplicar la sustitución, por ejemplo, $x=\frac{1}{z}$.)

2152. $\frac{1}{2}\arccos\frac{2-x}{x\sqrt{2}}+C$. 2153. $\operatorname{arcsen}\frac{x-1}{x\sqrt{2}}+C$.

2154. $C-\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2+x-x^2}+\sqrt{2}}{x}+\frac{1}{2\sqrt{2}}\right|$.

2155. $\ln|x+1+\sqrt{2x+x^2}|-\frac{4}{x+\sqrt{2x+x^2}}+C$.

2156. $C-\frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|\frac{3+3x+2\sqrt{3(x^2+x+1)}}{x-1}\right|$.

2157. $C-\frac{1}{\sqrt{15}}\ln\left|\frac{x+6+\sqrt{60x-15x^2}}{2x-3}\right|$.

2158. $\frac{1}{2}(x-1)\sqrt{x^2-2x-1}-\ln|x-1+\sqrt{x^2-2x-1}|+C$.

2159. $\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{2}\right)\sqrt{3x^2-3x+1}+\frac{1}{8\sqrt{3}}\ln\left|\sqrt{3x^2-3x+1}+\right.$
$\left.+\frac{\sqrt{3}}{2}(2x-1)\right|+C$.

2160. $\frac{1}{2}\left[(x+2)\sqrt{1-4x-x^2}+5\operatorname{arcsen}\frac{x+2}{\sqrt{5}}\right]+C$.

2161. $C-\frac{3}{2(2x-1-2\sqrt{x^2-x+1})}-\frac{3}{2}\ln|2x-1-$
$-2\sqrt{x^2-x+1}|+2\ln|x-\sqrt{x^2-x+1}|$.

2162. $\ln\left|\frac{x+\sqrt{x^2+1}}{x}\right|-\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}+C$.

2163. $\frac{1-\sqrt{x^2+2x+2}}{x+1}+\ln(x+1+\sqrt{x^2+2x+2})+C$.

2164. $\frac{1}{2}(3-x)\sqrt{1-2x-x^2}+2\operatorname{arcsen}\frac{x+1}{\sqrt{2}}+C$.

2165. $x\sqrt{x^2-2x+5}-5\ln(x-1+\sqrt{x^2-2x+5})+C$.

2166. $C-\frac{1}{2}(3x-19)\sqrt{3-2x-x^2}+14\operatorname{arcsen}\frac{x+1}{2}$.

2167. $(x^2-5x+20)\sqrt{x^2+4x+5}-15\ln(x+2\sqrt{x^2+4x+5})+C$.

2168. $\left(\frac{1}{3}x^2-\frac{5}{6}x+\frac{1}{6}\right)\sqrt{x^2+2x+2}+\frac{5}{2}\ln(x+1+\sqrt{x+2x+2})+C$.

2169. $(x^2+5x+36)\sqrt{x^2-4x-7}+112\ln|x-2+\sqrt{x^2-4x-7}|+C.$

2170. $\left(\frac{1}{4}x^3-\frac{7}{6}x^2+\frac{95}{24}x-\frac{145}{12}\right)\sqrt{x^2+4x+5}+$

$+\frac{35}{8}\ln(x+2+\sqrt{x^2+4x+5})+C.$

2171. $\frac{\sqrt{x^2+2x-3}}{8(x+1)^2}+\frac{1}{16}\arccos\frac{2}{x+1}+C.$

2172. $\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{2+2x^2}-x}{\sqrt{2+2x^2}+x}+\ln(x+\sqrt{x^2+1})+C.$

2173. $\frac{\sqrt{2x^2-2x+1}}{x}+C.$

2174. $\ln\frac{\sqrt{x^2+2x+4}-1}{\sqrt{x^2+2x+4}+1}-\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2(x^2+2x+4)}}{x+1}+C.$

2175. $C-\frac{1}{8(x-1)^8}-\frac{1}{3(x-1)^9}-\frac{3}{10(x-1)^{10}}-\frac{1}{11(x-1)^{11}}.$

2176. $\frac{1}{3}[x^2+\sqrt{(x^2-1)^3}]+C.$ 2177. $\frac{3(4x-3a)\sqrt[3]{(a+x)^4}}{28}+C.$

2178. $\frac{1}{m\sqrt{ab}}\operatorname{arctg}\left(e^{mx}\sqrt{\frac{a}{b}}\right)+C.$

2179. $\frac{1}{2}\operatorname{arcsen}x-\frac{x+2}{2}\sqrt{1-x^2}+C.$

2180. $\frac{x^2}{2}-2x+\frac{1}{6}\ln\frac{|x-1|(x+2)^{32}}{|x+1|^3}+C.$

2181. $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x+C.$

2182. $\frac{3}{8}\operatorname{arctg}x-\frac{x}{4(x^4-1)}-\frac{3}{16}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C.$

2183. $2\sqrt{x+1}[\ln|x+1|-2]+C.$

2184. $\left(\frac{1}{2}x+\frac{3}{4}\right)\cos 2x+\left(\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2}x+\frac{9}{4}\right)\operatorname{sen}2x+C.$

2185. $x^2\operatorname{ch}x-2x\operatorname{sh}x+2\operatorname{ch}x+C.$

2186. $x\operatorname{arctg}(1+\sqrt{x})-\sqrt{x}+\ln|x+2\sqrt{x}+2|+C.$

2187. $\ln\left|\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}\right|-\frac{\operatorname{arcsen}x}{x}+C.$

2188. $3e^{\sqrt[3]{x}}(\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}+2)+C.$

2189. $3e^{\sqrt[3]{x}}(\sqrt[3]{x^5}-5\sqrt[3]{x^4}+20x-60\sqrt[3]{x^2}+120\sqrt[3]{x}-120)+C.$

2190. $e^{3x}\left(\frac{1}{3}x^3-x^2+\frac{2}{3}x+\frac{13}{9}\right)+C.$

2191. $2(\operatorname{sen}\sqrt{x}-\sqrt{x}\cos\sqrt{x})+C.$

2192. $\frac{\sqrt{x-1}(3x+2)}{4x^2}+\frac{3}{4}\operatorname{arctg}\sqrt{x-1}+C.$

2193. $\frac{x^2}{2}+\frac{x}{2}\sqrt{x^2-1}-\frac{1}{2}\ln|x+\sqrt{x^2-1}|+C.$

2194. $\ln(x+\sqrt{1+x})^2-\frac{\sqrt{(+x^2)^5}}{5x^5}-\frac{\sqrt{(1+x^2)^3}}{3x^3}-\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}+C.$

2195. $\left(\frac{1}{4}x^3-\frac{3}{8}x\right)\sqrt{x^2+1}+\frac{3}{8}\ln(x+\sqrt{x^2+1})+C.$

2196. $3[\ln|u|-\ln(1+\sqrt{1-u^2})-\operatorname{arcsen}u]+C$, donde $u=\sqrt[3]{x}$.

2197. $\frac{15x^2+5x-2}{4x^2\sqrt{1+x}}+\frac{15}{8}\ln\left|\frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt{1+x}+1}\right|+C.$

2198. $C-\frac{\sqrt{2x+1}}{x}+\ln\left|\frac{\sqrt{2x+1}-1}{\sqrt{2x+1}+1}\right|.$

2199. $\frac{1}{15}\left[\frac{1}{2}\ln\frac{(z-1)^2}{z^2+z+1}-\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{2z+1}{\sqrt{3}}\right]+C$, donde $z=x^5$.

2200. $C-\frac{1}{4}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+\frac{1}{8\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}}.$

2201. $\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}x}{\sqrt{2}}+C.$

2202. $\frac{2}{b^2\operatorname{sen}2\alpha}\ln\left|\frac{\operatorname{sen}(\alpha-x)}{\operatorname{sen}(\alpha+x)}\right|+C$, donde $\alpha=\arccos\frac{a}{b}$, si $a^2<b^2$;

$\frac{1}{a^2\operatorname{sen}\alpha}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}x}{\operatorname{sen}\alpha}+C$, donde $\alpha=\arccos\frac{b}{a}$, si $a^2>b^2$.

2203. $\frac{1}{2}x^2\ln(1+x^3)-\frac{3}{4}x^2+\frac{1}{4}\ln(x^2-x+1)-\frac{1}{2}\ln(x+1)+$
$+\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C.$

2204. $\frac{x}{\ln x}+C$. 2205. $\operatorname{arctg}\sqrt{x^2-1}-\frac{\ln x}{\sqrt{x^2-1}}+C.$

2206. $\frac{1}{2}e^x[(x^2-1)\cos x+(x-1)^2\operatorname{sen}x]+C.$

2207. $\frac{x^2e^{x^2}}{2}+C$. 2208. $\frac{2}{3}\frac{\operatorname{tg}^2x-3}{\sqrt{\operatorname{tg}x}}+C.$

2209. $\frac{1}{4}(\operatorname{tg}^4x-\operatorname{ctg}^4x)+2(\operatorname{tg}^2x-\operatorname{ctg}^2x)+6\ln|\operatorname{tg}x|+C.$

2210. $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}^2x)+C$. 2211. $\ln\left|1+\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+C.$

2212. $\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}x}{\sqrt{2+\operatorname{tg}^2x}}+\ln(\sqrt{2+\operatorname{tg}^2x}+\operatorname{tg}x+C.$

2213. $\ln\frac{x^2+1+\sqrt{x^4+3x^2+1}}{x}+C.$

2214. $C-\frac{1}{\sqrt{15}}\ln\left|\frac{x+6+\sqrt{60x-15x^2}}{2x-3}\right|.$

2215. $\frac{e^x}{1+x}+C$.

2216. $2x\sqrt{1+e^x}-4\sqrt{1+e^x}-2\ln\frac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1}+C$.

2217. $\frac{1}{6}\ln\frac{1+x^2}{x^2}-\frac{\operatorname{arctg} x}{3x^3}-\frac{1}{6x^2}+C$.

2218. $C-\frac{\operatorname{arctg} x}{2(1+x^2)}+\frac{\operatorname{arctg} x}{4}+\frac{x}{4(1+x^2)}$.

2219. $\frac{1}{4}\ln\frac{|x+1|}{\sqrt{x^2+1}}-\frac{\operatorname{arctg} x}{2(1+x)^2}-\frac{1}{4(x+1)}+C$.

2220. $x-\log_2|1-2^x|+\frac{1}{\ln 2}\left[\frac{1}{1-2^x}+\frac{1}{2(1-2^x)^2}+\frac{1}{3(1-2^x)^3}\right]+C$.

2221. $\operatorname{arctg}(e^x-e^{-x})+C$. 2222. $\ln\frac{1+e^x-\sqrt{1+e^x+e^{2x}}}{1-e^x+\sqrt{1+e^x+e^{2x}}}+C$.

2223. $x-\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{1+2\operatorname{tg} x}{\sqrt{3}}+C$.

2224. $\frac{35}{128}x-\frac{1}{4}\operatorname{sen} 2x+\frac{7}{128}\operatorname{sen} 4x+\frac{1}{24}\operatorname{sen}^3 2x+\frac{1}{1024}\operatorname{sen} 8x+C$.

2225. $\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2}\ln(1+x^2)+\frac{1}{(1+x^2)^2}+C$.

2226. $\frac{8}{49(x-5)}-\frac{27}{49(x+2)}+\frac{30}{343}\ln\left|\frac{x-5}{x+2}\right|+C$.

2227. $C-\frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{arctg}(\sqrt{2}\operatorname{ctg} 2x)$. 2228. $x\operatorname{tg}\frac{x}{2}+C$.

2229*. $\frac{1}{\sqrt{2}}\arccos\frac{x\sqrt{2}}{x^2+1}+C$. (Dividir el numerador y el denominador por x^2 y realizar la sustitución $x+\frac{1}{x}=z$.)

2230. $e^{\operatorname{sen} x}(x-\sec x)+C$.

Al capítulo VII

2231. $\frac{2}{3}(\sqrt{8}-1)$. 2232. $\frac{7}{72}$. 2233. $-5(\sqrt[5]{16}-1)$. 2234. $7\frac{2}{3}$.

2235. $\frac{T}{\pi}\cos\varphi_0$. 2236. 12. 2237. $0{,}2(e-1)^5$. 2238. $3\ln\frac{b}{b-a}$.

2239. $\frac{1}{4}$. 2240. $\frac{\pi}{2}$. 2241. $1+\frac{1}{2}\lg e$. 2242. $e-\sqrt{e}$. 2243. $\frac{\pi}{6n}$.

2244. 2. 2245. $\frac{4}{3}$. 2246. $\ln\frac{3}{2}$. 2247. $0{,}2\ln\frac{4}{3}$. 2248. $\operatorname{arctg}\frac{1}{7}$.

2249. $\frac{1}{2}\ln\frac{8}{5}$. 2250. $\frac{\pi}{6}$. 2251. 2. 2252. $\frac{2}{7}$. 2253. $\frac{4}{3}$.

2254. $\frac{\pi}{2\omega}$. 2255. $-0{,}083\ldots$ 2256. $\frac{2}{3}+\frac{\pi}{4}-\alpha+\frac{\operatorname{ctg}^3\alpha}{3}-\operatorname{ctg}\alpha$.

2257. 1. 2258. $-\sqrt{2}/3$. 2259. $1-2/e$. 2260. $\pi/2-1$.

2261. $\frac{\pi(9-4\sqrt{3})}{36}+\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$. 2262. $\pi^3-6\pi$. 2263. $2-\frac{3}{4\ln 2}$.

2264. 1. 2265. $\frac{141a^3\sqrt[3]{a}}{20}$. 2266. $\frac{\pi a^2}{4}$. 2267. $\frac{e^{\pi}-2}{5}$. 2268. $6-2e$.

2269. a) $\frac{8}{15}$; b) $\frac{7\cdot5\cdot3\cdot1}{8\cdot6\cdot4\cdot2}\cdot\frac{\pi}{2}\approx 0{,}429$; c) $\frac{10\cdot8\cdot6\cdot4\cdot2}{11\cdot9\cdot7\cdot5\cdot3}=\frac{256}{693}$.

2270. $J_{m,\,n}=\frac{n-1}{m+n}J_{m,\,n-2}=\frac{m-1}{m+n}J_{m-2,\,n}$.

Si n es impar, se tiene

$$J_{m,\,n}=\frac{(n-1)(n-3)\dots4\cdot2}{(m+n)(M+n-2)\dots(m+3)(m+1)};$$

si m es impar, se tiene

$$J_{m,\,n}=\frac{(m-1)(m-3)\dots4\cdot2}{(m+n)(m+n-2)\dots(n+3)(n+1)};$$

si m es par y n es par, se tiene

$$J_{m,\,n}=\frac{(n-1)(n-3)\dots3\cdot1\cdot(m-1)(m-3)\dots3\cdot1}{(m+n)(m+n-2)(m+n-4)\dots4\cdot2}\cdot\frac{\pi}{2}.$$

2271. $(-1)^n n!\left[1-\frac{1}{e}\left(\frac{1}{n!}+\frac{1}{(n-1)!}+\dots+\frac{1}{1!}+1\right)\right]$.

2272. $\frac{11}{48}+\frac{5\pi}{64}$. 2274*. $\frac{p!q!}{(p+q+1)!}$. Poner $x=\operatorname{sen}^2 z$ y aplicar el resultado del ejercicio 2270. 2275. $7+2\ln 2$. 2276. $2-\frac{\pi}{2}$. 2277. $\frac{32}{3}$.

2278. $\frac{5}{3}-2\ln 2$. 2279. $\ln\frac{e+\sqrt{1+e^2}}{1+\sqrt{2}}$. 2280. $8+\frac{3\sqrt{3}}{2}\pi$.

2281*. $\frac{5}{16}\pi$. Poniendo $x=2z$ transformamos la integral dada en

$$2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\operatorname{sen}^6 z\,dz.$$

2282*. $\frac{8}{35}$. Poner $x=\frac{z}{2}$. 2283. $\frac{\pi}{23}$.

2284. $\sqrt{2}-\frac{2}{\sqrt{3}}+\ln\frac{2+\sqrt{3}}{1+\sqrt{2}}$. 2285. $\frac{8}{15}$. 2286. $\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}$.

2287. $\frac{1}{32}\left(\pi+\frac{7\sqrt{3}}{2}-8\right)$. 2288. $\frac{3}{16}\pi$. 2289. $\frac{\pi}{16}$.

2290 $\frac{\sqrt{3}}{2}+\ln(2-\sqrt{3})$. 2291. $\frac{\pi}{4}$. 2292. $\frac{\sqrt{3}}{24}$. 2293. $\frac{\pi}{3}$.

2294. $\operatorname{arctg}\frac{1}{2}$. 2295. $\frac{\sqrt{6}}{27}+\frac{\pi\sqrt{2}}{48}$. 2296. $\frac{20}{9}$.

2297. $2\ln\frac{6}{5}\approx 0{,}365$. 2298. $\frac{2}{\pi}$; $\frac{1}{2}$. 2299. $2+\ln\frac{2}{e^2+1}$.

2300. Para $a=e$. 2301. $\frac{1}{2}\ln\frac{8}{5}$. 2302. $\frac{2}{45}$.

2303. $8\ln 3-15\ln 2+\frac{13}{8}$. 2304. $\frac{5}{192}(5+7\sqrt[5]{5^3})$. 2305. $\frac{\pi}{6}$.

2306. $a^2[\sqrt{2}-\ln(\sqrt{2}+1)]$. 2307. $\sqrt{3}-\frac{1}{2}\ln(2+\sqrt{3})$. 2308. $\frac{848}{105}$.

2309. $4-\pi$. 2310. $\ln\frac{7+2\sqrt{7}}{9}$. 2311. $\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$.

2312. $\frac{2}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{5}}$. 2313. $\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{6}{7}}$. 2314. $\frac{\pi^4}{16}-3\pi^2+24$.

2315. $\frac{16\pi}{3}-2\sqrt{3}$. 2316. $\frac{19}{27}-\frac{5}{6\sqrt{6}}$. 2317. $\frac{1}{a^2-b^2}\ln\left|\frac{a}{b}\right|$.

2319. $x=2$. 2310. $x=\ln 4$. 2322*. Utilizar las relaciones $4-x^2\geqslant \geqslant 4-x^2-x^3\geqslant 4-2x^2$, que son válidas para $0\leqslant x\leqslant 1$.

2323*. Utilizar las desigualdades

$$\sqrt{1-x^2}\leqslant\sqrt{1-x^{2n}}\leqslant 1,\ \text{donde}\ -1\leqslant x\leqslant 1\ \text{y}\ n\geqslant 1$$

2324. $1{,}098 < I < 1{,}110$.

2325. * Para evaluar la integral por abajo, utilizar la desigualdad $1+x^4 < < (1+x^2)^2$, y para evaluarla por arriba, emplear la desigualdad de Cauchy—Buniakovski.

2326. $I(1)\approx 1{,}66$ es el valor máximo, $I\left(-\frac{1}{2}\right)\approx -0{,}11$ es el valor mínimo.

2327. El mínimo existe para $x=1$ $(y=-17/12)$, los puntos de inflexión son $(2, -4/3)$ y $(4/3, -112/81)$.

2332*. a) Sustituir la variable de la integración de acuerdo con la fórmula $t=-x$, dividir el intervalo $[-a, -x]$ en dos intervalos, a saber $[-a, a]$ y $[a, -x]$ teniendo en cuenta que la integral de una función impar sobre el intervalo $[-a, a]$ es igual a cero. b) No, si $a\neq 0$; sí, si $a=0$.

2333*. Poner $t=1/z$.

2338. Cada una de las integrales es igual a $\pi/4$.

2339*. Poner $x=\pi-z$. La integral es igual a $\pi^2/4$.

2342*. Dividir el intervalo de integración $[a, a+T]$ en los intervalos $[a, 0]$, $[0, T]$ y $[T, a+T]$, y luego, valiéndose de la propiedad $f(x)=f(x+T)$, demostrar que

$$\int_0^a f(x)\,dx=\int_T^{a+T} f(x)\,dx.$$

2341. La igualdad que debe ser demostrada equivale a la igualdad

$$\int_x^{x+T} f(z)\,dz=0.$$

Quedar convencido de que la integral en el miembro izquierdo de esta igualdad no depende de x, y poner luego $x = -\frac{T}{2}$. **2342.** $\frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots 2n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n+1)}$.

2343. La sustitución $z = \operatorname{tg} x/2$ no es válida porque la función $\operatorname{tg} x/2$ es discontinua para $x = \pi$.

2344. Para evaluar I_n valerse de que I_n decrece creciendo n.

2345*. Sustituir la variable de la integración de acuerdo con la fórmula $z = \frac{x+t}{2}$ y tomar en consideración la propiedad de la integral de una función par.

2346*. Sustituir la variable de la integración de acuerdo con la fórmula $z = k\omega^2 x^2$, y luego aplicar la regla de l'Hospital.

2347. De acuerdo con la regla de los rectángulos, $\pi \approx 2{,}904$ (por defecto) y $\pi \approx 3{,}305$ (por exceso). De acuerdo con la fórmula de los trapecios, $\pi \approx \approx 3{,}104$. De acuerdo con la fórmula de Simpson, $\pi \approx 3{,}127$.

2348. De acuerdo con la regla de los rectángulos, $\pi \approx 3{,}04$ (por defecto) y $\pi \approx 3{,}24$ (por exceso). De acuerdo con la fórmula de los trapecios, $\pi \approx 3{,}140$. De acuerdo con la fórmula de Simpson, $\pi \approx 3{,}1416$ (todas las cifras son exactas).

2349. $\ln 10 \approx 2{,}31$, $M = \frac{1}{\ln 10} \approx 0{,}433$. **2350.** $\approx 0{,}837$.

2351. $\approx 1{,}09$. **2352.** $\approx 2{,}59$. **2353.** $\approx 0{,}950$. **2354.** $\approx 1{,}53$.

2355. $\approx 0{,}985$. **2356.** $\approx 0{,}957$. **2357.** ≈ 239 m^2 (por la fórmula de Simpson).

2358. $\approx 5{,}7$ m^2 (por la fórmula de Simpson). **2359.** ≈ 1950 mm^2.

2360. $\approx 10{,}9$. **2361.** $\approx 36{,}2$. **2362.** $\approx 98{,}2$. **2363.** $\approx 9{,}2$.

2364. ≈ 569 mm^2. **2365.** ≈ 138 mm^2. **2366.** 1/3. **2367.** Diverge.

2368. $1/a$. **2369.** Diverge. **2372.** π.

2371. Diverge.

2372. $1 - \ln 2$. **2373.** $\frac{1}{2}$. **2374.** $\frac{\pi}{4}$. **2375.** $\ln \frac{\sqrt{a^4+1}+1}{a^2}$.

2376. 1/2. **2377.** 1/2. **2378.** Diverge. **2379.** 2. **2380.** 1/2.

2381. $\frac{a}{a^2+b^2}$, si $a > 0$, diverge, si $a \leqslant 0$. **2382** $\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \ln 2$.

2383. $\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$. **2384.** $\frac{\pi}{2}$. **2385.** $\frac{1}{2} + \frac{\pi}{4}$.

2386. Converge.

2387. Diverge. **2388.** Converge. **2389.** Diverge.

2390. Converge. **2391.** Diverge. **2392.** Diverge.

2393. Converge. **2394.** $\pi/2$. **2395.** Diverge. **2396.** 8/3.

2397. $-1/4$. **2398.** 1. **2399.** Diverge. **2400.** 2. **2401.** π.

2402. $\frac{1}{2}\pi(a+b)$. **2403.** $\frac{33\pi}{2}$. **2404.** $\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$. **2405.** $\frac{\pi}{\sqrt{3}}$.

2406. $14\frac{4}{7}$. **2407.** $\frac{10}{7}$. **2408.** Diverge. **2409.** $6 - \frac{9}{2}\ln 3$.

2410. $-2/e$. **2411.** Diverge. **2412.** Converge. **2413.** Diverge.

2414. Converge. **2415.** Converge. **2416.** Diverge. **2417.** Converge.

2418. No. **2419.** Cuando $k < -1$ converge, cuando $k \geqslant -1$ diverge.

2420. 1) Cuando $k > 1$ converge, cuando $k \leqslant 1$ diverge,

2) $I = \frac{1}{(k-1)(\ln 2)^{k-1}}$, si $k > 1$; diverge si $k \leqslant 1$.

2421. Para $k<1$ converge, para $k \geqslant 1$ diverge.
2422. Diverge para cualquier k.
2423. Converge a condición de que se verifiquen simultáneamente las desigualdades $k>-1$ y $t>k+1$.
2424. Para $m<3$ converge, para $m \geqslant 3$ diverge.
2425. Para $k<1$ converge, para $k \geqslant 1$ diverge.
2426. π. **2427*.** $5\pi/3$. Poner $x=\cos\varphi$ y efectuar la integración por partes.

2428. $\dfrac{3+2\sqrt{3}}{4}\pi-\dfrac{3}{2}\ln 2$.

2429. $\dfrac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-3)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots(2n-2)}\cdot\dfrac{\pi}{2a^{2n-1}}$.

2430. $n!$. **2431.** $n!/2$. **2432.** $(-1)^n n!$

2433*. a) $\dfrac{(m-1)(m-3)\ldots 3\cdot 1}{m(m-2)\ldots 4\cdot 2}\,\dfrac{\pi}{2}$; b) $\dfrac{(m-1)(m-3)\ldots 4\cdot 2}{m(m-2)\ldots 3\cdot 1}$. Poner $x=\operatorname{sen}\varphi$. **2434*.** $2\,\dfrac{2n(2n-2)\ldots 4\cdot 2}{(2n+1)(2n-1)\ldots 3\cdot 1}$. Poner $x=\operatorname{sen}^2\varphi$.

2435. $\dfrac{\pi-\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}$ ($I=1$ cuando $\alpha=\pi$).

2436*. Para demostrar la igualdad de las integrales poner en una de ellas $x=1/z$. Luego, calcular su suma valiéndose de la identidad

$$\frac{1+x^2}{1+x^4}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+x^2+x\sqrt{2}}+\frac{1}{1+x^2-x\sqrt{2}}\right).$$

2437*. Presentar la integral como la suma de dos integrales: $\int\limits_0^\infty = \int\limits_0^1+\int\limits_1^\infty$; en la segunda poner $x=\dfrac{1}{y}$. **2438.** 0. **2439.** $\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{\pi}{a}}$.

2440. $\sqrt{\pi}$. **2441*.** $\sqrt{\pi}/4$. Efectuar la integración por partes.

2442. $\dfrac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}{2^n}\,\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$. **2443.** $\dfrac{\pi}{2}$.

2444. $\pi/2$, si $a>0$; 0, si $a=0$; $-\pi/2$, si $a<0$.
2445. $\pi/2$, si $a>b$; $\pi/4$, si $a=b$; 0, si $a<b$.
2446*. $\pi/2$. Efectuar la integración por partes.
2447*. $\pi/4$. Presentar el numerador como la diferencia de los senos de los arcos múltiples.
2448*. $\pi/4$. Emplear los mismos métodos que los que fueron utilizados en los ejercicios 2446 y 2447.

2449*. Poniendo $y=\dfrac{\pi}{2}-z$, hacemos que $\varphi(x)$ tenga la forma $\varphi(x)= = \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}-x} \ln\operatorname{sen} z\,dz$. De acuerdo con la fórmula $\operatorname{sen} z=2\operatorname{sen}\dfrac{z}{2}\cos\dfrac{z}{2}$ dividimos la integral en tres, una de las cuales se halla directamente. Aplicando el procedimiento del cambio de las variables las otras dos integrales se reducen a las integrales del tipo inicial; $\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}\ln 2$.

2450. $-\frac{\pi}{2}\ln 2$. **2451.** $-\frac{\pi^2}{2}\ln 2$.

2452*. $\frac{\pi}{2}\ln 2$. Efectuar la integración por partes.

2453*. $\frac{\pi}{2}\ln 2$. Aplicando el cambio de la variable, se reduce al ejercicio anterior.

2454. $-\frac{\pi}{2}\ln 2$.

Al capítulo VIII

2455. $\frac{16}{3}$. **2456.** $\frac{9}{4}$. **2457.** $\frac{16}{3}p^2$. **2458.** $\frac{1}{3}$. **2459.** $\frac{32}{3}\sqrt{6}$

2460. $2\frac{1}{4}$. **2461.** $2\pi+\frac{4}{3}$ y $6\pi-\frac{4}{3}$.

2462. $\frac{4}{3}(4\pi+\sqrt{3})$ y $\frac{4}{3}(8\pi-\sqrt{3})$.

2464. $\frac{b^2c}{a}-ab\ln\frac{c+b}{a}=b\,[\varepsilon b-a\ln(\varepsilon+\sqrt{\varepsilon^2-1})]$, donde ε es la excèntricidad.

2465. $a^2\left[\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{2}}{8}\ln(\sqrt{3}+\sqrt{2})\right]$; $a^2\left[\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{2}}{8}\ln(\sqrt{3}+\sqrt{2})\right]$; y $a^2\left[\frac{2\pi}{3}+\frac{\sqrt{2}}{4}\ln(\sqrt{3}+\sqrt{2})\right]$.

2466. $S_1=S_3=\pi-\frac{\sqrt{2}}{2}\ln 3-2\arcsen\sqrt{\frac{2}{3}}\approx 0{,}46$; $S_2=2(\pi-S_1)$.

2467. $\frac{\pi}{2}-\frac{1}{3}$. **2468.** $\frac{1}{12}$. **2469.** $\frac{1}{12}$.

2470. $\left|\frac{m-n}{m+n}\right|$; $4\left|\frac{m-n}{m+n}\right|$, si m y n son pares; $2\left|\frac{m-n}{m+n}\right|$, si m y n son impares; $\left|\frac{m-n}{m+n}\right|$, si m y n son de paridad distinta.

2471. a) $\frac{3}{14}$; b) $73\frac{1}{7}$.

2472. 1 (la figura consta de dos partes cuyas áreas son iguales entre sí).

2473. $\frac{8}{15}$. **2474.** $\frac{3}{4}\pi$. **2475.** $\frac{4}{3}$.

2476. $\frac{\pi a^2}{8}$. 2477. $8\left(\sqrt{1+\frac{2}{3}\sqrt{3}}-\operatorname{arctg}\sqrt{1+\frac{2}{3}\sqrt{3}}\right)$.

2478. $e+\frac{1}{e}-2$. 2479. 4. 2480. $\frac{3}{e}(e^3-4)$. 2481. $\frac{18}{e^2}-2$.

2482. a) $b(\ln b-1)-a(\ln a-1)$; b) $b-a$. 2483. $3-e$.

2484. $\frac{3-2\ln 2-2\ln^2 2}{16}$. 2485. $2-\sqrt{2}$. 2486. $\frac{1}{3}+\ln\frac{\sqrt{3}}{2}$.

2487. $\frac{5}{3}\sqrt{2}$. 2488. $\sqrt{2}-1$. 2489. $\frac{\pi}{4}$. 2490. $3\pi a^2$.

2491. $\frac{3}{8}\pi a^2$. 2492. $6\pi a^2$.

2493. 1) $\frac{\pi R^2}{n^2}(n+1)(n+2)$; 2) $\frac{\pi R^2}{n^2}(n-1)(n-2)$.

2494. 1) $\frac{72}{5}\sqrt{3}$; 2) $\frac{8}{15}$. 2495. 1) $\frac{4}{3}\pi^3 a^2$; 2) $\frac{76a^2\pi^3}{3}$.

2496. $\frac{\pi a^2}{4}$ (rosa de dos pétalos). 2497. $\frac{\pi a^2}{4}$. 2498. $18\pi a^2$.

2499. $\frac{a^2}{8}(4-\pi)$. 2500. $\frac{37\pi}{6}-5\sqrt{3}$. 2501. $\frac{51\sqrt{3}}{16}$. 2502. a^2.

2505*. $a^2\frac{5\pi+18\sqrt{3}}{32}$. Para construir la línea conviene considerar la variación de φ desde 0 hasta 3π. 2506. $\frac{\pi}{4}$. 2507. a^2.

2508. $a^2\left(1+\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

2509. $\frac{\pi}{2}(a^2+b^2)$. 2510. a^2, 2511. $\pi\sqrt{2}$. 2512. π. 2513. 2.

2514. $3\pi a^2$, 2515. 4π, 2516*. 1) $\sqrt{\pi}/2$; 2) $\sqrt{\pi}$. Valerse de que $\int\limits_0^\infty e^{-x^2}\,dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ (integral de Poisson).

2517. $\frac{\pi a^2}{2}$. 2518. $2-\frac{\pi}{2}$ y $2+\frac{\pi}{2}$. 2519. $a\operatorname{sh}\frac{b}{a}$.

2520. $\frac{y}{2p}\sqrt{y^2+p^2}+\frac{p}{2}\ln\frac{y+\sqrt{y^2+p^2}}{p}$. 2521. $1+\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$.

2522. $\ln 3-\frac{1}{2}$. 2523. $\ln\frac{e^b-e^{-b}}{e^a-e^{-a}}$. 2524. $\frac{8}{9}\left(\frac{5}{2}\sqrt{\frac{5}{2}}-1\right)$.

2525. $4\frac{26}{27}$. 2526. $4a\sqrt{3}$. 2527. $\frac{\pi}{2}+2\ln\operatorname{tg}\frac{3\pi}{8}=\frac{\pi}{2}+2\ln(\sqrt{2}+1)$.

2528. $\frac{1}{6}+\frac{1}{4}\ln 3$. 2529. 2. 2530. 8.

2531. Para $t=\frac{2\pi}{3}$; $\left[x=a\left(\frac{2\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right),\ y=\frac{3a}{2}\right]$.

2532. Para $t=\frac{\pi}{6}$, $\left(x=\frac{3\sqrt{3}}{8}R,\ y=\frac{R}{8}\right)$.

2533*. $4\frac{a^2+ab+b^2}{a+b}$. Poner $x=a\cos^3 t$, $y=b\operatorname{sen}^3 t$.

2534. $5a\left[1+\frac{1}{2\sqrt{3}}\ln(2+\sqrt{3})\right]$. 2535. $a\ln\frac{a}{y}$. 2536. $\frac{\pi^2}{2}R$.

2537. $\pi^3/3$. 2538. $4\sqrt{3}$. 2541. $2(e^t-1)$. 2543. $\pi a\sqrt{1+4\pi^2}+$ $+\frac{a}{2}\ln(2\pi+\sqrt{1+4\pi^2})$. 2545. $\ln\frac{3}{2}+\frac{5}{12}$.

2546. $8a$. 2547. $\frac{3}{2}\pi a$.

2549. k debe tener la forma $\frac{2N+1}{2N}$ ó $\frac{2N}{2N-1}$, donde N es un entero.

2550. 4. 2551. $\ln\frac{\pi}{2}$. 2554*. Demostrar que la longitud de la elipse es susceptible de ser escrita en la forma

$$L=4\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\sqrt{a^2\cos^2 t+b^2\operatorname{sen}^2 t}+\sqrt{a^2\operatorname{sen}^2 t+b^2\cos^2 t}\right)dt,$$

y aplicar el teorema sobre la evaluación de la integral. 2555. 2π. 2556. 1) $\frac{4}{3}\pi ab^2$; 2) $\frac{4}{3}\pi a^2 b$.

2557. $\frac{8}{15}\pi h^2 a$. 2558. $\frac{\pi h^2}{3}(3a+h)$. 2559. $\frac{\pi}{4}(e^2-1)$.

2560. $\frac{\pi}{4}\left[\frac{e^{2b}-e^{-2b}}{2}-\frac{e^{2a}-e^{-2a}}{2}+2(b-a)\right]$. 2561. $\frac{3\pi}{10}$.

2562. $\frac{\pi}{2}(15-16\ln 2)$. 2563. $\pi\left(\frac{\pi^2}{4}-2\right)$. 2564. $\frac{8\pi}{3}$. 2565. $2\pi^2$.

2566. $\frac{\pi a^3}{4}\left[\sqrt{2}\ln(1+\sqrt{2})-\frac{2}{3}\right]$. 2567. 1) $\frac{2}{3}\pi a^3$; 2) $\frac{\pi^2}{16}$. 2568. $5\pi^2 a^3$.

2569. $\pi a^3\left(\frac{3\pi^2}{2}-\frac{8}{3}\right)$. 2570. $\frac{32}{105}\pi a^3$. 2571. $\frac{16\pi c^6}{105ab^2}$, 2572. $\frac{\pi^2}{2}$.

2573. $\frac{\pi e}{2}$. 2574*. 1) π; 2) $\pi\sqrt{\frac{\pi}{2}}$. Véase la indicación al ejercicio 2516.

2575*. $\frac{3\pi\sqrt{2\pi}}{32}$. Véase la indicación al ejercicio 2516.

2576*. π^2. Valerse de que $\int\limits_0^{\infty}\frac{\operatorname{sen} x}{x}dx=\frac{\pi}{2}$ (integral de Dirichlet).

2577*. $2\pi^2 a^3$. Es conveniente pasar a la forma paramétrica poniendo $x=2a\operatorname{sen}^2 t$, $y=\dfrac{2a\operatorname{sen}^3 t}{\cos t}$. 2578. $\dfrac{2}{3}\pi a^3$. 2579*. $\dfrac{4}{3}\pi abc$. Aplicar la fórmula $V=\displaystyle\int_{x_1}^{x_2} S(x)\,dx$, donde $S(x)$ es el área de la sección transversal.

2580. 1) $\pi\sqrt{2}$; 2) 36π.

2581. $v_1=\pi\sqrt{2}\left(2\sqrt{6}-\dfrac{11}{3}\right)$, $v_2=\pi\sqrt{2}\left(2\sqrt{6}+\dfrac{11}{3}\right)$.

2582. $v_1=v_3=4\pi(\sqrt{6}+\sqrt{3}-4)$, $v_2=8\pi(4-\sqrt{3})$.

2583. $\dfrac{8\pi\sqrt{6}}{3}$. 2584. 8π.

2585*. $\dfrac{2}{3}R^2H=400$ cm³. El eje de la simetría de la base debe ser tomado por el de abscisas.

2586. $\dfrac{4}{15}ahH=128$ cm³. 2587. $\dfrac{2}{3}abH=133\dfrac{1}{3}$ cm³.

2588*. $\dfrac{2}{3}\pi R^2H$. El área del segmento parabólico simétrico es igual a $\dfrac{2}{3}ah$, donde a es la base del segmento y h, la «flecha».

2589*. $\dfrac{R^2H}{6}\left(\pi+\dfrac{4}{3}\right)$ y $\dfrac{R^2H}{6}\left(\pi-\dfrac{4}{3}\right)$. (Véase la indicación al ejercicio 2588).

2590. $\dfrac{8}{3}a^3$. 2591. $\dfrac{8}{3}\pi r^3$. 2592. $\dfrac{16}{3}R^3$. 2593. $\dfrac{4}{3}R^2H$.

2594. $\dfrac{56}{3}\pi a^2$. 2595. $\dfrac{\pi}{9}\left(\sqrt{(1+a^4)^3}-1\right)$. 2596. $\dfrac{\pi a^2}{4}(e^2-e^{-2}+4)$.

2597. $2\pi b^2+\dfrac{2\pi ab}{\varepsilon}\operatorname{arcsen}\varepsilon$ y $2\pi a^2+\dfrac{\pi b^2}{\varepsilon}\ln\dfrac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}$, donde ε es la excentricidad de la elipse. 2598. $2\pi[\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2})]$.

2599. $\pi\left[\sqrt{5}-\sqrt{2}+\ln\dfrac{2\sqrt{2}+2}{\sqrt{5}+1}\right]$. 2600. $3\pi a^2$.

2601. $\pi a^2\sqrt{2}\left(2-\dfrac{\pi}{2}\right)$. 2602. $\dfrac{2\pi\sqrt{2}}{5}(e^{\pi}-2)$. 2603. $\dfrac{12}{5}\pi a^2$.

2604. $8\pi a^2\left(\pi-\dfrac{4}{3}\right)$. 2605. $\dfrac{32}{5}\pi a^2$. 2606. $4\pi^2 r^2$.

2607. $2\pi a^2(2-\sqrt{2})$. 2608. $\pi[\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2})]$. 2609. $4\pi a^2$.

2610. $\dfrac{ah^2}{2}$. 2611. $\dfrac{a^3}{6}$, $\dfrac{a^3}{6}$, $\dfrac{a^2\sqrt{2}}{12}$.

2613. El centro de gravedad se halla en el eje de la simetría del segmento mediando entre dicho centro y la base la distancia igual a $\frac{2}{5}h$.

2614. Para $S_1: \xi=\frac{3}{5}a,\ \eta=\frac{3}{8}b$; para S_2: $\xi=\frac{3}{10}a,\ \eta=\frac{3}{4}b$.

2615. $\xi=0,\ \eta=\frac{2r}{\pi}$. **2616.** $\xi=0,\ \eta=\frac{4r}{3\pi}$.

2617. El centro de gravedad se halla en la bisectriz del ángulo central que subtiende el arco, mediando entre dicho centro y el centro de la circunferencia la distancia igual a $2r\frac{\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}}{\alpha}$.

2618. $\xi=\frac{a}{5},\ \eta=\frac{a}{5}$. **2619.** $\xi=\frac{4a}{3\pi},\ \eta=\frac{4b}{3\pi}$.

2620. $\frac{b^2}{2}+\frac{ab}{2\varepsilon}\operatorname{arcsen}\varepsilon$, donde ε es la excentricidad de la elipse.

2621. $\xi=\frac{\pi}{2},\ \pi=\frac{\pi}{8}$. **2622.** $\frac{\pi}{2}+\frac{4}{5}$. **2623.** $\frac{\pi}{12}+\frac{\sqrt{3}}{8}$. **2624.** $\frac{3}{20}$.

2625. $\xi=\frac{5}{8}a,\ \eta=0$. **2626.** $\xi=0,\ \eta=a\frac{e^4+4e^2-1}{4e(e^2-1)}$.

2628. $\xi=\pi a,\ \eta=\frac{4}{3}a$. **2629.** $\xi=\pi a,\ \eta=\frac{5}{6}a$.

2630. $\xi=\frac{2}{5}a,\ \eta=\frac{2}{5}a$. **2631.** $\xi=\frac{256a}{315},\ \eta=\frac{256a}{315\pi}$.

2633. $\xi=\frac{6a(4-\pi^2)}{\pi^3},\ \eta=\frac{2a(\pi^2-6)}{\pi^2}$.

2634. El centro de gravedad se halla en el eje de la simetría del sector, mediando entre dicho centro y el centro del círculo la distancia igual a $\frac{2}{3}\frac{r\operatorname{sen}\alpha}{\alpha}$.

2635. $\xi=\frac{5}{5}a,\ \eta=0$. **2636.** $\xi=\frac{\sqrt{2}}{8}\pi a,\ \eta=0$.

2638. $\xi=-\frac{a}{5}\frac{2e^{2\pi}+e^{\pi}}{e^{\pi}-e^{\frac{\pi}{2}}},\quad \eta=\frac{a}{5}\frac{e^{2\pi}-2e^{\pi}}{e^{\pi}-e^{\frac{\pi}{2}}}$.

2639. $\xi=\frac{4}{5}a,\ \eta=\frac{4}{5}a$. **2640.** $\frac{3}{8}R$.

2641. El centro de gravedad se halla en el eje de la simetría, mediando entre dicho centro y el centro de la semiesfera la distancia igual a $R/2$.

2642. $\frac{H}{3},\ \frac{H\sqrt{R^2+H^2}}{3(R+\sqrt{R^2+H^2})},\ \frac{H}{4}$. **2643.** $\frac{h}{3}$.

2644. $\frac{l}{3}(a^2+ab+b^2)$. **2645.** $\frac{\pi R^3}{2}=M\frac{R^2}{2}$ (M es la masa de la semicircunferencia).

2646. $\frac{\sqrt{(1+e)^3}-2\sqrt{2}}{3}$. 2647. $I_x=\frac{256}{15}a^3$; $I_y=16a^3\left(\pi^2-\frac{128}{45}\right)$.

2648. $\frac{ab^3}{3}$. 2649. 1) $\frac{bh^3}{12}$; 2) $\frac{bh^3}{4}$; 3) $\frac{bh^3}{36}$. 2650. $\frac{\pi R^4}{8}$. 2651. $\frac{\pi R^4}{2}$.

2652. $\frac{\pi}{4}ab^3$ y $\frac{\pi}{4}ba^3$. 2653. $\frac{1}{2}\pi R^4H$. 2654. $\frac{1}{10}\pi R^4H$.

2655. $\frac{8}{15}\pi R^5$.

2656. $\frac{8}{15}\pi ab^4$, donde $2a$ es la magnitud del eje alrededor del cual se efectúa la revolución.

2657. $\frac{1}{6}\pi R^4H$. 2658. $\frac{56\pi}{15}$. 2659. 1) $I_x=\frac{\pi(e^4-1)}{8}$; 2) $I_y=4\pi(3-e)$.

2660. MR^2, donde M es la masa de la superficie lateral del cilindro.

2661. $\frac{1}{2}MR^2$. 2662. $\frac{2}{3}MR^2$. 2663. $\frac{9}{2}\pi a^3$. 2664. $6\pi^2ab^2$.

2665. El volumen es igual a $\frac{3\sqrt{2}}{8}\pi^2a^3$, la superficie, $6\sqrt{2}\pi a^2$.

2666. El volumen es igual a $12\pi^3a^3$, la superficie, $32\pi^2a^2$.

2667. El eje de revolución debe ser perpendicular respecto a la diagonal del cuadrado; el eje de revolución debe ser perpendicular respecto a la mediana.

2668. $\approx 23{,}7$ m. 2669. $x_2=x_1+\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi t_2}{T}+\varphi_0\right)-\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi t_1}{T}+\varphi_0\right)$.

2670. $\frac{kmM}{a(a+l)}$, $\frac{a+l}{a}M$, $\frac{kmM}{l}\ln\frac{r_1(r_2+l)}{r_2(r_1+l)}$. 2671. $\frac{2kmM}{\pi r^2}$.

2672. $\frac{kmMa}{\sqrt{(R^2+a^2)^3}}=\frac{kmM\cos^3\varphi}{a^2}$, donde φ es el ángulo formado entre las rectas que unen el punto C con el centro del anillo y con cualquiera de los puntos del mismo; $\frac{kmM}{R}$.

2673. $\frac{2kmM}{R^2}\left(1-\frac{a}{\sqrt{a^2+R^2}}\right)$. 2674. $2\pi km\sigma$.

2675*. $2\pi km\gamma h\left(1-\frac{h}{\sqrt{h^2+(R-r)^2}}\right)=2\pi km\gamma h(1-\cos\alpha)$, donde α es el ángulo formado entre la generatriz del cono y su eje. Valerse de la solución del ejercicio 2673.

2676. $2km\gamma$ 2678*. $\frac{kM^2}{l^2}\ln\frac{4}{3}$. Primero, es necesario calcular la fuerza de interacción del elemento ds de la primera barra y la segunda (valerse del resultado del ejercicio 2670), y, luego, calcular la atracción total.

2679. $\frac{g^2M^3}{6m^2}$. 2680. $\frac{\pi H^2d}{12}(R^2+2Rr+3r^2)$.

2681. $\approx 1{,}63\cdot 10^{11}$ *kgm*. 2682. 353 250 *kgm*.

2683. $\frac{\pi dR^2H^2}{12}$, $\frac{\pi dR^2H^2}{4}$. En las respuestas a los ejercicios 2683—2686 el valor del trabajo se indica en *kgm*, si la distancia se mide en metros, el peso específico, en kgf/m^3.

2684. $\frac{\pi dR^4}{4} \approx 101{,}8$ *kgm*. **2685.** $\frac{\pi dR^2H^2}{6} \approx 26\,800$ *kgm*.

2686. $\frac{4}{15} dabH^2 = 240$ *kgm*. **2687.** $\frac{Sl^3\omega^2\gamma}{6} \approx 0{,}418$ $kgm \approx 4{,}2$ *julios*.

2688. $\frac{ab^3 d\gamma\omega^2}{6} \approx 1{,}16$ *kgm*. **2689.** $\frac{ah^3 d\omega^2\gamma}{24} \approx 0{,}05$ *kgm*.

2690. $\frac{ha^3 d\omega^2\gamma}{60} \approx 0{,}015$ *kgm*. **2691.** $\frac{\pi R^4 H\omega^2\gamma}{4}$.

2692. $\frac{MR^2\pi^2n^2}{3600}$; $\frac{MR^2(3\pi-8)\pi n^2}{3600}$.

2693. a) $\frac{ah^2}{6}$; b) dos veces. **2694.** $\frac{a^3\sqrt{2}}{2}$. **2695.** 22,2 *m*.

2696. $\frac{2}{3} da^2b$. **2697.** $abd\left(h+\frac{b}{2}\operatorname{sen}\alpha\right)$.

2699. a) $\frac{d^2H^2S}{2} = 32$ *kgm*, b) $\frac{1}{2} SH^2(1-d)^2 = 2$ *kgm*.

2700. $\frac{4}{3}\pi R^4$. **2701.** $\approx 0{,}206$ cm². **2702.** a) $\approx 33{,}2$ *s*; b) $\approx 64{,}6$ *s*.

2703. ≈ 1 hora 6 minutos 53 segundos. **2704.** $\frac{2bL\sqrt{2a}}{3S\sqrt{g}}(2\sqrt{2}-1)$.

2705. $\frac{2b\sqrt{2g}}{3}\left[(H+h)^{\frac{3}{2}} - H^{\frac{3}{2}}\right]$; para $H=0$: $\frac{2b\sqrt{2g}}{3} h^{\frac{3}{2}} =$
$= \frac{2\sqrt{2g}}{3} S\sqrt{h}$, donde S es el área de la hendidura.

2706. a) $\approx 2{,}4$ *s*; b) $\approx 6{,}3$ *s*; c) ≈ 53 *s*; d) para $t \to \infty$.

2707. $\approx 3{,}4$ *kgm*. **2708.** 1) a) $\approx 7{,}16$ *kgm*; b) $\approx 16{,}6$ *kgm*; c) $\approx 23{,}8$ *kgm*; 2) al dilatarse el gas infinitamente, el trabajo aumenta sin límites.

2709. ≈ 1600 *kgm*. **2710.** ≈ 82 minutos. **2711.** Un poco más de 5°.

2712. $\frac{\sigma}{2a\pi\varepsilon_0}$. **2713.** a) $4\cdot10^{-6}$ *julios*; b) $6\cdot10^{-6}$ *julios*. **2714.** 5 *cm*.

2715. ≈ 946 *culombios*.

2716. ≈ 1092 *culombios*. **2717.** ≈ 5110 *culombios*.

2718. $\frac{E_0^2}{2}$. La tensión efectiva de la corriente alterna es igual a $\frac{E_0}{\sqrt{2}}$.

2719. $\frac{E_0I_0}{2} T\cos\varphi_0$. **2720.** ≈ 7 minutos. **2721.** $\approx 2{,}915$ *l*.

2722. a) $H_1 = H\frac{\ln a - \ln c}{\ln a - \ln b} \approx 15$ *cm*; b) $\approx 0{,}125\%$.

2723. $\frac{1}{1024}$ de la cantidad inicial. **2724.** $\approx 2{,}49$ *g*. **2725.** $\frac{8}{9}$ *g*.

2726. $\approx 37{,}3$ minutos.

Al capítulo IX

2727*. $S_n=1-\frac{1}{n+1}$, $S=1$. Cada término de la serie ha de ser presentado como la suma de dos sumandos.

2728. $S_n=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)$, $S=\frac{1}{2}$.

2729. $S_n=\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{3n+1}\right)$, $S=\frac{1}{3}$.

2730. $S_n=\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right)$, $S=\frac{11}{18}$.

2731. $S_n=\frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+3}-\frac{1}{2n+5}\right)$, $S=\frac{23}{90}$.

2732. $S_n=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right]$, $S=\frac{1}{4}$.

2733. $S_n=1+\frac{1}{2}-\frac{1}{2^n}-\frac{1}{2\cdot 3^n}$, $S=\frac{3}{2}$.

2734. $S_n=1-\frac{1}{(n+1)^2}$, $S=1$.

2735. $S_n=\frac{1}{8}\left[\frac{1}{(2n+1)^2}\right]$, $S=\frac{1}{8}$.

2736. $S_n=\operatorname{arctg}\frac{n}{n+1}$, $S=\frac{\pi}{4}$.

2737. Converge. 2738. Converge. 2739. Diverge. 2740. Converge.
2741. Diverge. 2742. Diverge. 2743. Converge.
2744. Diverge. 2745. Diverge. 2746. Converge.
2747. Converge. 2748. Diverge. 2749. Converge.
2750. Diverge. 2751. Converge. 2752. Converge.
2753. Diverge. 2767. Converge. 2768. Diverge.
2769. Converge. 2770. Converge. 2771. Converge.
2772. Diverge. 2773. Diverge. 2774. Converge.
2775. Diverge. 2776. Diverge. 2777. Diverge.
2778. Converge. 2779. Converge. 2780. Diverge.
2781. Converge. 2782. Diverge. 2783. Converge.
2784*. Diverge. Valerse de la fórmula

$$\operatorname{sen}\alpha+\operatorname{sen}2\alpha+\ldots+\operatorname{sen}k\alpha=\frac{\operatorname{sen}\frac{k+1}{2}\alpha\operatorname{sen}\frac{k}{2}\alpha}{\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}}$$

o de la desigualdad $\operatorname{sen}x>\frac{2}{\pi}x$, si $0<x<\frac{\pi}{2}$.

2790. Converge, pero no absolutamente. 2791. Converge absolutamente.
2792. Converge, pero no absolutamente. 2793. Converge absolutamente.
2794. Converge absolutamente.
2795. Diverge. 2796. Converge, pero no absolutamente.
2797. Converge absolutamente. 2798. Converge, pero no absolutamente.
2799. Diverge. 2802. $-1<x<1$.

2803. $\frac{1}{e}<x<e$. 2804. $-1<x<1$. 2805. $-1\leqslant x\leqslant 1$.

2806. $-1 \leqslant x < 1$. 2807. $x < -1$ y $x > 1$. 2808. $-1 < x < 1$.
2809. $-1 \leqslant x < 1$. 2810. $x \neq \pm 1$. 2811. Para cualquier x.
2812. $-2 < x < 2$. 2813. Para cualquier x. 2814. $x > 0$. 2815. $x > 0$.
2816. $x \geqslant 0$.
2822. 11 términos. 2823*. Valerse de la desigualdad $\ln(1+\alpha) \leqslant \alpha$.

2825. $f(0)=\frac{1}{9}$; $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{1}{101}$; $f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{44}{1001}$; $f(1)=0{,}049$; $f(-0{,}2)=0{,}108$.

2827. $\frac{1}{4}\ln\frac{1+x}{1-x}-\frac{1}{2}\operatorname{arctg} x$. 2828. $\frac{1}{2}\operatorname{arctg} x+\frac{1}{4}\ln\frac{1+x}{1-x}$.

2829. $(x+1)\ln(x+1)-x$. 2830. $\frac{1}{2}$. 2831. 0,2.

2832*. $\ln\frac{3}{2}$. Valerse de la relacion $\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\ \ldots\ \cos\frac{x}{2^n}\ldots=\frac{\operatorname{sen} x}{x}$.

2833*. $\frac{\pi^3}{12}$. Valerse de la fórmula $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$.

2834. 1) $\frac{1}{3}\left(\ln 2+\frac{\pi}{\sqrt{3}}\right)$; 2) $\frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\ln(1+\sqrt{2})+\frac{\pi}{2}\right]$. 2835. $\ln 2$.

2836. $\frac{2-\sqrt{2}}{2}$.

2837. La serie dada no es susceptible de ser derivada término a término en ninguno de los intervalos. En efecto, el término general de la serie de derivadas ofrece la forma $\pi\cos(2^n\pi x)$. Por pequeño que sea el intervalo (α, β) y dondequiera que esté en el eje numérico, dentro de él siempre existirán los números de la forma $\frac{k}{2^N}$, donde k es un entero, y N, un número entero positivo suficientemente grande. Pero, cuando $x=\frac{k}{2^N}$ la serie de derivadas diverge porque para todas las $n > N$ sus términos llegan a ser iguales a π.

2838. $\frac{1}{(1-x)^2}$ y $\frac{1}{(1-x)^3}$.

2841. $(x-1)-\frac{(x-1)^2}{2}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{(x-n)^n}{n}+\ldots$

2842. $1+\frac{3}{2}\left[(x-1)+\frac{1}{2}\frac{(x-1)^2}{2!}-\frac{1}{2^2}\frac{(x-1)^3}{3!}+\ldots\right.$
$\left.\ldots+(-1)^n\frac{1\cdot 3\ \ldots\ (2n-5)}{2^{n-1}}\frac{(x-1)^n}{n!}+\ldots\right]$.

2843. $\frac{1}{3}-\frac{x-3}{9}+\frac{(x-3)^2}{27}-\ldots+(-1)^{n+1}\frac{(x-3)^{n-1}}{3^n}+\ldots$.

2844. $1-\left(\frac{\pi}{4}\right)^2\frac{(x-2)^2}{2!}+\ldots+(-1)^{n+1}\left(\frac{\pi}{4}\right)^{2n-2}\frac{(x-2)^{2n-2}}{(2n-2)!}+\ldots$

2845. $1+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!}+\ldots$

2846. $x^2+\frac{x^3}{1!}+\frac{x^4}{2!}+\ldots+\frac{x^{n+1}}{(n-1)!}+\ldots$

2847. $\cos\alpha\left[1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!}+\ldots\right]-$

$-\operatorname{sen}\alpha\left[x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\ldots\right].$

2848. $x+x^2+\frac{2x^3}{3!}-\frac{4x^5}{5!}+\ldots+\sqrt{2^n}\operatorname{sen}\frac{\pi n}{4}\cdot\frac{x^n}{n!}+\ldots$

2849. $1-\frac{4x^4}{4!}+\frac{4^2x^8}{8!}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{4^{n-1}x^{4(n-1)}}{(4n-4)!}+\ldots$

2850. $\ln 2+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{8}-\frac{x^4}{192}+\ldots$

2851. $e\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{6}-\ldots\right)$. 2852. $1-\frac{nx^2}{2}+\frac{3n^2-2n}{24}x^4+\ldots$

2853. $\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{12}+\ldots$ 2854. $1+x^2-\frac{x^3}{2}+\frac{5x^4}{6}+\ldots$

2855. $1+2x+\frac{(2x)^2}{2!}+\ldots+\frac{(2x)^{n-1}}{(n-1)!}+\ldots$

2856. $1-x^2+\frac{x^4}{2!}-\ldots+(-1)^{(n+1)}\frac{x^{2(n-1)}}{(n-1)!}+\ldots$

2857. $1+\frac{x}{2!}+\frac{x^2}{3!}+\ldots+\frac{x^{n-1}}{n!}+\ldots$

2858. $1+\frac{x^6}{3!}+\frac{x^{12}}{5!}+\ldots+\frac{x^{6(n-1)}}{(2n-1)!}+\ldots$

2859. $\frac{x}{2}-\frac{x^3}{2^2\cdot 3!}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{2^{2n-1}(2n-1)!}+\ldots$

2860. $1-\left[x^2-\frac{(2x)^4}{2\cdot 4!}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{2^{2n-1}x^{2n}}{(2n)!}+\ldots\right].$

2861. $1-\frac{x^2}{3!}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{x^{2(n-1)}}{(2n-1)!}+\ldots$

2862. $-\frac{2x^3}{3!}+\frac{4x^5}{5!}-\ldots+(-1)^n\frac{2nx^{2n+1}}{(2n+1)!}+\ldots$

2863. $\ln 10+\left[\frac{x}{10}-\frac{x^2}{2\cdot 10^2}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n\cdot 10^n}+\ldots\right].$

2864. $x^2-\frac{x^3}{2}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n}+\ldots$

2865. $1+\left[\frac{x^2}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{x^4}{4}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{1\cdot 3\ldots(2n-3)x^{2n}}{2\cdot 4\ldots(2n-2)2n}+\ldots\right].$

2866. $2-2\left[\frac{1}{3}\left(\frac{x}{2}\right)^3+\frac{2}{3^2\cdot 2!}\left(\frac{x}{2}\right)^6+\ldots+\right.$

$\left.+\frac{2\cdot 5\ldots(3n-4)}{3^n\cdot n!}\left(\frac{x}{2}\right)^{3n}+\ldots\right].$

2867. $1-\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{1\cdot 4}{3^2 2!}x^6+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{1\cdot 4\ldots(3n-2)}{3^n\cdot n!}x^{3n}+\ldots\right].$

2868. $x^2+\left[\frac{1}{2}x^4+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^6+\ldots+\frac{1\cdot 3\ldots(2n-1)}{2^n\cdot n!}x^{2n+2}+\ldots\right].$

2869. $1+2^2x+\ldots+n^2x^{n-1}+\ldots,\ S=12.$

2870. 1) $-7!$, 2) $\frac{105}{16}$, 3) $\frac{10!}{4!}$ y 4) $\frac{8}{3}$.

2871. 1/6. 2872. 1/4. 2873. 1. 2874. 1/2. 2875. 2/3. 2876. 1/3.
2877. 1/60. 2878. $-1/10 < x < 1/10$. 2879. $-1 < x \leqslant 1$.
2880. $-10 \leqslant x < 10$. 2881. $x = 0$. 2882. $-\sqrt{2}/2 < x < \sqrt{2}/2$.
2883. $-\infty < x < \infty$. 2884. $-1/3 < x < 1/3$. 2885. $-1 \leqslant x \leqslant 1$.
2886. $-1/e \leqslant x < 1/e$. 2887. $x = 0$. 2888. $-1 \leqslant x < 1$.

2889. $-\frac{1}{e}<x<\frac{1}{e}$.

2890. $x-\frac{1}{2}\frac{x^3}{3}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{x^5}{5}-\ldots+(-1)^{n+1}\frac{1\cdot 3\ \ldots\ (2n-3)}{2^{n-1}(n-1)!}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}+\ldots$
$(-1\leqslant x\leqslant 1)$.

2891. $x+\frac{x^3}{3}+\ldots+\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\ldots\ (-1<x<1)$.

2892. $x^2+\frac{x^4}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{x^{2n}}{n(2n-1)}+\ldots\ (-1\leqslant x\leqslant 1)$.

2893. $4\left(\frac{x^3}{3!}+\frac{2x^5}{5!}+\ldots+\frac{nx^{2n+1}}{(2n+1)!}+\ldots\right)\ (-\infty<x<\infty)$, $\frac{1}{2e}$.

2894. 1,39, el error es igual a 0,01. 2895. 0,3090, el error es igual a 0,0001.
2896. 2,154, el error es igual a 0,001. 2897. 7,389. 2898. 1,649. 2899. 0,3679.
2900. 0,7788. 2901. 0,0175. 2902. 1,000. 2903. 0,17365. 2904. 0,9848.
2905. 3,107. 2906. 4,121. 2907. 7,937. 2908. 1,005.
2909. 3,017. 2910. 5,053. 2911. 2,001. 2912. 1,0986.
2913. 0,434294. 2914. 0,6990.

2915. $1+2x+\frac{5}{2}x^2+\ldots+\left[2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{(n-1)!}\right]x^{n-1}+\ldots$

2916. $x-\frac{3}{2}x^2+\frac{11}{6}x^3-\ldots+(-1)^{n+1}\left[1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}\right]x^n+\ldots$

2917. $1-\frac{x}{3}+\frac{x^3}{81}+\ldots$ 2918. $-\frac{x}{2}+\frac{5x^3}{32}+\ldots$

2919. $x-x^2+2x^3+\ldots$

2920. $C+x-\frac{x^3}{3\cdot 3!}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)(2n-1)!}+\ldots$
$(-\infty<x<\infty)$.

2921. $C+\ln|x|-\frac{x^2}{2\cdot 2!}+\frac{x^4}{4\cdot 4!}-\ldots$
$\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{2n\cdot(2n)!}+\ldots\ (-\infty<x<0$ y $0<x<\infty)$.

2922. $C+\ln|x|+x+\frac{x^2}{2\cdot 2!}+\ldots+\frac{x^n}{n\cdot n!}+\ldots$
$(-\infty<x<0$ y $0<x<\infty)$.

2923. $C-\frac{1}{x}+\ln|x|+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{2\cdot 3!}+\ldots+\frac{x^n}{n(n+1)!}+\ldots$
$(-\infty<x<0$ y $0<x<\infty)$.

2924. $x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5\cdot 2!}-\ldots+(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)(n-1)!}+\ldots$ $(-\infty<x<\infty)$.

2925. $x-\frac{x^3}{3^2}+\frac{x^5}{5^2}-\ldots+(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)^2}+\ldots$ $(-1\leqslant x\leqslant 1)$.

2926. $x+\frac{1}{2}\cdot\frac{x^5}{5}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{x^9}{9}+\frac{1\cdot 3\ldots(2n-3)}{2^{n-1}(n-1)!}\frac{x^{4n-3}}{4n-3}+\ldots$ $(-1\leqslant x\leqslant 1)$.

2927. $x+\frac{1}{2}\frac{x^4}{4}-\frac{1}{2\cdot 4}\frac{x^7}{7}+\ldots+(-1)^n\frac{1\cdot 3\ldots(2n-5)}{2^{n-1}(n-1)!}\frac{x^{3n-2}}{3n-2}+\ldots$ $(-1\leqslant x\leqslant 1)$.

2928. $x+\frac{x^{10}}{10}+\frac{x^{10}}{19}+\ldots+\frac{x^{9n-8}}{9n-8}$ $(-1\leqslant x<1)$.

2929. $\frac{1}{4}\cdot\frac{x^3}{3}-\frac{3}{4\cdot 8}\frac{x^7}{7}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{3\cdot 7\ldots(4n-5)}{4^n\cdot n!}\frac{x^{4n-1}}{4n-1}+\ldots$ $(-1\leqslant x\leqslant 1)$.

2930. 0,3230, el error es igual a 0,0001. 2931. 0,24488, el error es igual a 0,00001.

2932. 0,4971, el error es igual a 0,0001. 2933. 3,518, el error es igual a 0,001

2934. 0,012, el error es igual a 0,001. 2935. 32,831. 2936. 0,487.

2937. 0,006. 2938. 0,494. 2940. 3,141592654.

2941. $x+\frac{2}{1\cdot 3}x^3+\frac{2^2}{1\cdot 3\cdot 5}x^5+\ldots+\frac{2^{n-1}}{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}x^{2n-1}+\ldots$

2942*. $1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^3}-\ldots+(-1)^{n+1}\frac{1}{n^n}+\ldots$ Presentar x^x en la forma $e^{x\ln x}$, desarrollar en serie de potencias de $x\ln x$ e integrar las expresiones de la forma $x^n\ln^n x$.

2943. 0,6449. 2944. 0,511 2945. 1,015.

2946*. 3,71. Resulta poco cómodo calcular el área mediante la fórmula $S=4\int\limits_0^1\sqrt[4]{1-x^4}\,dx$ porque para $x=1$ la serie correspondiente converge lentamente.

Conviene calcular el área del sector limitado por la línea, el eje de ordenadas y la bisectriz del primer ángulo coordenado. Esto origina una serie rápidamente convergente.

2947. 0,2505. 2948. 3,821. 2949. 0,119. 2952. 1,225.

2951. (0,347; 2,996). 2952. (1,71; 0,94).

Al capítulo X

2953. $z=\frac{\pi}{3}(x^2y-y^3)$.

2954. $S=\frac{1}{4}\sqrt{(x+y+z)(x+y-z)(x-y+z)(y+z-x)}$.

2955.

$y \backslash x$	0	1	2	3	4	5
0	1	3	5	7	9	11
1	−2	0	2	4	6	8
2	−5	−3	−1	1	3	5
3	−8	−6	−4	−2	0	2
4	−11	−9	−7	−5	−3	−1
5	−14	−12	−10	−8	−6	−4

2956.

$y \backslash x$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
0	0,00	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,80	0,90	1,00
0,1	0,10	0,14	0,22	0,32	0,41	0,51	0,61	0,71	0,81	0,90	1,00
0,2	0,20	0,22	0,28	0,36	0,45	0,54	0,63	0,73	0,82	0,92	1,01
0,3	0,30	0,32	0,36	0,42	0,50	0,58	0,67	0,76	0,85	0,95	1,04
0,4	0,40	0,41	0,45	0,50	0,57	0,64	0,72	0,81	0,89	0,98	1,08
0,5	0,50	0,51	0,54	0,58	0,64	0,71	0,78	0,86	0,94	1,03	1,12
0,6	0,60	0,61	0,63	0,67	0,72	0,78	0,85	0,92	1,00	1,08	1,16
0,7	0,70	0,71	0,73	0,76	0,81	0,86	0,92	0,99	1,06	1,14	1,22
0,8	0,80	0,81	0,82	0,85	0,89	0,94	1,00	1,06	1,13	1,20	1,28
0,9	0,90	0,91	0,92	0,95	0,98	1,03	1,08	1,14	1,20	1,27	1,34
1	1,00	1,00	1,02	1,04	1,08	1,12	1,16	1,22	1,28	1,34	1,41

2957. 1) $\frac{9}{16}$; 2) 1; 3) 16; 2; 2.

2958. $\dfrac{\varphi(a)\,\psi\left(\frac{1}{a}\right)-\psi(a)\,\varphi\left(\frac{1}{a}\right)}{\varphi(1)\,\psi(1)}$; $a-\frac{1}{a}$.

2959. La segunda función crece con más rapidez.
2960. La parábola de segundo orden; 1) no, 2) no.
2961. Poner $m = 1/x$. **2965.** La función no es unívoca.

2966. 1) 1; 2) 1; 3) $\frac{1}{5}$; 4) no está definida; 5) 1.

2967. $z = (x+y)^{x-y} + (x+y)^{y-x}$, $(x+y) > 0$; z es la función racional de u y de v, pero no de w, t, x e y.

2968. $z = (x+y)^{xy} + (xy)^{2x}$.

2969. $u=(x^2+y^2+z^2)^2-\frac{x^2+y^2+z^2}{4}[(x^2+y^2+z^2)^2+3(x+y+z)^4]$; u es la función entera racional respecto a ξ y η, x, y y z, pero no respecto a ω y φ.

2970. $z=\left(\frac{u+v}{u-v}\right)^v+u$; $u=x^2+y^2$; $v=xy$.

2971. $x = \text{const}$ es una parábola, $y = \text{const}$ es una parábola, $z = \text{const} \neq 0$ es una hipérbola, $z = 0$ es una pareja de rectas.

2972. $x = \text{const}$, $y = \text{const}$ son rectas, $z = \text{const} \neq 0$ es una hipérbola, $z = 0$ es una pareja de rectas.

2973. $x = \text{const}$ es una parábola, $y = \text{const}$ es una parábola cúbica, $z = \text{const} \neq 0$ es una curva de tercer orden, $z = 0$ es una parábola semicúbica.

2974. $z = \text{const} > 0$ es una elipse, $x = \text{const}$ e $y = \text{const}$ son curvas de tercer orden (para $x = 0$ e $y = 0$ son parábolas semicúbicas).

2975. $0<y<2$; $-1<y-\frac{1}{2}x<0$. **2976.** $x^2 \leqslant y \leqslant \sqrt{x}$.

2977. $0 < y < x\sqrt{3}$; $y < (a-x)\sqrt{3}$.

2978. $(x-a)^2 + (y-b)^2 < R^2$; $-\infty < z < \infty$.

2979. $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 \leqslant R^2$. **2980.** $x^2 + y^2 < 4R^2$.

2981. $v=\frac{1}{6}xy\left(2R \pm \sqrt{4R^2-x^2-y^2}\right)$; la función no es unívoca. El dominio de definición de la función es $x^2+y^2 \leqslant 4R^2$; $x>0$, $y>0$.

2982. Para $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$ $S=xy$;
para $0 \leqslant x \leqslant 1$, $1 \leqslant y$ $S=x$;
para $1 \leqslant x$ $0 \leqslant y \leqslant 1$ $S=y$;
para $1 \leqslant x \leqslant 2$; $1 \leqslant y \leqslant 2$ $S=xy-x-y+2$;
para $1 \leqslant x \leqslant 2$; $2 \leqslant y$ $S=x$;
para $2 \leqslant x$, $1 \leqslant y \leqslant 2$ $S=y$;
para $2 \leqslant x$, $2 \leqslant y$ $S=2$.

2983. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} \leqslant 1$. **2984.** $y^2 > 4x-8$.

2985. Todo el plano, excepto los puntos de la circunferencia $x^2 + y^2 = R^2$.

2986. La parte interior del ángulo derecho vertical formado por las bisectrices de los ángulos coordenados, incluyendo las mismas bisectrices $x + y \geqslant 0$, $x - y \geqslant 0$.

2987. Lo mismo que en el ejercicio 2986, pero sin fronteras.

2988. La parte interior de los ángulos verticales derecho e izquierdo formados por las rectas $y = 1 + x$ e $y = 1 - x$, incluyendo estas mismas rectas, pero sin los puntos de intersección:

$$1 - x \leqslant y \leqslant 1 + x \; (x > 0),$$
$$1 + x \leqslant y \leqslant 1 - x \; (x < 0)$$

(cuando $x = 0$ la función no está definida).

2989. Parte del plano situado dentro de los ángulos coordenados primero y tercero (sin fronteras).

2990. Dominio cerrado situado entre el semieje positivo de abscisas y la parábola $y = x^2$ (incluyendo la frontera): $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$; $x^2 \geqslant y$.

2991. Anillo entre las circunferencias $x^2 + y^2 = 1$ y $x^2 + y^2 = 4$ (incluyendo las mismas circunferencias $1 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 4$.

2992. Parte del plano situada dentro de la parábola $y^2 = 4x$, entre la parábola y la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$, incluyendo el arco de la parábola excepto su vértice, excluyendo el arco de la circunferencia.

2993. Parte del plano situada fuera de las circunferencias de radios iguales a 1, cuyos centros se hallan en los puntos $(-1, 0)$, y $(1, 0)$. Los puntos de la primera circunferencia pertenecen al dominio, los puntos de la segunda, no pertenecen.

2994. Solamente los puntos de la circunferencia $x^2 + y^2 = R^2$.

2995. Todo el plano excluyendo las rectas $x + y = n$ (n es cualquier número entero positivo o negativo, o cero).

2996. Parte interior del círculo $x^2 + y^2 = 1$ y de los anillos $2n \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 2n + 1$ (n es un entero), incluyendo las fronteras.

2997. $\left.\begin{array}{c}\text{Si } x \geqslant 0, \text{ se tiene} \\ 2n\pi \leqslant y \leqslant (2n+1)\pi; \\ \text{si } x < 0, \text{ se tiene} \\ (2n+1)\pi \leqslant y \leqslant (2n+2)\pi;\end{array}\right\}$ n es un entero.

2998. $x > 0$; $2n\pi < y < 2(n + 1)\pi$ (n es un entero).

2999. El dominio rayado abierto (véase la fig. 83).

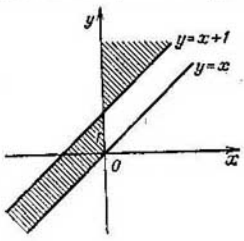

Fig. 83

Para $x > 0$ $y > x + 1$, para $x < 0$, $x < y < x + 1$.

3000. Parte del plano comprendida entre la línea $y = \frac{1}{1+x^2}$ y su asíntota, incluyendo la frontera. **3001.** $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$.

3002. Parte del espacio comprendida entre las esferas $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ y $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, incluyendo la superficie de la esfera exterior y excluyendo la superficie de la esfera interior.

3003. 2. **3004.** 0. **3005.** 0.

3006. La función no tiene límite para $x \to 0$, $y \to 0$. **3007.** 0. **3008.** 1.

3009. a) $y = 0$ ó $y = x^{\alpha}$ ($\alpha > 1$), $x \to 0$ de acuerdo con la ley arbitraria; b) $y = \frac{x}{3}$, $x \to 0$ de acuerdo con la ley arbitraria.

3010. Es el punto $(0, 0)$. En el entorno de este punto la función puede tomar valores positivos tan grandes como quieran.

3011. Son todos los puntos cuyas coordenadas son números enteros.

3012. En la recta $y = x$.

3013. En las rectas $x = m$, $y = n$ (m y n son números enteros).

3014. En la parábola $y^2 = 2x$.
3015. 1) es continua; 2) es discontinua; es continua con respecto a x e y por separado; 3) es continua; 4) es discontinua; 5) es discontinua; 6) es discontinua. Pasar a las coordenadas polares.
3016. Son las circunferencias cuyos centros se hallan en el origen de coordenadas y cuyos radios son 1, $\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\frac{\sqrt{3}}{3}$, $\frac{1}{2}$, respectivamente.
3017. Son las circunferencias que pasan por los puntos A y B.
3025. Son las rectas $y = ax + b$, donde $a = \ln b$.
3026. Son las esferas concéntricas cuyo centro se halla en el punto A y cuyos radios son iguales a 1, 2, 3, 4.
3027. Son los elipsoides de revolución cuyos focos se hallan en los puntos A y B:

$$\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2}+$$
$$+\sqrt{(x-x_2)^2+(y-y_2)^2+(z-z_2)^2}=\text{const.}$$

3028. Son las esferas $x^2+y^2+z^2=\left(\frac{lc-1}{c+1}\right)^2$, donde $c=e^u$.

3029. Son los paraboloides de revolución $x^2 + y^2 = cz$.
3030. 1) Son los planos $2x + 3y - z = C$; 2) son los hiperboloides de revolución o el cono $x^2 + y^2 - 2z^2 = C$.

3032. $\frac{1}{v}\frac{\partial v}{\partial T}$ para $T=T_0$.

3033. $\frac{\partial\theta}{\partial t}$ es la velocidad del cambio de la temperatura en el punto dado; $\frac{\partial\theta}{\partial x}$ es la velocidad del cambio de la temperatura en el momento dado del tiempo a lo largo de la barra.

3034. $\frac{\partial S}{\partial h}=b$ es la velocidad de variación del área en función de la altura; $\frac{\partial S}{\partial b}=h$ es la velocidad de variación del área en función de la base del rectángulo.

3036. $\frac{\partial z}{\partial x}=1,\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-1.$

3037. $\frac{\partial z}{\partial x}=3x^2y-y^3;\quad \frac{\partial z}{\partial y}=x^3-3y^2x.$

3038. $\frac{\partial\theta}{\partial x}=ae^{-t};\quad \frac{\partial\theta}{\partial t}=-axe^{-t}+b.$

3039. $\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{1}{v}-\frac{v}{u^2};\quad \frac{\partial z}{\partial v}=-\frac{u}{v^2}+\frac{1}{u}.$

3040. $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{x^4+3x^2y^2-2xy^3}{(x^2+y^2)^2};\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{y^4+3x^2y^2-2x^3y}{(x^2+y^2)^2}.$

3041. $\frac{\partial z}{\partial x}=30xy\,(5x^2y-y^3+7)^2;$
$\frac{\partial z}{\partial y}=3\,(5x^2y-y^3+7)^2\,(5x^2-3y^2).$

3042. $\frac{\partial z}{\partial x}=\sqrt{y}-\frac{y}{3\sqrt[3]{x^4}}$; $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x}{2\sqrt{y}}+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$.

3043. $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$; $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{y}{x^2+y^2+x\sqrt{x^2+y^2}}$.

3044. $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{x}{x^2+y^2}$; $\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{x}{x^2+y^2}$.

3045. $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{y}{(x^2+y^2)\left(\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\right)^2}$; $\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{x}{(x^2+y^2)\left(\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\right)^2}$.

3046. $\frac{\partial z}{\partial x}=yx^{y-1}$; $\frac{\partial z}{\partial y}=x^y\ln x$.

3047. $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2x}{x^2+y^2}$; $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2y}{x^2+y^2}$.

3048. $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{2}{\sqrt{x^2+y^2}}$; $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2x}{y\sqrt{x^2+y^2}}$.

3049. $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{xy\sqrt{2}}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2-y^2}}$; $\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{x^2\sqrt{2}}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2-y^2}}$.

3050. $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2}{y\operatorname{sen}\frac{2x}{y}}$; $\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{2x}{y^2\operatorname{sen}\frac{2x}{y}}$.

3051. $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{1}{y}e^{-\frac{x}{y}}$; $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x}{y^2}e^{-\frac{x}{y}}$.

3052. $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{x+\ln y}$; $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{y(x+\ln y)}$.

3053. $\frac{\partial u}{\partial v}=-\frac{w}{v^2+w^2}$; $\frac{\partial u}{\partial w}=\frac{v}{v^2+w^2}$.

3054. $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{y}\cos\frac{x}{y}\cos\frac{y}{x}+\frac{y}{x^2}\operatorname{sen}\frac{x}{y}\operatorname{sen}\frac{y}{x}$;

$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{x}{y^2}\cos\frac{x}{y}\cos\frac{y}{x}-\frac{1}{x}\operatorname{sen}\frac{x}{y}\operatorname{sen}\frac{y}{x}$.

3055. $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{y}{x^2}3^{-\frac{y}{x}}\ln 3$; $\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{1}{x}3^{-\frac{y}{x}}\ln 3$.

3056. $\frac{\partial z}{\partial x}=y^2(1+xy)^{y-1}$; $\frac{\partial z}{\partial y}=xy(1+xy)^{y-1}+(1+xy)^y\ln(1+xy)$.

3057. $\frac{\partial z}{\partial x}=y\ln(x+y)+\frac{xy}{x+y}$; $\frac{\partial z}{\partial y}=x\ln(x+y)+\frac{xy}{x+y}$.

3058. $\frac{\partial z}{\partial x}=x^{x^y}x^{y-1}(y\ln x+1)$; $\frac{\partial z}{\partial y}=x^yx^{x^y}\ln^2 x$.

3059. $\frac{\partial u}{\partial x}=yz$; $\frac{\partial u}{\partial y}=xz$; $\frac{\partial u}{\partial z}=xy$.

3060. $\frac{\partial u}{\partial x}=y+z$; $\frac{\partial u}{\partial y}=x+z$; $\frac{\partial u}{\partial z}=x+y$.

3061. $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$; $\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$;
$\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.

3062. $\frac{\partial u}{\partial x}=3x^2+3y-1$; $\frac{\partial u}{\partial y}=z^2+3x$; $\frac{\partial u}{\partial z}=2yz+1$.

3063. $\frac{\partial w}{\partial x}=yz+vz+vy$; $\frac{\partial w}{\partial y}=xz+zv+vx$.
$\frac{\partial w}{\partial z}=xy+yv+vx$; $\frac{\partial w}{\partial v}=yz+xz+xy$.

3064. $\frac{\partial u}{\partial x}=(3x^2+y^2+z^2)\,e^{x(x^2+y^2+z^2)}$;
$\frac{\partial u}{\partial y}=2xye^{x(x^2+y^2+z^2)}$; $\frac{\partial u}{\partial z}=2xze^{x(x^2+y^2+z)^2}$.

3065. $\frac{\partial u}{\partial x}=2x\cos(x^2+y^2+z^2)$; $\frac{\partial u}{\partial y}=2y\cos(x^2+y^2+z^2)$;
$\frac{\partial u}{\partial z}=2z\cos(x^2+y^2+z^2)$.

3066. $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{1}{x+y+z}$.

3067. $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{y}{z}\,x^{\frac{y}{z}-1}$; $\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{1}{z}\,x^{\frac{y}{z}}\ln x$; $\frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{y}{z^2}\,x^{\frac{y}{z}}\ln x$.

3068. $\frac{\partial u}{\partial x}=y^zx^{y^z-1}$; $\frac{\partial u}{\partial y}\ zy^{z-1}x^{y^z}\ln x$; $\frac{\partial u}{\partial z}=y^zx^{y^z}\ln x\ln y$.

3069. $\frac{2}{5}$, $\frac{1}{5}$. 3070. 0, $\frac{1}{4}$.

3071. $\frac{\partial z}{\partial x}=2\,(2x+y)^{2x+y}\,[1+\ln(2x+y)]$;
$\frac{\partial z}{\partial y}=(2x+y)^{2x+y}\,[1+\ln(2x+y)]$.

3072. $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{3}{x\ln y}\left(1+\frac{\ln x}{\ln y}\right)^2$; $\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{3\ln x}{y\ln^2 y}\left(1+\frac{\ln x}{\ln y}\right)^2$.

3073. $\frac{\partial z}{\partial x}=ye^{\operatorname{sen}\pi xy}(1+\pi xy\cos\pi xy)$; $\frac{\partial z}{\partial y}=xe^{\operatorname{sen}\pi xy}(1+\pi xy\cos\pi xy)$.

3074. $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1-x^2-y^2-\sqrt{x^2+y^2}}{(1+\sqrt{x^2+y^2})^2}\,2x$;
$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1-x^2-y^2-\sqrt{x^2+y^2}}{(1+\sqrt{x^2+y^2})^2}\,2y$.

3075. $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{y\sqrt{x^y}}{2x(1-x^y)}$; $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\sqrt{x^y}\ln x}{2(1+x^y)}$.

3076. $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{y}{(1+\sqrt{xy})\sqrt{xy-x^2y^2}}$;

$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{x}{(1+\sqrt{xy})\sqrt{xy-x^2y^2}}$.

3077. $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{y^2+2xy}{\sqrt{1+(xy^2+yx^2)^2}}$; $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x^2+2xy}{\sqrt{1+(xy^2+yx^2)^2}}$.

3078. $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{1}{x^2}\sqrt{\frac{xy-x-y}{xy+x+y}}$; $\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{1}{y^2}\sqrt{\frac{xy-x-y}{xy+x+y}}$.

3079. $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{y\left[\left(1+\operatorname{arctg}^2\frac{y}{x}\right)^2+2\operatorname{arctg}^3\frac{y}{x}\right]}{(x^2+y^2)\left(1+\operatorname{arctg}^2\frac{y}{x}\right)\left(1+\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\right)^2}$;

$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x\left[\left(1+\operatorname{arctg}^2\frac{y}{x}\right)^2+\operatorname{arctg}^3\frac{y}{x}\right]}{(x^2+y^2)\left(1+\operatorname{arctg}^2\frac{y}{x}\right)\left(1+\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\right)^2}$.

3080. $\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{4kx}{(x^2+y^2+z^2)^3}$; $\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{4ky}{(x^2+y^2+z^2)^3}$;

$\frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{4kz}{(x^2+y^2+z^2)^3}$.

3081. $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{z(x-y)^{z-1}}{1+(x-y)^{2z}}$; $\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{z(x-y)^{z-1}}{1+(x-y)^{2z}}$;

$\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{(x-y)^z\ln(x-y)}{1+(x-y)^{2z}}$.

3082. $\frac{\partial u}{\partial x}=yz(\operatorname{sen}x)^{yz-1}\cos x$; $\frac{\partial u}{\partial y}=z(\operatorname{sen}x)^{yz}\ln\operatorname{sen}x$;

$\frac{\partial u}{\partial z}=y(\operatorname{sen}x)^{yz}\ln\operatorname{sen}x$.

3083. $\frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{x}=\frac{\frac{\partial u}{\partial y}}{y}=\frac{\frac{\partial u}{\partial z}}{z}=\frac{2}{r(r^2-1)}$, donde $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

3084. $\frac{\partial w}{\partial x}=(2xy^2-yzv)\operatorname{tg}^3\alpha$; $\frac{\partial w}{\partial y}=(2x^2y-xzv)\operatorname{tg}^3\alpha$;

$\frac{\partial w}{\partial z}=(2zv^2-xyv)\operatorname{tg}^3\alpha$; $\frac{\partial w}{\partial v}=(2z^2v-xyz)\operatorname{tg}^3\alpha$,

donde $\alpha=x^2y^2+z^2v^2-xyzv$.

3085. 4.

3086. $\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_{\substack{z=b\\ t=a}}=\frac{3b}{2}\sqrt{\frac{ab}{b^2-a^2}}$; $\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{\substack{z=b\\ t=a}}=-\frac{3a}{2}\sqrt{\frac{ab}{b^2-a^2}}$.

3087. 1 y -1. 3088. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. 3089. $\frac{3}{2}$. 3090. $-\frac{13}{22}$. 3091. 45°.

3092. 30°. 3093. $\operatorname{arctg}\frac{4}{7}$.

3094. $d_x z=(y^3-6xy^2)\,dx;\ d_y z=(3xy^2-6x^2y+8y^3)\,dy$.

3095. $d_x z=\dfrac{x\,dx}{\sqrt{x^2+y^2}};\quad d_y z=\dfrac{y\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

3096. $d_x z=\dfrac{y\,(y^2-x^2)\,dx}{(x^2+y^2)^2};\quad d_y z=\dfrac{x\,(x^2-y^2)\,dy}{(x^2+y^2)^2}$.

3097. $d_x u=\dfrac{3x^2\,dx}{x^3+2y^3-z^3};\quad d_y u=\dfrac{6y^2\,dy}{x^3+2y^3-z^3};\quad d_z u=\dfrac{-3z^2\,dz}{x^3+2y^3-z^3}$.

3098. $\dfrac{1}{270}$. 3099. $\approx 0{,}0187$. 3100. $\dfrac{97}{600}$.

3101. $xy\,[(2y^3-3xy^2+4x^2y)\,dx+(4y^2x-3yx^2+2x^3)\,dy]$.

3102. $\dfrac{x\,dx+y\,dy}{x^2+y^2}$. 3103. $\dfrac{2\,(x\,dy-y\,dx)}{(x-y)^2}$. 3104. $\dfrac{y\,dx-x\,dy}{y\sqrt{y^2-x^2}}$.

3105. $(x\,dy+y\,dx)\cos(xy)$. 3106. $\dfrac{dx}{1+x^2}+\dfrac{dy}{1+y^2}$.

3107. $\dfrac{4xy\,(x\,dy-y\,dx)}{(x^2-y^2)^2}$. 3108. $\dfrac{x\,dy+y\,dx}{1+x^2y^2}$.

3109. $x^{zy-1}\,(yz\,dx+zx\ln x\,dy+xy\ln x\,dz)$. 3110. 0,08. 3111. $0{,}25e$.

3112. $\dfrac{1}{36}$. 3113. $\approx 7{,}5$. 3114. $\approx 0{,}005$. 3115. $\approx 1{,}08$.

3116. 5. 3117. $1{,}8\pm 0{,}2$. 3118. 4730 ± 100.

3119. $2\delta_a+\dfrac{\delta_B B\,\mathrm{sen}\,C}{\mathrm{sen}\,B\,\mathrm{sen}\,(B+C)}+\dfrac{\delta_C C\,\mathrm{sen}\,B}{\mathrm{sen}\,C\,\mathrm{sen}\,(B+C)}$.

3120. Crece con la velocidad igual a 444 cm^2/s. 3121. En $\approx 2575\ cm^3$.

3123. $dr=\dfrac{s}{p}\,ds+\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{s^2}{2p^2}\right)dp=0{,}16\ cm$, es decir, cerca de 1%.

3124. $e^{\mathrm{sen}\,t-2t^3}\,(\cos t-6t^2)$. 3125. $\mathrm{sen}\,2t+2e^{2t}+e^t\,(\mathrm{sen}\,t+\cos t)$.

3126. $\dfrac{3-12t^2}{\sqrt{1-(3t-4t^3)^2}}$.

3127. $\dfrac{\partial z}{\partial u}=3u^3\,\mathrm{sen}\,v\cos v\,(\cos v-\mathrm{sen}\,v)$;

$\dfrac{\partial z}{\partial v}=u^3\,(\mathrm{sen}\,v+\cos v)\,(1-3\,\mathrm{sen}\,v\cos v)$.

3128. $\dfrac{\partial z}{\partial u}=2\dfrac{u}{v^2}\ln(3u-2v)+\dfrac{3u^2}{v^2\,(3u-2v)}$;

$\dfrac{\partial z}{\partial v}=-\dfrac{2u^2}{v^3}\ln(3u-2v)-\dfrac{2u^2}{v^2\,(3u-2v)}$.

3129. $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{e^x}{e^x+e^y};\quad \dfrac{du}{dx}=\dfrac{e^x+3e^{x^3}x^2}{e^x+e^{x^3}}$.

3130. $\dfrac{dz}{dx}=\dfrac{e^x\,(x+1)}{1+x^2e^{2x}}$. 3131. $\dfrac{du}{dx}=\dfrac{1}{1+x^2}$.

3132. $\dfrac{dz}{dt}=\left(3-\dfrac{4}{t^3}-\dfrac{1}{2\sqrt{t}}\right)\sec^2\left(3t+\dfrac{2}{t^2}-\sqrt{t}\right)$.

3133. $\dfrac{du}{dx}=e^{ax}\,\mathrm{sen}\,x$.

3134. $dz=\frac{y^2\,dx+x^2\,dy}{(x+y)^2}\operatorname{arctg}(xy+x+y)+\frac{xy\,[(y+1)\,dx+(x+1)\,dy]}{(x+y)\,[1+(xy+x+y)^2]}$.

3135. $\frac{e^{\frac{x^2+y^2}{xy}}}{x^2y^2}\,[(y^4-x^4+2xy^3)\,x\,dy+(x^4-y^4+2x^3y)\,y\,dx]$.

3136. $\left.\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x}&=2x\,\frac{\partial f}{\partial u}+ye^{xy}\,\frac{\partial f}{\partial v},\\ \frac{\partial z}{\partial y}&=-2y\,\frac{\partial f}{\partial u}+xe^{xy}\,\frac{\partial f}{\partial v}\end{aligned}\right\}\quad\begin{aligned}u&=x^2-y^2;\\ v&=e^{xy}.\end{aligned}$

3145. $\frac{3x^2y-y^3}{3xy^2-x^3}$. 3146. $\frac{x\,(y^2-2x^2)}{y\,(2y^2-x^2)}$. 3147. $\frac{ye^{xy}-ye^{x}-e^{y}}{xe^{y}+e^{x}-xe^{xy}}$.

3148. $-\frac{x}{y}\cdot\frac{2\,(x^2+y^2)-a^2}{2\,(x^2+y^2)+a^2}$. 3149. $\frac{y}{x}\cdot\frac{2x+e^{xy}-\cos xy}{\cos xy-e^{xy}-x}$.

3150. $-\sqrt[3]{\frac{y}{x}}$. 3151. $\frac{y^2}{1-xy}$. 3152. $\frac{a^2}{(x+y)^2}$. 3153. $\frac{2y}{x\,(y-1)}$.

3154. $\frac{y}{y-1}$. 3155. $\frac{y^2\ln x-1}{x^2\ln y-1}$.

3157. $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{\substack{x=6\\ y=2}}=\frac{4}{3}$; $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{\substack{x=6\\ y=8}}=-\frac{4}{3}$.

3158. -1. 3161. $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{c^2x}{a^2z}$; $\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{c^2y}{b^2z}$.

3162. $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2-x}{z+1}$; $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2y}{z+1}$.

3163. $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{yz}{xy+z^2}$; $\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{xz}{xy+z^2}$

3164. $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{z}{x\,(z-1)}$; $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{z}{y\,(z-1)}$.

3167. $dz=-\frac{\operatorname{sen}2x\,dx+\operatorname{sen}2y\,dy}{\operatorname{sen}2z}$. 3168. $z=\frac{x^2-y^2}{4}$.

3169. $z=\frac{3xy-x^3}{2}$. 3170. $z=k\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$. 3171. $dz=\frac{x\,dx}{z}-\frac{y\,dy}{z}$.

3172. $dz=\frac{x\,dx}{a}+\frac{y\,dy}{a}$. 3173. $dz=\sqrt{z}\,(x\,dx-y\,dy)$.

3174. $2\,(x\,dx+y\,dy)$.
3175. $2\,(x\,dx+y\,dy)$.
3176. $dz=e^{-u}\,[(v\cos v-u\operatorname{sen}v)\,dx+(u\cos v+v\operatorname{sen}v)\,dy]$.

3185. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{2x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{x^2+2y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,dy}=\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

3186. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\frac{x}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{x^3+(x^2-y^2)\sqrt{x^2+y^2}}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}\,(x+\sqrt{x^2+y^2})^2}$;

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=-\frac{y}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

3187. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\frac{2x}{(1+x^2)^2}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\frac{2y}{(1+y^2)^2}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=0$.

3188. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=2a^2\cos 2(ax+by)$; $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=2b^2\cos 2(ax+by)$; $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=$
$=2ab\cos 2(ax+by)$.

3189. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=e^{xe^y+2y}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=x(1+xe^y)\,e^{xe^y+y}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=(1+xe^y)\,e^{xe^y+y}$.

3190. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\frac{4y}{(x+y)^3}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{4x}{(x+y)^3}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=\frac{2(x-y)}{(x+y)^3}$.

3191. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\ln y(\ln y+1)}{x^2}\,e^{\ln x\ln y}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\ln x(\ln x-1)}{y^2}\,e^{\ln x\ln y}$;
$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=\frac{\ln x\ln y+1}{xy}\,e^{\ln x\ln y}$.

3192. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{xy^3}{\sqrt{(1-x^2y^2)^3}}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{x^3y}{\sqrt{(1-x^2y^2)^3}}$;
$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=\frac{1}{\sqrt{(1-x^2y^2)^3}}$.

3193. $\frac{(x-z)\,y}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2-2xz)^3}}$. 3194. $2y^3(2+xy^2)\,e^{xy^2}$.

3195. $\frac{4x(3y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^3}$. 3196. $-x(2\operatorname{sen} xy+xy\cos xy)$.

3197. $(x^2y^2z^2+3xyz+1)\,e^{xyz}$.

3198. $mn(n-1)(n-2)\,p(p-1)\,x^{m-1}y^{n-3}z^{p-2}$. 3204. $a=-3$.

3209. $$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2-2\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2}{\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^3}=$$
$$=\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\begin{vmatrix}0 & \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y}\\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\\ \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\end{vmatrix}.$$

3219. $-2y\,dx^2+4(y-x)\,dx\,dy+2x\,dy^2$. 3220. $-\frac{(dx-dy)^2}{(x-y)^2}$.

3221. $\frac{(3x^2-y^2)\,dx^2+8xy\,dx\,dy+(3y^2-x^2)\,dy^2}{(x^2+y^2)^3}$.

3222. $2\operatorname{sen} 2y\,dx\,dy+2x\cos 2y\,dy^2$. 3223. $e^{xy}\,[(y\,dx+x\,dy)^2+2dx\,dy]$.

3224. $2(z\,dx\,dy+y\,dx\,dz+x\,dy\,dz)$.

3225. $-\cos(2x+y)(2\,dx+dy)^3$; $(2\,dx+dy)^3$; 0.

3226. $-\operatorname{sen}(x+y+z)(dx+dy+dz)^2$.

3227. $-\frac{c^4}{z^3}\left[\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)\frac{dx^2}{a^2}+\frac{2xy}{a^2b^2}\,dx\,dy+\left(\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)\frac{dy^2}{b^2}\right]$.

3228. $-\frac{2z\,[xy^3\,dx^2+(x^2y^2+2xyz^2-z^4)\,dx\,dy+x^3y\,dy^2]}{(z^2-xy)^3}$.

3229. $-31{,}5\,dx^2+206\,dx\,dy-306\,dy^2$. 3230. $\dfrac{d^2y}{dt^2}+y$.

3231. $y''-5y'+y$. 3232. $\dfrac{d^2y}{dt^2}+ay$. 3233. $y-x''$. 3234. $-\dfrac{x'''}{x'^5}$.

3235. $-\dfrac{v''+2v}{v^3}$. 3236. $\dfrac{d\rho}{d\varphi}=\rho$. 3237. $\dfrac{2\rho'^2-\rho\rho''+\rho^2}{(\rho'^2+\rho^2)^{\frac{3}{2}}}$.

3238. $-\dfrac{\partial z}{\partial v}$. 3239. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial\rho^2}+\dfrac{1}{\rho^2}\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}+\dfrac{1}{\rho}\,\dfrac{\partial u}{\partial\rho}$.

3240. $\omega''(\rho)+\dfrac{1}{\rho}\,\omega'(\rho)+k\omega(\rho)$. 3241. $-4\,\dfrac{\partial^2 w}{\partial u^2}+2$.

Al capítulo XI

3242. $x^3+2y^3-xy+h\,(3x^2-y)+k\,(6y^2-x)+3xh^2-hk+$
$+\,6yk^2+h^3+2k^3$.

3243. $\Delta z=15h^2-6hk+k^2+h^3$.

3244. $\Delta z=-2h+7k-4h^2+4hk+2k^2-2h^3-$

$$-\,h^2k+\frac{5}{2}\,hk^2+\frac{1}{4}\,k^3-h^3k+\frac{1}{2}\,h^2k^2+\frac{1}{4}\,hk^3;$$

$$f\,(1{,}02;\ 2{,}03)\approx 2{,}1726.$$

3245. $Ax^2+By^2+Cz^2+Dxy+Eyz+Fzx+$
$+\,(2Ax+Dy+Fz)\,h+(2By+Dx+Ez)\,k+$
$+\,(2Cz+Ey+Fx)\,l+Ah^2+Bk^2+Cl^2+Dhk+Ekl+Fhl$.

3246. $z=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)+\dfrac{1}{2}\left(y-\dfrac{\pi}{4}\right)-$

$$-\frac{1}{4}\left[\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2-2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\left(y-\frac{\pi}{4}\right)+\left(y-\frac{\pi}{4}\right)^2\right]-$$

$$-\frac{1}{6}\left[\cos\xi\cos\eta\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^3+3\,\mathrm{sen}\,\xi\cos\eta\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2\left(y-\frac{\pi}{4}\right)+\right.$$

$$\left.+\,3\cos\xi\,\mathrm{sen}\,\eta\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\left(y-\frac{\pi}{4}\right)^2+\mathrm{sen}\,\xi\cos\eta\left(y-\frac{\pi}{4}\right)^3\right].$$

3247. $z=1+(x-1)+(x-1)(y-1)+\dfrac{1}{2}(x-1)^2(y-1)+\ldots;\ z_1\approx 1{,}1021$.

3248. $e^x\left[\mathrm{sen}\,y+h\,\mathrm{sen}\,y+k\cos y+\dfrac{1}{2}(h^2\,\mathrm{sen}\,y+2hk\cos y-k^2\,\mathrm{sen}\,y)+\right.$

$$\left.+\frac{1}{6}(h^3\,\mathrm{sen}\,y+3h^2k\cos y-3hk^2\,\mathrm{sen}\,y-k^3\cos y)\right]+\ldots;\ z_1\approx 1{,}1051.$$

3249. $y+xy+\dfrac{1}{2}\,x^2y-\dfrac{1}{6}\,y^3+\ldots$

3250. $y+\dfrac{1}{2!}(2xy-y^2)+\dfrac{1}{3!}(3x^2y-3xy^2+2y^3)+\ldots$

3251. $1+(x+y)+\ldots+\dfrac{x^{n+1}-y^{n+1}}{x-y}+\ldots$

3252*. $x-y-\frac{1}{3}(x^3-y^3)+\frac{1}{5}(x^5-y^5)-\ldots+\frac{(-1)^n}{2n+1}(x^{2n+1}-y^{2n+1})+\ldots$

Fijarse en que $\operatorname{arctg}\frac{x-y}{1+xy}=\operatorname{arctg} x-\operatorname{arctg} y$.

3253. $\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}\right)\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{y^n}{n}\right)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sum\limits_{m=1}^{\infty}\frac{x^ny^m}{nm}$.

3254. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(x+y)^n-x^n-y^n}{n}$. 3255. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(x^2+y^2)^{2n+1}}{(2n+1)!}$.

3256. $\sum\limits_{m=0}^{\infty}\frac{x^m}{m!}\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{y^{2n}}{(2n)!}=\sum\limits_{m=0}^{\infty}\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^my^{2n}}{m!\,(2n)!}$.

3257. $z=1+(x-1)+\frac{1}{4}(y-1)-\frac{1}{8}(x-1)(y-1)+\frac{9}{64}(y-1)^2+\ldots$

3259. $(0, 0)$, $(-5/3, 0)$, $(-1, 2)$, $(-1, -2)$.
3260. $(1/2, -1)$.
3261. $(0, 0)$, $(0, a)$, $(a, 0)$, $(a/3, a/3)$.
3262. $(0, 0)$, $(0, 2b)$, (a, b), $(2a, 0)$, $(2a, 2b)$.
3263. $(\pi/6, \pi/6)$.
3264. $(b/a, c/a)$. 3265. $(-2/3, -2/3)$.
3266. $(2, 1, 7)$. 3267. $(6, 4, 10)$.

3268. A y C son los máximos, B es el mínimo; en el entorno de D la superficie ofrece la forma de ensilladura, a lo largo de EF la función conserva su valor constante.

3269. $(-2, 0)$, $(16/7, 0)$, cada uno de los puntos es estacionario para una de las ramas de la función.

3270. $(1, 1)$, $(-1, -1)$.

3271*. $(0, 0)$. Para comprobar que el punto hallado es el del máximo basta presentar la función en la forma $z = 10-(x-y)^2-2x^2-y^2$.

3272. $(2, -2)$.
3273. $(-1, 1)$.
3277. En el punto $(6, 4)$ se halla el máximo.

3278. En el punto $(0, 0)$ no existe el extremo. En el punto $(1, 1)$ se halla el mínimo.

3279. Los valores máximos y mínimos se hallan en la frontera del dominio; el máximo es $z = 4$ y se halla en los puntos $(2, 0)$ y $(-2, 0)$; el mínimo es $z = -4$ y se halla en los puntos $(0, 2)$ y $(0, -2)$. El punto estacionario $(0, 0)$ no da extremo.

3280. El valor máximo $z = 17$ se halla en el punto $(1, 2)$; el valor mínimo $z = -3$ se halla en el punto $(1, 0)$; el punto estacionario $(-4, 6)$ se encuentra fuera del dominio dado.

3281. El valor máximo $z = 4$ se halla en el punto estacionario $(2, 1)$ (de este modo este punto resulta el punto del máximo). El valor mínimo $z = -64$ se halla en el punto $(4, 2)$, en la frontera.

3282. El valor mínimo de la función es $z = 0$ y se halla en el punto $(0, 0)$. El valor máximo es $z = 3/e$ y se halla en los puntos $(0, \pm 1)$.

3283. $z_{\text{máx}}=\frac{3}{2}\sqrt{3}$ en el punto $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)$ (máximo),

$z_{\text{mín}}=0$ en el punto $(0, 0)$ (en la frontera).

3284. Todos los sumandos son iguales entre sí.

3285. Todos los factores son iguales entre sí.

3286. $\left(\frac{8}{5}, \frac{16}{5}\right)$. 3287. $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=3$.

3288. $x=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i}{n}$, $y=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} y_i}{n}$. 3289. $(3, \sqrt{39}, 0)$; $(3, -\sqrt{39}, 0)$.

3290. El cubo. **3291.** En el punto $(1, 1)$ está el mínimo, $z=2$.

3292. (a, a) ó $(-a, -a)$, $z=a^2$ (el máximo), $(a, -a)$ ó $(-a, a)$, $z=-a^2$ (el mínimo).

3293. $(-a\sqrt{2}, -a\sqrt{2})$, $z=-\sqrt{2}/a$ (el mínimo), $(a\sqrt{2}, a\sqrt{2})$, $z=\sqrt{2}/a$ (el máximo).

3294. Los puntos estacionarios son $x=-\frac{1}{2}\operatorname{Arctg}\frac{b}{a}$, $y=\frac{1}{2}\operatorname{Arctg}\frac{a}{b}$.

3295. $(3, 3, 3)$, $u=9$ (el mínimo).

3296. Cada una de dos de las variables es igual a 2, la tercera es igual a 1 (el mínimo igual a 4); cada una de dos de las variables es igual a $\frac{4}{3}$, la tercera es igual a $\frac{7}{3}$ $\left(\text{el máximo igual a } \frac{112}{27}\right)$.

3297*. Analizar si la función $\frac{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2}{n}$ tiene el mínimo cuando $x_1+x_2+\ldots+x_n=A$. En general, es válida la relación $\frac{\sum x_i^k}{n} \geqslant \left(\frac{\sum x_i}{n}\right)^k$, si $k \geqslant 1$ y $x_i \geqslant 0$.

3299. $u_{\text{mín}}=\frac{abc}{bc+ca+ab}$ para $x=\frac{bc}{bc+ca+ab}$; $y=\frac{ac}{bc+ac+ab}$; $z=\frac{ab}{bc+ac+ab}$.

3300. $u_{\text{máx}}=1$, $u_{\text{mín}}=-\frac{1}{2}$. **3301.** $\left(\frac{21}{13}, 2, \frac{63}{26}\right)$.

3302. $(3, -1, 1)$. **3303.** a) $(-2, 0, 0)$; b) $(2, 0, 0)$.

3304. El cubo. **3305.** El cubo. **3306.** $\frac{8abc}{3\sqrt{3}}$.

3307. Si R es el radio de la base de la tienda de campaña; H, la altura de la parte cónica; h, la altura de la cúspide cónica, deben verificarse las siguientes relaciones:

$$R=\frac{h\sqrt{5}}{2}, \qquad H=\frac{h}{2}.$$

3308. Si l es el lado del trapecio, b, la base y α, el ángulo de inclinación del lado, deben verificarse las siguientes relaciones:

$l=b=\frac{2\sqrt{A}}{\sqrt[4]{3^3}}$, $\alpha=\frac{\pi}{3}$, donde A es el área dada de la sección. La superficie lavada es $u=2\sqrt[4]{3}\cdot\sqrt{A}\approx 2{,}632\sqrt{A}$.

3309. El cubo.

3310. Cada uno de los lados de la base es igual a $2\alpha+\sqrt[3]{2v}$, la altura es dos veces menor: $\left(\alpha+\frac{1}{2}\sqrt[3]{2v}\right)$. 3311. a^3 (el cubo).

3312. El área mínima es igual a $3\sqrt{3}\,ab$.

3313. $\left(\frac{4}{\sqrt{5}}, \frac{3}{\sqrt{5}}\right)$ y $\left(-\frac{4}{\sqrt{5}}, -\frac{3}{\sqrt{5}}\right)$.

3314. $\left(-\frac{5}{9}, -\frac{1}{9}\right)$. 3315. $(3, 5)$. 3316. $z_{\text{máx}}=2$.

3317. Los lados del triángulo son $\sqrt{2S}$, $\sqrt{2S}$ y $2\sqrt{S}$.

3318. La altura es $\frac{H}{3}$, los lados de la base son $\frac{2a\sqrt{2}}{3}$ y $\frac{2b\sqrt{2}}{3}$, el volumen es $V=\frac{8}{27}abH$.

3319. Es el tetraedro.

3320. La normal a la elipse en el punto buscado debe ser perpendicular a la línea que une los puntos dados.

3321. La normal debe ser trazada en el punto cuyas coordenadas son

$$\left(\pm a\sqrt{\frac{a}{a+b}}, \pm b\sqrt{\frac{b}{a+b}}\right).$$

3322. $\left(9, \frac{1}{8}, \frac{3}{8}\right)$; $\left(-9, -\frac{1}{8}, -\frac{3}{8}\right)$. 3323. $2\sqrt{2}$.

3324. $x+y=2$; $y=x$. 3325. $x-y+a=0$; $x+y-3a=0$.
3326. $x+2y-1=0$; $2x-y-2=0$.
3327. $x-y+2=0$; $x+y-2=0$. 3328. $(0, 0)$. 3329. $(0,0)$. 3330. $(0, 0)$.
3331. $(a, 0)$. 3332. $(0, a)$, $(0, -a)$, $(a, 0)$, $(-a, 0)$.
3333. $(2, 0)$, $(-2, 0)$. 3334. $(0, 3)$, $(-3, 0)$, $(-6, 3)$.
3335. $(0, 0)$ es el punto doble. 3336. $(0, 0)$ es el punto aislado.
3337. $(0, 0)$ es el punto terminal.
3338. $k\pi$; $k=0, 1, 2, \ldots$ son los puntos de retroceso.
3339. $(a, 0)$ es el punto de retroceso. 3340. $(0, 0)$.
3341. $x=-f'(a)$, $y=f(a)-af'(a)$; $y=x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}$.
3342. $16y^3+27x^4=0$. 3342. $y^2=4ax$. 3344. $y=x/2$ e $y=-x/2$.
3345. $y=-x^4/4$. 3346. $y=0$ y $16y=x^4$.
3347. $y=x$ e $y=x-4/27$. La primera ecuación es el lugar geométrico de los puntos singulares; la segunda, la envolvente.

3348. $x^2+\frac{2}{3\sqrt{3}}y^2=0$ y $x^2-\frac{2}{3\sqrt{3}}y^3=0$. 3349. $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=d^{\frac{2}{3}}$.

3350. 4 rectas $x\pm y=\pm R$. 3351. $2by(x^2+y^2)+x^3=0$.

3352. Parábola $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$.

3353. Cicloide $x=\frac{R}{2}(t-\operatorname{sen} t)$, $y=\frac{R}{2}(1-\cos t)$.

3354. Elipse $x^2+\frac{y^2}{2}=R^2$. 3355. Hipérbola $xy=\frac{a}{4}$.

3357. Evoluta de la parábola $y^2=\frac{8}{27p}(x-p)^3$.

3359. Hipérbolas $xy=\frac{1}{2}$ y $xy=-\frac{1}{2}$.

3361. a) $2\boldsymbol{r}\cdot\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}=2\,|\boldsymbol{r}|\cdot\frac{d\,|\boldsymbol{r}|}{dt}$;

b) $\left(\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right)^2+\boldsymbol{r}\,\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}$; c) $\boldsymbol{r}\times\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}$;

d) $\left(\boldsymbol{r}\,\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\,\frac{d^3\boldsymbol{r}}{dt^3}\right)$.

3362. De la igualdad $\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}=\alpha(t)\,\boldsymbol{r}$ se deduce

$$\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}=\frac{d\alpha}{dt}\boldsymbol{r}+\alpha\,\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}=\left(\frac{d\alpha}{dt}+\alpha^2\right)\boldsymbol{r}=\beta(t)\cdot\boldsymbol{r},\ \text{etc.}$$

3363. Derivando la igualdad $\boldsymbol{r}^2=$ const (véase el ejercicio 3361) obtenemos $\boldsymbol{r}\cdot\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}=0$. La tangente a la línea esférica (o sea, a la línea situada en la esfera) es perpendicular al radio de la esfera trazado al punto de contacto. También se verifica el teorema inverso.

3368. $\frac{d\boldsymbol{r}}{dx}=\frac{d\boldsymbol{r}}{du}\,\varphi'$; $\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dx^2}=\frac{d^2\boldsymbol{r}}{du^2}\,\varphi'^2+\frac{d\boldsymbol{r}}{du}\,\varphi''$;

$$\frac{d^3\boldsymbol{r}}{dx^3}=\frac{d^3\boldsymbol{r}}{du^3}\,\varphi'^3+3\,\frac{d^2\boldsymbol{r}}{du^2}\,\varphi'\varphi''+\frac{d\boldsymbol{r}}{du}\,\varphi'''.$$

3370. De la igualdad $\boldsymbol{a}\,\frac{d\boldsymbol{r}(\tau)}{dt}=0$, donde $t_1<\tau<t_2$, se deduce que en la línea cerrada (debido a la igualdad $\boldsymbol{r}(t_1)=\boldsymbol{r}(t_2)$) habrá un punto en el cual la tangente sea perpendicular a cualquier dirección previamente dada.

3371. La hodógrafa de la velocidad $\boldsymbol{v}\,\{a\cos t,\ a\operatorname{sen} t,\ 2bt\}$ es una hélice, la hodógrafa de la aceleración $\boldsymbol{w}\,\{-a\operatorname{sen} t,\ a\cos t,\ 2b\}$ es una circunferencia.

3372. La multiplicación escalar por $\boldsymbol{a}$ y por $\boldsymbol{r}$ da: $\boldsymbol{a}\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}=0$, $\boldsymbol{r}\,\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}=0$. De donde $\boldsymbol{a}\boldsymbol{r}=$ const, es la ecuación del plano, $\boldsymbol{r}^2=$ const, es la ecuación de la esfera. La trayectoria buscada es una circunferencia cuyo plano es perpendicular al vector $\boldsymbol{a}$.

3374. Elipse. La velocidad es máxima en el momento en que el punto material se halle al final del semieje menor, y es mínima en el momento en que el punto se halle al final del semieje mayor. La aceleración es máxima (mínima) en el momento en que la velocidad es mínima (máxima).

3375. Componentes de la velocidad $\frac{d\rho}{dt}$; $\rho\,\frac{d\varphi}{dt}$; $\rho\operatorname{sen}\varphi\,\frac{d\theta}{dt}$. *Indicación.* Hallar los productos escalares $\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\,\boldsymbol{e}_\rho$; $\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\,\boldsymbol{e}_\varphi$; $\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\,\boldsymbol{e}_\theta$.

3376. $\dfrac{x-\frac{t^4}{4}}{t^2}=\dfrac{y-\frac{t^3}{3}}{t}=\dfrac{z-\frac{t^2}{2}}{1}$; $t^2x+ty+z=\frac{t^6}{4}+\frac{t^4}{3}+\frac{t^2}{2}$.

3377. $\dfrac{x-\frac{a\sqrt{2}}{2}}{-a\sqrt{2}}=\dfrac{y-\frac{a\sqrt{2}}{2}}{a\sqrt{2}}=\dfrac{z-\frac{k}{8}}{\frac{k}{\pi}}$; $-x+y+\frac{k}{\pi a\sqrt{2}}z=\frac{k^2}{8\pi a\sqrt{2}}$.

3378. $x-6a=\frac{y-18a}{6}=\frac{z-72a}{36}$; $x+6x+36z=2706a$.

3379. $\frac{x-\frac{\pi}{2}+1}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-2\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$; $x+y+\sqrt{2}\cdot z=\frac{\pi}{2}+4$.

3380. $\frac{x-1}{12}=\frac{y-3}{-4}=\frac{z-4}{3}$; $12x-4y+3z-12=0$.

3381. $\frac{x+2}{27}=\frac{y-1}{28}=\frac{z-6}{4}$; $27x+28y+4z+2=0$.

3382. $\frac{x-x_0}{z_0}=\frac{y-y_0}{z_0}=\frac{z-z_0}{y_0+x_0}$; $\frac{x+y}{x_0+y_0}+\frac{z}{z_0}=2$.

3383. $\frac{x-x_0}{y_0^2z_0^2}=\frac{y-y_0}{x_0^2z_0^2}=\frac{z-z_0}{-x_0^2y_0^2}$; $\frac{x-x_0}{x_0^2}+\frac{y-y_0}{y_0^2}-\frac{z-z_0}{z_0^2}=0$.

3384. $r_0\left\{\frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{1}{2},\ e^{\frac{\pi}{6}}\right\}$.

3385. $6x-8y-z+3=0$; $\frac{x-1}{6}=\frac{y-1}{-8}=\frac{z-1}{-1}$; $\frac{x-1}{31}=\frac{y-1}{26}=\frac{z-1}{-22}$.

3386. $\sqrt{b}\,(x-x_0)-\sqrt{a}\,(y-y_0)=0$; $\frac{x-x_0}{\sqrt{b}}=\frac{y-y_0}{-\sqrt{a}}=\frac{z-z_0}{0}$; $\frac{x-x_0}{\sqrt{2az_0}}=$

$$=\frac{y-y_0}{\sqrt{2bz_0}}=\frac{z-z_0}{-(a+b)}.$$

3387. $\frac{1}{e}\,x-ey-\sqrt{2}z+2=0$; $\frac{x-e}{-\frac{1}{e}}=\frac{y-\frac{1}{e}}{e}=\frac{z-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$;

$$\frac{x-e}{1}=\frac{y-\frac{1}{e}}{1}=\frac{z-\sqrt{2}}{-\sqrt{2}\,\mathrm{sh}\,1}.$$

3389. $\frac{x-1}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z-1}{3}$; $2x-y+3z-5=0$;

$\frac{x-1}{3}=\frac{y}{3}=\frac{z-1}{-1}$; $3x+3y-z-2=0$; $\frac{x-1}{8}=\frac{y}{-11}=\frac{z-1}{-9}$; $8x-11y-9z+1=0$.

3390. $\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-1}{0}$; $x-y=0$; $\frac{x-1}{0}=\frac{y-1}{0}=\frac{z-1}{1}$;

$z=1$; $\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-1}{0}$; $x+y-2=0$.

3391. $\frac{x-\frac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{2}}=\frac{y-\frac{\sqrt{2}}{2}}{-\sqrt{2}}=\frac{z-1}{4}$; $\sqrt{2}x-\sqrt{2}y+4z=4$;

$$\frac{x-\frac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{2}}=\frac{y-\frac{\sqrt{2}}{2}}{3\sqrt{2}}=\frac{z-1}{1};\quad \sqrt{2}x+3\sqrt{2}y+z-5=0;$$

$$\frac{x-\frac{\sqrt{2}}{2}}{13}=\frac{y-\frac{\sqrt{2}}{2}}{-3}=\frac{z-1}{-4\sqrt{2}}; \quad -13x+3y+4\sqrt{2}z+\sqrt{2}=0.$$

3392. $\frac{x+1}{2}=\frac{y-13}{3}=\frac{z}{6}$; $2x+3y+6z=37$;

$\frac{x+1}{6}=\frac{y-13}{2}=\frac{z}{-3}$; $6x+2y-3z=20$;

$\frac{x+1}{3}=\frac{y-13}{-6}=\frac{z}{2}$; $3x-6y+2z=-81$.

3393. Para cualquier punto de la línea la ecuación del plano osculador es $3x-2y-11=0$, o sea, toda la línea pertenece a este plano.

3394. El plano osculador es el mismo para todos los puntos de la línea. Su ecuación es

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

3395. $\frac{\operatorname{ch}^2 t}{\operatorname{sh} t}$. 3396. $R=\sqrt{2}\operatorname{cosec} 2t$.

3398. $k=\sqrt{\frac{(y'z''-z'y'')^2+y''^2+z''^2}{(1+y'^2+z'^2)^3}}$.

3399. $\boldsymbol{\tau}_1=\frac{\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}'|}$, $\boldsymbol{\beta}_1=\frac{\boldsymbol{r}'\times\boldsymbol{r}''}{|\boldsymbol{r}'\times\boldsymbol{r}''|}$, $\boldsymbol{\nu}_1=\frac{(\boldsymbol{r}'\times\boldsymbol{r}'')\times\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}'|\cdot|\boldsymbol{r}'\times\boldsymbol{r}''|}$.

3400. $\boldsymbol{\tau}_1=\boldsymbol{\nu}_1\times\boldsymbol{\beta}_1$; $\boldsymbol{\nu}_1=\boldsymbol{\beta}_1\times\boldsymbol{\tau}_1$; $\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\tau}_1\times\boldsymbol{\nu}_1$.

3401. El vector buscado $\boldsymbol{\omega}$ (si es que existe) es susceptible de ser presentado en la forma

$$\boldsymbol{\omega}=(\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{\tau}_1)\,\boldsymbol{\tau}_1+(\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{\nu}_1)\,\boldsymbol{\nu}_1+(\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{\beta}_1)\,\boldsymbol{\beta}_1. \qquad (1)$$

De todos los datos expuestos en el ejercicio (teniendo en cuenta las fórmulas de Frénet) se deduce que

$$\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\tau}_1=k\boldsymbol{\nu}_1;\quad \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\nu}_1=-k\boldsymbol{\tau}_1+T\boldsymbol{\beta}_1;\quad \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\beta}_1=-T\boldsymbol{\nu}_1. \qquad (2)$$

Multiplicando estas igualdades de manera escalar por $\boldsymbol{\nu}_1$, $\boldsymbol{\beta}_1$, $\boldsymbol{\tau}_1$, respectivamente, obtenemos $\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{\tau}_1=T$, $\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{\nu}_1=0$, $\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{\beta}_1=k$ y, por consiguiente, $\boldsymbol{\omega}=T\boldsymbol{\tau}_1+k\boldsymbol{\beta}_1$. La sustitución en las fórmulas (2) muestra que este vector satisface los datos expuestos en el ejercicio.

3402. $99+\ln 10\approx 101{,}43$. 3403. $a\ln(1+\sqrt{2})=a\ln\operatorname{tg}\frac{3\pi}{8}$.

3404. $\sqrt{3}(e^t-1)$. 3405. 5. 3406. $4a$. 3407. $z\sqrt{2}$.

3408. $a\ln\frac{\sqrt{2a}+\sqrt{x}}{\sqrt{2a}-\sqrt{x}}$. 3409. $\frac{a}{2}\left(1+\frac{1}{2}\ln 3\right)$.

3410. $8x-8y-z=4$; $\frac{x-2}{8}=\frac{y-1}{-8}=\frac{z-4}{-1}$.

3411. $x+y-z-1=0$; $\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-1}{-1}$. 3412. $z+a=0$, $x=a$, $y=a$.

3413. $17x+11y+5z=60$; $\frac{x-3}{17}=\frac{y-4}{11}=\frac{z+7}{5}$.

3414. $x-y+2z-\frac{\pi}{2}=0$; $\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-\frac{\pi}{2}}{2}$.

3415. $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=\sqrt{3}$;

$$a\left(x-\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)=b\left(y-\frac{b\sqrt{3}}{3}\right)=c\left(z-\frac{c\sqrt{3}}{3}\right).$$

3416. $x+11y+5z-18=0$; $\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{11}=\frac{z+1}{5}$.

3417. $3x-2y-2z+1=0$; $\frac{x-1}{3}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z-1}{-2}$.

3418. $2x+y+11z-25=0$; $\frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-2}{11}$.

3419. $5x+4y+z-28=0$; $\frac{x-2}{5}=\frac{y-3}{4}=\frac{z-6}{1}$.

3421. $x-y+2z=\sqrt{\frac{11}{2}}$ y $x-y+2z=-\sqrt{\frac{11}{2}}$.

3422. $x+y+z=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$.

3424. Todos los planos pasan por el origen de coordenadas.

3425. $x_0x+y_0y+z_0z=a^2$; $\frac{x}{x_0}=\frac{y}{y_0}=\frac{z}{z_0}$.

3426. $\frac{xx_0}{a^2}-\frac{yy_0}{b^2}=2(z+z_0)$; $\frac{a(x-x_0)}{bx_0}=-\frac{b(y-y_0)}{ay_0}=\frac{z-z_0}{-2ab}$.

3428. $\frac{9}{2}a^2$. **3430.** $2x+y-z=2$. **3434.** $4x-2y-3z+3$.

3435. Es paralelo al plano xOy en los puntos $(0, 3, 3)$ y $(0, 3, -7)$; al plano yOz en los puntos $(5, 3, -2)$ y $(-5, 3, -2)$; al plano xOz en los puntos $(0, -2, -2)$ y $(0, 8, -2)$.

3436. a) $6u_0v_0x-3(u_0+v_0)y+2z+(u_0+v_0)(u_0^2-4u_0v_0+v_0^2)=0$;

b) $3(x_0^2-y_0)x-3x_0(y+y_0)+2z+4z_0=0$.

3437. $2z(x^2+y^2+z^2)+p(x^2+y^2)=0$.

3438. $(x^2+y^2+z^2)^3=27a^3xyz$.

3439. 1) $\{-2, 1\}$; 2) $\{10xy-3y^3, 5x^2-9xy^2+4y^3\}$.

3440. 1) $6\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}$; 2) $\frac{1}{3}(2\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j})$; 3) $\frac{-y_0\boldsymbol{i}+x_0\boldsymbol{j}}{x_0^2+y_0^2}$.

3441. 1) $\operatorname{tg}\varphi\approx 0{,}342$, $\varphi\approx 18°\,52'$; 2) $\operatorname{tg}\varphi\approx 4{,}87$, $\varphi\approx 78°\,24'$.

3442. El semieje negativo y.

3443. 1) $\cos\alpha\approx 0{,}99$, $\alpha=8°$; 2) $\cos\alpha\approx -0{,}199$, $\alpha\approx 101°\,30'$.

3444. 1) $\left(-\frac{1}{3}, \frac{3}{4}\right)$; $\left(\frac{7}{3}; -\frac{3}{4}\right)$; 2) Los puntos situados en la circunferencia $x^2+y^2=\frac{2}{3}$.

3447. 1) $\{3x_0^2y_0^2z_0, 2x_0^3y_0z_0, x_0^3y_0^2\}$; 2) $\frac{x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\frac{\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|}$, donde $\boldsymbol{r}$ es el radio vector.

3450. 1) $2r$; 2) $2\frac{r}{|r|}$; 3) $2F'(r^2)\,r$; 4) $a(br)+b(ar)$; 5) $a\times b$.

3451. 1) 0; 2) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 3) $-\sqrt{5}$; 4) $\frac{\cos\alpha+\operatorname{sen}\alpha}{2}$. **3452.** $\frac{\sqrt{2}}{3}$.

3453. $\frac{1}{2}$. **3455.** 1) 5; 2) $\frac{98}{13}$. **3456.** -22. **3459.** $\frac{1}{r^2}$.

Al capítulo XII

3460. $M=\iint\limits_D \gamma(x, y)\,d\sigma$. **3461.** $E=\iint\limits_D \sigma(x, y)\,d\sigma$.

3462. $T=\frac{1}{2}\omega^2\iint\limits_D y^2\gamma(x, y)\,d\sigma$.

3463. $Q=(t_2-t_1)\iint\limits_D c(x, y)\,\gamma(x, y)\,d\sigma$.

3464. $M=\iiint\limits_\Omega \gamma(x, y, z)\,dv$. **3465.** $E=\iiint\limits_\Omega \delta(x, y, z)\,dv$.

3466. $8\pi(5-\sqrt{2})<I<8\pi(5+\sqrt{2})$. **3467.** $36\pi<I<100\pi$.

3468. $2<I<8$. **3469.** $-8<I<\frac{2}{3}$. **3470.** $0<I<64$.

3471. $4<I<36$. **3472.** $4<I<8(5-2\sqrt{2})$. **3473.** $4\pi<I<22\pi$.

3474. $0<I<\frac{4}{3}\pi R^5$. **3475.** $24<I<72$.

3476. $28\pi\sqrt{3}<I<52\pi\sqrt{3}$. **3477.** 1. **3478.** $(e-1)^2$.

3479. $\frac{\pi}{12}$. **3480.** $\ln\frac{4}{3}$. **3481.** $\ln\frac{2-\sqrt{2}}{1+\sqrt{3}}$.

3482. $\pi-2$. **3483.** 2. **3484.** $-\frac{\pi}{16}$.

3485. $\int\limits_3^5 dx\int\limits_{\frac{3x+1}{2}}^{\frac{3x+4}{2}} f(x, y)\,dy$. **3486.** $\int\limits_0^2 dx\int\limits_0^{2-x} f(x, y)\,dy$.

3487. $\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y)\,dy$. **3488.** $\int\limits_0^1 dx\int\limits_{x-1}^{1-x} f(x, y)\,dy$.

3489. $\int\limits_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} dx\int\limits_{x^2}^{4-x^2} f(x, y)\,dy$. **3490.** $\int\limits_{-2}^{2} dx\int\limits_{-\frac{3}{2}\sqrt{4-x^2}}^{\frac{3}{2}\sqrt{4-x^2}} f(x, y)\,dy$.

3491. $\int_0^4 dx \int_{2-\sqrt{4x-x^2}}^{3+\sqrt{4x-x^2}} f(x, y)\, dy.$ 3492. $\int_0^1 dx \int_{x^2}^{\sqrt[3]{x}} f(x, y)\, dy.$

3493. $\int_0^2 dx \int_x^{2x} f(x, y)\, dy + \int_2^3 dx \int_x^{6-x} f(x, y)\, dy.$

3494. $\int_{-\frac{2}{3}}^{\frac{1}{3}} dx \int_{1-2x}^{x+3} f(x, y)\, dy + \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} dx \int_x^{x+3} f(x, y)\, dy + \int_{\frac{2}{3}}^{\frac{5}{3}} dx \int_x^{5-2x} f(x, y)\, dy.$

3495. $\int_0^1 dx \int_{\frac{x}{2}}^{2x} f(x, y)\, dy + \int_1^2 dx \int_{\frac{x}{2}}^{\frac{2}{x}} f(x, y)\, dy.$

3496. $\int_0^2 dx \int_{-2\sqrt{2x}}^{2x} f(x, y)\, dy + \int_2^{\frac{9}{2}} dx \int_{-2\sqrt{2x}}^{2\sqrt{2x}} f(x, y)\, dy +$

$+ \int_{\frac{9}{2}}^{8} dx \int_{-2\sqrt{2x}}^{24-4x} f(x, y)\, dy.$

3497. $\int_{-3}^{-2} dx \int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} f(x, y)\, dy + \int_{-2}^{2} dx \int_{-\sqrt{1+x^2}}^{\sqrt{1+x^2}} f(x, y)\, dy +$

$+ \int_2^3 dx \int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} f(x, y)\, dy.$

3498. $\int_0^1 dx \int_{x^2}^{x} f(x, y)\, dy.$ 3499. $\int_0^1 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y)\, dx.$

3500. $\int_0^r dy \int_{r-\sqrt{r^2-y^2}}^{y} f(x, y)\, dx.$ 3501. $\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} dy \int_{-\sqrt{4-2y^2}}^{\sqrt{4-2y^2}} f(x, y)\, dx.$

3502. $\int_1^2 dy \int_1^y f(x, y)\, dx + \int_2^4 dy \int_{\frac{y}{2}}^{2} f(x, y)\, dx.$

3503. $\int\limits_0^4 dy \int\limits_0^{\frac{y}{2}} f(x, y)\,dx + \int\limits_4^6 dy \int\limits_0^{6-y} f(x, y)\,dx.$

3504. 1) $\int\limits_0^1 dy \int\limits_y^{2-y} f(x, y)\,dx$; 2) $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{\sqrt{y}}^{3-2y} f(x, y)\,dx$;

3) $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{y^{\frac{3}{2}}}^{2-\sqrt{2y-y^2}} f(x, y)\,dx.$

3505. 1) $\int\limits_0^2 dy \int\limits_{\frac{y}{2}}^{2y} f(x, y)\,dx + \int\limits_2^4 dy \int\limits_{2y-3}^{\frac{y+6}{2}} f(x, y)\,dx$;

2) $\int\limits_1^3 dy \int\limits_{\frac{y+1}{2}}^{\frac{9-y}{2}} f(x, y)\,dx$; 3) $\int\limits_{-1}^3 dx \int\limits_0^{1+\sqrt{3+2x-x^2}} f(x, y)\,dy$;

4) $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{1-\sqrt{1-y^2}}^{3+\sqrt{1-y^2}} f(x, y)\,dx + \int\limits_1^2 dy \int\limits_{2-\sqrt{2y-y^2}}^{2+\sqrt{2y-y^2}} f(x, y)\,dx.$

3506. 1) $\frac{2}{3}a^{\frac{3}{2}}$; 2) 9; 3) $\frac{1}{2}$. **3507.** 0. **3508.** $\frac{33}{140}$. **3509.** $\frac{9}{4}$.
3510. -2. **3511.** $\frac{\pi}{6}$. **3512.** $\frac{4}{135}$. **3513.** 4. **3514.** 3. **3515.** $12\frac{2}{3}$.
3516. $\frac{2}{3}R$. **3517.** 6. **3518.** $\frac{abc(a+b+c)}{2}$. **3519.** $\frac{a^6}{48}$. **3520.** $\frac{a^{11}}{110}$.
3521. $2e-5$. **3522.** $\frac{1}{2}\left(\ln 2-\frac{5}{8}\right)$. **3523.** $\frac{1}{180}$. **3524.** $\frac{\pi^2}{16}-\frac{1}{2}$.

3525. 1) $\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^R f(\rho\cos\varphi,\ \rho\,\mathrm{sen}\,\varphi)\,\rho\,d\rho$;

2) $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^{a\cos\varphi} f(\rho\cos\varphi,\ \rho\,\mathrm{sen}\,\varphi)\,\rho\,d\rho$;

3) $\int\limits_0^{\pi} d\varphi \int\limits_0^{b\,\mathrm{sen}\,\varphi} f(\rho\cos\varphi,\ \rho\,\mathrm{sen}\,\varphi)\,\rho\,d\rho.$

3526. $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\operatorname{arctg} 2} d\varphi \int\limits_{4\cos\varphi}^{8\cos\varphi} f(\rho\cos\varphi,\ \rho\operatorname{sen}\varphi)\,\rho\,d\rho.$

3527. $\int\limits_{0}^{\operatorname{arctg}\frac{a}{b}} d\varphi \int\limits^{b\operatorname{sen}\varphi} f(\rho\cos\varphi,\ \rho\operatorname{sen}\varphi)\,\rho\,d\rho +$

$$+\int\limits_{\operatorname{arctg}\frac{a}{b}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_{0}^{a\cos\varphi} f(\rho\cos\varphi,\ \rho\operatorname{sen}\rho)\,\rho\,d\rho.$$

3528. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int\limits_{0}^{\sec\varphi} f(\rho\cos\varphi,\ \rho\operatorname{sen}\varphi)\,\rho\,d\rho.$

3529. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_{\sqrt{2}\sec\left(\varphi-\frac{\pi}{4}\right)}^{2} f(\rho\cos\varphi,\ \rho\operatorname{sen}\varphi)\,\rho\,d\rho.$

3530. $\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int\limits_{0}^{a\sqrt{\cos 2\varphi}} f(\rho\cos\varphi,\ \rho\operatorname{sen}\varphi)\,\rho\,d\rho.$

3531. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_{0}^{a\operatorname{sen}2\varphi} f(\rho\cos\varphi,\ \rho\operatorname{sen}\varphi)\,\rho\,d\rho.$

3532. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_{0}^{R} f(\rho\cos\varphi,\ \rho\operatorname{sen}\varphi)\,\rho\,d\rho.$

3533. $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_{\frac{R}{2\operatorname{sen}\varphi}}^{2R\operatorname{sen}\varphi} f(\rho\cos\varphi,\ \rho\operatorname{sen}\varphi)\,\rho\,d\rho.$

3534. $\frac{\pi}{2}\int\limits_{0}^{R} f(\rho^2)\,\rho\,d\rho.$ 3535. $\frac{R^2}{2}\int\limits_{0}^{\operatorname{arctg} R} f(\operatorname{tg}\varphi)\,d\varphi.$

3536. $\frac{\pi}{4}[(1+R^2)\ln(1+R^2)-R^2].$

3537. $\frac{\pi(\pi-2)}{8}$. 3538. $\pi R^2 h$. 3539. $\frac{R^3}{3}\left(\pi-\frac{4}{3}\right)$. 3540. $\frac{\pi^2}{6}$.

3542. $x=2\rho\cos\varphi,\ y=3\rho\,\mathrm{sen}\,\varphi;\ I=6\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^1 f(2\rho\cos\varphi,\ 3\rho\,\mathrm{sen}\,\varphi)\,\rho\,d\rho.$

3543. $x=\rho\cos\varphi,\ y=\sqrt{3}\,\rho\,\mathrm{sen}\,\varphi;$

$$I=\sqrt{3}\int\limits_0^{\pi}d\varphi\int\limits_0^{\sqrt{3}\cos^2\varphi\,\mathrm{sen}\,\varphi} f(\rho\cos\varphi,\ \sqrt{3}\,\rho\,\mathrm{sen}\,\varphi)\,\rho\,d\rho.$$

3544. $x=a\rho\cos\varphi,\ y=b\rho\,\mathrm{sen}\,\varphi;\ I=ab\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int\limits_1^2 f(\sqrt{4-\rho^2})\,\rho\,d\rho.$

3545. $\frac{a^2b^2}{8}$. 3546. $\frac{1}{\sqrt[4]{6}}$. 3547. $\int\limits_0^1 dz\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}d\varphi\int\limits_0^R f(\rho\cos\varphi,\ \rho\,\mathrm{sen}\,\varphi,\ z)\,\rho\,d\rho.$

3548. $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int\limits_0^{2\cos\varphi}\rho\,d\rho\int\limits_0^{\rho^2} f(\rho\cos\varphi,\ \rho\,\mathrm{sen}\,\varphi,\ z)\,dz.$

3549. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{sen}\,\theta\,d\theta\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int\limits_0^R f(\rho\cos\varphi\,\mathrm{sen}\,\theta,\ \rho\,\mathrm{sen}\,\varphi\,\mathrm{sen}\,\theta,\ \rho\cos\theta)\,\rho^2\,d\rho.$

3550. $\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}d\varphi\int\limits_0^{R\sqrt{\cos 2\varphi}}\rho\,d\rho\int\limits_{-\sqrt{R^2-\rho^2}}^{\sqrt{R^2-\rho^2}} f(\rho\cos\varphi,\ \rho\,\mathrm{sen}\,\varphi,\ z)\,dz.$

3551. $\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\frac{R\sqrt{3}}{2}}\rho\,d\rho\int\limits_{R-\sqrt{R^2-\rho^2}}^{\sqrt{R^2-\rho^2}} f(\rho\cos\varphi,\ \rho\,\mathrm{sen}\,\varphi,\ z)\,dz$ ó

$$\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}}\mathrm{sen}\,\theta\,d\theta\int\limits_0^R f(\rho\cos\varphi\,\mathrm{sen}\,\theta,\ \rho\,\mathrm{sen}\,\varphi\,\mathrm{sen}\,\theta,\ \rho\cos\theta)\,\rho^2\,d\rho+$$

$$+\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{sen}\,\theta\,d\theta\int\limits_0^{2R\cos\theta} f(\rho\cos\varphi\,\mathrm{sen}\,\theta,\ \rho\,\mathrm{sen}\,\varphi\,\mathrm{sen}\,\theta,\ \rho\cos\theta)\,\rho^2\,d\rho.$$

3552. $\frac{\pi a}{2}$. 3553. $\frac{8}{9}a^2$. 3554. $\frac{4}{15}\pi R^5$. 3555. $\frac{\pi}{8}$.

3556. $\frac{4}{15}\pi(R^5-r^5)$. 3557. $\frac{2\pi}{3}$. 3558. $\pi\left[3\sqrt{10}+\ln\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{10}-3}-\sqrt{2}-8\right]$.

3559. $186\frac{2}{3}$. 3560. $\frac{ab}{6}\left(\frac{a^2}{p}+\frac{b^2}{q}\right)$. 3561. $\frac{abc}{6}$. 3562. 12. 3563. $\frac{1}{6}$.

3564. $78\frac{15}{32}$. 3565. $\frac{48}{5}\sqrt{6}$. 3566. 16. 3567. 45.

3568. $13\frac{1}{3}$. 3569. $16\frac{1}{5}$. 3570. $ar^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{3}\right)$. 3571. 22π.

3572. $\frac{16}{3}R^3$. 3573. $12\frac{4}{21}$. 3574. $\frac{4R^5}{15a^2}$. 3575. 27. 3576. $\frac{3}{8}$.

3577. $\frac{88}{105}$. 3578. $\frac{1}{3}abc$. 3579. $\frac{\pi a^3}{4}$. 3580. $2\left(e^2-\frac{2e^3+1}{9}\right)$.

3581. $3e-8$. 3582*. $4e-e^2-1$. El cuerpo es simétrico respecto al plano $y=x$. 3583. $2\left(\pi^2-\frac{35}{9}\right)$. 3584. $\frac{1}{45}$. 3585. $\frac{16}{9}$. 3586. $\frac{\pi}{4}$.

3587. 40π. 3588. 2π. 3589. $\frac{5}{2}\pi R^3$. 3590. $\frac{3}{2}\pi a^3$.

3591. $\frac{4}{3}a^2\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}\right)$. 3592. $\frac{a^3}{24}$. 3593. $\frac{15}{8}\left(\frac{3\pi}{8}+1\right)$.

3594. $\frac{3}{2}\left(\frac{\pi}{2}-1\right)$. 3595. $\frac{\pi\sqrt{2}}{24}$. 3596. $\frac{\pi^2R^2h}{16}$. 3597. $\frac{1}{2}$.

3598. 2. 3599. πab. 3600. $\frac{ab}{6}$. 3601. $\frac{16}{3}$.

3602*. $\frac{5}{8}\pi a^2$. Pasar a las coordenadas polares. 3603. $\frac{3}{4}\pi$.

3604. $2a^2$. 3605. $\frac{2}{3}$. 3606. $\frac{1}{60}$. 3607. $\frac{1}{1260}$.

3608*. 1) $\frac{a^2b^2}{2c^2}$; 2) $\frac{39}{25}\pi$. Valerse del resultado del ejercicio 3541.

3609. 8. 3610. $\frac{7}{12}$. 3611. $\frac{3}{35}$. 3612. $4(4-3\ln 3)$.

3613*. $\frac{\pi}{2}$. La proyección del cuerpo al plano Oxy es un círculo.

3614. $\frac{\pi}{8}$. Pasar el origen de coordenadas al punto $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$.

3615*. $\frac{19}{6}\pi$ y $\frac{15}{2}\pi$. Pasar a las coordenadas cilíndricas.

3616. $\frac{5}{12}\pi R^3$. 3617. $\frac{\pi}{96}$. 3618. $\frac{92}{75}\pi R^3$.

3619*. $\frac{1}{3}\pi a^3$. Pasar a las coordenadas esféricas. 3620. $\frac{a^3}{360}$.

3621. $\frac{4}{21}\pi a^3$. 3622. $\frac{4}{3}\pi a^3$. 3623. $\frac{64}{105}\pi a^3$. 3624. $\frac{\pi^2a^3}{6}$.

3625. $\frac{21(2-\sqrt{2})}{4}\pi$. 3626. 14. 3627. 36. 3628. 8π.

3629. $2\sqrt{2}\,\pi p^2$. 3630*. $2\pi R^2$. Proyectar la superficie sobre el plano Oyz.

3631. $8\sqrt{2}\,ab$. 3632. $\frac{16}{3}(\sqrt{8}-1)$. 3633. $\frac{2\pi}{3}\{(1+R^2)^{\frac{3}{2}}-1\}$.

3634. $\frac{2\pi}{3}(\sqrt{8}-1)$. 3635. $4\pi a\,(a-\sqrt{a^2-R^2})$.

3636. $2R^2(\pi-2)$. 3637. $2R^2(\pi+4-4\sqrt{2})$.

3638. $\frac{\pi}{4}\left\{3\sqrt{2}-\sqrt{3}-\frac{\sqrt{2}}{2}\ln 2+\sqrt{2}\ln(\sqrt{3}+\sqrt{2})\right\}$. 3639. $\frac{2a^2}{\operatorname{sen} 2\alpha}$.

3640*. $\frac{\pi R^2}{12}(\sqrt{3}-\sqrt{2})\approx 3.42\cdot 10^8 km^2$. Pasar a las coordenadas esféricas.

3641. $\frac{16}{3}\pi a^2$. 3642. $8R^2$. 3643. $\frac{ab^2}{2}$. 3644. $\frac{2}{3}R^3$. 3645. πR^3.

3646. $\frac{9}{4}a^3$. 3647. El momento estático es igual a $\frac{ah^2}{6}$.

3648. El centro de gravedad se halla en el eje menor, a la distancia igual a $\frac{4b}{3\pi}$ del eje mayor (b es el eje menor).

3649. $\xi=\left(1-\frac{\pi}{4}\right)(\sqrt{2}+1)$, $\eta=\frac{1}{8}\left(\frac{\pi}{2}-1\right)(2+\sqrt{2})$.

3650. El centro de gravedad se halla en la bisectriz del ángulo α, a la distancia igual a $\frac{4}{3}R\frac{\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}}{\alpha}$ del centro del círculo.

3651. El centro de gravedad se halla en la bisectriz del ángulo α, a la distancia igual a $\frac{4}{3}R\frac{\operatorname{sen}^3\frac{\alpha}{2}}{\alpha-\operatorname{sen}\alpha}$ del centro del círculo.

3652. $\xi=\frac{3\pi}{16}$, $\eta=0$. 3653. $\frac{5}{4}\pi R^4$. 3654. $\frac{2}{3}a^4$. 3655. $\frac{\pi ab}{4}(a^2+b^2)$.

3656. $\frac{ab(a^2+b^2)}{12}$. 3657. $\frac{ah}{48}(a^2+12h^2)$. 3658. $\frac{3\pi R^4}{2}$. 3659. $ah\left(\frac{2h^2}{7}+\frac{a^2}{30}\right)$.

3660*. Seleccionar el sistema de coordenadas de tal modo que el origen de coordenadas coincida con el centro de gravedad de la figura y que uno de los ejes de coordenadas sea paralelo al eje respecto al cual se busca el momento de inercia.

3663. $\frac{a^2bc}{2}\cdot\frac{ab^2c}{2}$ y $\frac{abc^2}{2}$. 3664. $\frac{\pi R^2H^2}{4}$. 3665. $\frac{\pi abc^2}{4}$.

3666. $\xi=\frac{14}{15}$, $\eta=\frac{26}{15}$, $\zeta=\frac{8}{3}$. 3667. $\xi=\frac{3}{8}a$, $\eta=\frac{3}{8}b$, $\zeta=\frac{3}{8}c$.

3668. $\xi=\frac{6}{5}$, $\eta=\frac{12}{5}$, $\zeta=\frac{8}{5}$. 3669. $\xi=\frac{18}{7}$, $\eta=\frac{15}{16}\sqrt{6}$, $\zeta=\frac{12}{7}$.

3670. $\xi=0$, $\eta=0$, $\zeta=\frac{15a}{83}(6\sqrt{3}+5)$.

3671. $\xi=0$, $\eta=0$, $\zeta=\frac{3R}{8}(1+\cos\alpha)$.

3672. $\xi=0,\ \eta=0,\ \zeta=\frac{9a}{20}$. 3673. $\xi=\frac{R}{2},\ \eta=\frac{R}{2},\ \zeta=\frac{R}{2}$.

3674. $\xi=0,\ \eta=0,\ \zeta=\frac{55+9\sqrt{3}}{130}$.

3675. $\frac{1}{3}M(b^2+c^2),\ \frac{1}{3}M(c^2+a^2),\ \frac{1}{3}M(a^2+b^2)$ y $\frac{1}{12}M(a^2+b^2+c^2)$.

3676. $\frac{7}{5}MR^2$. 3677. $\frac{1}{5}M(b^2+c^2),\ \frac{1}{5}M(c^2+a^2),\ \frac{1}{5}M(a^2+b^2)$.

3678. $M\left(\frac{R^2}{4}+\frac{H^2}{3}\right)$ y $\frac{M}{12}(H^2+3R^2)$. 3679. $\frac{2}{5}M\frac{R^5-r^5}{R^3-r^3}$.

3680. $\frac{1}{36}\pi R^2H(3R^2+H^2)$. 3681. $\frac{1}{2}M\left(R^2+\frac{1}{6}H^2\right)$. 3682. $\frac{55+9\sqrt{3}}{65}Mc^2$.

3683. $\frac{M}{2}(R^2+r^2)$. 3684. $\frac{4}{3}a^2$. 3685. $2\pi r(R-r)$.

3686. $\frac{4}{3}\gamma ab^2$. 3687. $2\pi\gamma(R^2-r^2)$. 3688. $\frac{\pi R^2H}{6}(3R^2+2H^2)$.

3689*. $\frac{\pi\gamma h^{n+3}\operatorname{tg}^2\alpha}{n+3}$. Si el eje Oz se toma por el del cono y el origen de coordenadas, por su vértice, la ecuación del cono es $x^2+y^2-z^2\operatorname{tg}^2\alpha=0$.

3690. $\frac{2}{3}\pi\gamma R^6$. 3691. $\frac{\pi a^5}{5}\left(18\sqrt{3}-\frac{97}{6}\right)$.

3692*. $\xi=0,\ \eta=0,\ \zeta=\frac{5}{4}R$. Pasar a las coordenadas cilíndricas.

3693*. $\frac{59}{480}\pi R^5$. Véase la indicación al ejercicio anterior.

3694*. Seleccionar el sistema de coordenadas de tal modo que el origen de coordenadas coincida con el centro de gravedad del cuerpo y uno de los ejes de coordenadas sea paralelo al eje respecto al cual se busca el momento de inercia.

3695. $\frac{Mkm}{a^2}$, donde M es la masa de la esfera, y k es la constante gravitacional.

3696*. Valerse del resultado del ejercicio anterior.

3697. $\frac{17}{56}\frac{kM}{R^2}$, k es la constante gravitacional.

3699. El centro de presión se halla en el eje de simetría del rectángulo perpendicular al lado a, a la distancia igual a $\frac{2}{3}b$ del lado situado en la superficie. En el segundo caso (el lado a situado a la profundidad igual a h), la distancia que medie entre el centro de presión y el lado superior será igual a $\frac{2b}{3}\frac{b+\frac{3}{2}l}{b+2l}$, donde $l=\frac{h}{\operatorname{sen}\alpha}$. (Para $l\gg b$ el centro de presión casi coincide con el del rectángulo.)

3700. a) $\frac{h}{2}\operatorname{sen}\alpha$; b) $\frac{3}{4}h\operatorname{sen}\alpha$.

3701. El centro de presión se halla en el eje mayor de la elipse, a la distancia igual a $a+\frac{a^2}{4(a+h)}$ de su extremo superior.

3702*. Seleccionar el sistema de coordenadas de tal modo que uno de los planos de coordenadas coincida con el de la placa y uno de los ejes, con la línea de intersección de la superficie del líquido con el plano de la placa.
3703. Diverge. **3704.** 2π.

3705. $\frac{\pi}{4a^2}$. **3706.** 4. **3707.** 2. **3708.** $\frac{1}{4}$.

3709*. $\frac{\alpha}{2 \operatorname{sen} \alpha}$. Pasar a las coordenadas polares.

3710*. $\frac{1}{2}$. Cambiar el orden de integración.

3711. $\frac{1}{16}$. Véase la indicación al ejercicio anterior.

3712. Converge. **3713.** Diverge. **3714.** Converge.
3715. Diverge. **3716.** No.

3717. $\frac{8}{15}$. **3718.** $\frac{\pi}{16}$. **3719*.** $\pi\sqrt{\pi}$; valerse de la integral de Poisson $\int\limits_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

3720. Diverge. **3721.** Converge. **3722.** Diverge.

3723. $\frac{8}{3}\pi R^3\left(\ln R - \frac{1}{3}\right)$. **3724*.** π. (Véase la indicación al ejercicio 3719.) **3725.** $\frac{\pi}{4}$. **3726.** $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$. **3727.** $2\pi km\gamma\,(R+H-\sqrt{R^2+H^2})$. La fuerza está dirigida a lo largo del eje del cilindro, k es la constante gravitacional.

3728. $\frac{2\pi km\gamma H}{l}(l-H)$, donde l es la generatriz del cono. La fuerza está dirigida a lo largo del eje del cono.

3729. a) $a = 4\gamma_C - 3\gamma_0$, $b = \frac{4}{R}(\gamma_C - \gamma_0)$; b) $\frac{4}{3}\pi kR\gamma_C = \frac{kMm}{R^2}$.

3730. Está definida por todas partes excepto $x=0$. **3731.** 3π.

3733. $\frac{b}{8a^4}\left\{\frac{5a^2+3b^2}{(a^2+b^2)^2} + \frac{3}{ab}\operatorname{arctg}\frac{b}{a}\right\}$.

3734. $\frac{1\cdot3\cdot5\,\ldots\,(2n-3)}{2\cdot4\cdot6\,\ldots\,(2n-2)}\,\frac{\pi}{2a^{2n-1}}\ (n>1)$.

3735. $\frac{(n-1)!}{a^n}$. **3736*.** $\frac{\pi(a^2+b^2)}{4\,|ab|^3}$; Derivar respecto a a y b y sumar los resultados.

3737. $\ln(1+a)$. **3738.** $\frac{1}{2}\ln(1+a)$.

3739. $\frac{\pi}{2}\ln(a+\sqrt{1+a^2})$. **3740.** $\pi(\sqrt{1-a^2}-1)$.

3741. $\frac{\pi}{2}\ln(1+a)$, si $a \geqslant 0$; $-\frac{\pi}{2}\ln(1-a)$, si $a \leqslant 0$.

3742. $\pi\ln\frac{1+\sqrt{1-a^2}}{2}$.

3743. $\pi \operatorname{arcsen} a$. **3744.** $\pi \operatorname{arcsen} a$. **3745.** $\sqrt{\pi a}$.

3746*. $\sqrt{\pi}(\sqrt{b}-\sqrt{a})$. Derivar respecto a a o respecto a b.

3747*. $\operatorname{arctg}\frac{b}{a}-\operatorname{arctg}\frac{c}{a}=\operatorname{arctg}\frac{a(b-c)}{a^2+bc}$. Derivar respecto a b o c.

3748. $\frac{1}{2}\ln\frac{a^2+b^2}{a^2+c^2}$. 3749*. $\pi\ln\frac{a+b}{2}$. Derivar respecto a a o b.

3750. $\frac{\pi}{2}\ln(1+a)$, si $a>0$; $-\frac{\pi}{2}\ln(1-a)$, si $a<0$;

$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x}{\operatorname{tg}x}\,dx=\frac{\pi}{2}\ln 2$. 3751*. $\ln\frac{1+\beta}{1+\alpha}$. Efectuar la integración respecto al parámetro n deste α hasta β.

3752. $\sqrt{\pi}(b-a)$. 3753. $\int\limits_0^\infty\frac{\cos x\,dx}{\sqrt{x}}=\int\limits_0^\infty\frac{\operatorname{sen}x\,dx}{\sqrt{x}}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

3755. $\frac{\pi}{2}\ln\frac{a}{b}$. 3756. $\frac{1}{n}\ln\frac{b}{a}$.

3757*. $I=\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\left[\int\limits_\varepsilon^\infty\frac{f(ax)-f(bx)}{\sqrt{x}}\,dx\right]=$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int\limits_\varepsilon^\infty\frac{f(ax)}{x}\,dx-\int\limits_\varepsilon^\infty\frac{f(bx)}{x}\,dx\right]=\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{a\varepsilon}^{b\varepsilon}\frac{f(x)}{x}\,dx.$$

Evaluamos la última integral sustituyendo $f(x)$ por sus valores máximo y mínimo en el intervalo $(a\varepsilon, b\varepsilon)$, y pasamos al límite.

3758. $\ln\frac{b}{a}$. 3759. $\ln\frac{b}{a}$. 3760. $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{a+b}{a-b}\right|$. 3761. $ab\ln\frac{b}{a}$.

3762*. $\frac{3}{4}\ln 3$. Presentando $\operatorname{sen}^3 x$ en forma de la diferencia de los senos de los arcos múltiples, reducimos el problema de este ejercicio al del ejercicio anterior (seleccionando convenientemente a y b).

3763*. Para demostrar las relaciones se puede valerse de dos métodos, a saber: 1) efectuando la integración por partes; 2) cambiando el orden de integración en la integral doble que se obtiene después de sustituir $\Phi(az)$ por la integral.

3764*. Véase la indicación al ejercicio 3763.

3765*. Valerse del segundo método de la resolución del №3763. Para demostrar la segunda relación es necesario analizar la integral

$$\int\limits_0^\infty\frac{\operatorname{sen}ax\cos(x\operatorname{sen}\theta)}{x}\,dx$$

para $|a|>1$ y $|a|\leqslant 1$. Para ello transformar la expresión del numerador, y tener en cuenta que $\int\limits_0^\infty\frac{\operatorname{sen}x}{x}\,dx=\frac{\pi}{2}$ (integral de Dirichlet).

3767*. En el primer miembro de la igualdad sometida a prueba, poner las expresiones para y' o y'' que se obtienen derivando la integral y respecto al parámetro. Efectuar la integración por partes de uno de los sumandos obtenidos.
3768*. Véase la indicación al ejercicio 3767.
3769*. Véase la indicación al ejercicio 3767.

Al capítulo XIII

3770. $\sqrt{5}\ln 2$. **3771.** 24. **3772.** $\frac{p^2}{3}(5\sqrt{5}-1)$. **3773.** $2\pi a^{2n+1}$.

3774. $\frac{ab(a^2+ab+b^2)}{3(a+b)}$. **3775.** $4\pi a\sqrt{a}$.

3776. $\int\limits_{\varphi_2}^{\varphi_1} F(\rho\cos\varphi,\ \rho\operatorname{sen}\varphi)\sqrt{\rho^2+\rho'^2}\,d\varphi$.

3777*. $\frac{\pi a^2}{2}$. Pasar a las coordenadas polares.

3778. $\frac{2a^3\sqrt{2}}{3}$. **3779.** $\frac{1}{12}[(R^2+4)^{\frac{3}{2}}-8]$. **3780.** $\frac{8a\pi^3\sqrt{2}}{3}$.

3781. $\frac{R^4\sqrt{3}}{32}$. **3782.** $\frac{2\sqrt{2}}{3}[(1+2\pi^2)^{\frac{3}{2}}-1]$. **3783.** $R^2\sqrt{2}$.

3784. $\frac{1}{3}\{(x_2^2+1)^{\frac{3}{2}}-(x_1^2+1)^{\frac{3}{2}}\}$. **3785.** $8a$.

3786. $\frac{b^2}{2}+\frac{ab}{2\varepsilon}\arcsen\varepsilon$, donde ε es la excentricidad de la elipse.

3787. $\left(2\pi a^2+\frac{8\pi^3b^2}{3}\right)\sqrt{a^2+b^2}$. **3788.** $(1-e^{-t})\sqrt{3}$.

3789. $\left(0,\ \frac{2a}{\pi},\ \frac{b\pi}{2}\right)$. **3790.** $\frac{8k\sqrt{2}}{15}[(3\pi^2-1)(2\pi^2+1)^{\frac{3}{2}}+1]$.

3791. $I_x=I_y=\left(\frac{a^2}{2}+\frac{h^2}{3}\right)\sqrt{4\pi^2a^2+h^2}$, $I_z=a^2\sqrt{4\pi^2a^2+h^2}$.

3792. $3\pi R^2$. **3793.** $\frac{\pi p^2}{4}$. **3794.** $\frac{11}{3}$. **3795.** R^2.

3796. $ka\left(a+\frac{b^2}{2c}\ln\frac{a+c}{a-c}\right)$, donde $c=\sqrt{a^2-b^2}$. Para $a=b$ $S=2ka^2$.

3797. $\frac{98}{81}p^2$. **3798.** $8R^2$. **3799.** $4R^2$. **3800.** $\frac{2Im}{a}$.

3801. $\frac{8mI\sqrt{2}}{a}$. **3803.** $\frac{2\pi mIa}{b^2}$, donde a y b son los semiejes de la elipse. **3804.** $\frac{2\pi mI}{p}$. **3805.** $\frac{2\pi mIR^2}{(h^2+R^2)^{\frac{3}{2}}}$. Para $R=h\sqrt{2}$.

3806. 3. **3807.** $\frac{ab}{2}$. **3808.** $-\frac{56}{15}$. **3809.** $37\frac{1}{3}$. **3810.** 4π.

3811. 1) $\frac{1}{3}$; 2) $\frac{1}{12}$; 3) $\frac{17}{30}$; 4) $-\frac{1}{20}$.

3812. En los cuatro casos la integral es igual a 1.

3813. 0. 3814. $-2\pi ab$. 3815. $-\frac{4}{3}a$. 3816. πa^2.

3817. $\frac{3}{16}\pi R\sqrt[3]{R}$. 3818. 13. 3819. 0. 3820. $3\sqrt{3}$. 3821. $-\frac{\pi R^3}{4}$.

3822. $\iint\limits_D (x^2+y^2)\,dx\,dy$. 3823. $\iint\limits_D (y-x)\,e^{xy}\,dx\,dy$.

3824. $\frac{\pi R^4}{2}$. 3825. 1) 0; 2) $-\frac{\pi a^3}{8}$. 3827. $\frac{1}{3}$.

3836*. Aplicar la fórmula de Green al dominio doblemente conexo limitado por el contorno L y y cualquier circunferencia cuyo centro se halle en el origen de coordenadas y que no se corte con el contorno L.

3837. π. 3838. 8. 3839. 4. 3840. $\ln\frac{13}{5}$. 3841. R_2-R_1. 3842. $\frac{10}{3}$.

3843. 0. 3844. $-\frac{9}{2}$. 3845. $u=\frac{x^3+y^3}{3}+C$.

3846. $u=(x^2-y^2)^2+C$. 3847. $u=\ln|x+y|-\frac{y}{x+y}+C$.

3848. $u=\frac{\sqrt{x^2+y^2}+1}{y}+C$.

3849. $u=\ln|x-y|+\frac{y}{x-y}+\frac{x^2}{2}-\frac{y^3}{3}+C$.

3850. $u=x^2\cos y+y^2\cos x+C$.

3851. $u=\frac{e^y-1}{1+x^2}+y+C$. 3852. $u=\frac{x-y}{(x+y)^2}+C$.

3853. $n=1$, $u=\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)+\operatorname{arctg}\frac{y}{x}+C$.

3854. $a=b=-1$, $u=\frac{x-y}{x^2+y^2}+C$.

3855. $u=\ln|x+y+z|+C$. 3856. $u=\sqrt{x^2+y^2+z^2}+C$.

3857. $\operatorname{arctg} xyz+C$. 3858. $u=\frac{2x}{x-yz}+C$.

3859. $u=\frac{x-3y}{z}+\frac{z^2}{2}+C$. 3860. $u=e^{\frac{y}{z}}(x+1)+e^{yz}-e^{-z}$.

3861. πab. 3862. $\frac{3}{8}\pi a^2$. 3863. $6\pi a^2$.

3864*. $\frac{3}{2}a^2$. Poner $y=tx$ al pasar al parámetro.

3865. $\frac{1}{60}$. 3866. $\frac{1}{210}$. 3867*. $2a^2$. Poner $y=x\operatorname{tg} t$.

3868*. $\frac{1}{30}$. Poner $y=xt^2$. 3869. FR.

3870. 1) $\frac{4}{3}$; 2) $\frac{17}{12}$; 3) $\frac{3}{2}$ y 1. 3871. a) $\frac{a^2-b^2}{2}$; b) 0. 3872. 0.

3873. $\frac{k\sqrt{a^2+b^2+c^2}}{c}\ln 2$ donde k es el coeficiente de proporcionalidad.

3874. $0{,}5\,k\ln 2$, donde k es el coeficiente de proporcionalidad.

3876. $4\sqrt{61}$. 3877. $\frac{\sqrt{3}}{120}$. 3878. $\frac{\pi R^3}{4}$. 3879. 0.

3880. πR^3. 3881. $\frac{2\pi R^6}{15}$. 3882. $2\pi\,\mathrm{arctg}\,\frac{H}{R}$.

3883. $\frac{2\pi R}{c(n-2)}\left[\frac{1}{(c-R)^{n-2}}-\frac{1}{(c+R)^{n-2}}\right]$ para $n\neq 2$;
$\frac{2\pi R}{c}\ln\frac{c+R}{c-R}$ para $n=2$.

3884. $\pi\,[R\sqrt{R^2+1}+\ln(R+\sqrt{R^2+1})]$.

3885*. π^2R^3. Valerse de las coordenadas esféricas.

3886. $\frac{8}{3}\pi R^4$. 3887. 3. 3888. $\frac{2\pi R^7}{105}$. 3889. $\frac{4}{3}\pi abc$. 3890. 0.

3891. $\frac{1}{8}$. 3892. $R^2H\left(\frac{2R}{3}+\frac{\pi H}{8}\right)$. 3893. $\frac{\pi}{8}$.

3894. $2\iint\limits_S (x-y)\,dx\,dy+(y-z)\,dy\,dz+(z-x)\,dx\,dz$.

3895. $-\frac{\pi R^6}{8}$. 3896. $2\iiint\limits_\Omega (x+y+z)\,dx\,dy\,dz$.

3897. $\iiint\limits_\Omega \frac{x+y+z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\,dx\,dy\,dz$. 3898. 0. 3899. $\frac{12}{5}\pi R^5$.

Al capítulo XIII

3901. $1+y^2=C(1-x^2)$. 3902. $x^2+y^2=\ln Cx^2$.

3903. $y=\sqrt[3]{C+3x-3x^2}$. 3904. $y=C\,\mathrm{sen}\,x-a$. 3905. $Cx=\frac{y-1}{y}$.

3906. $x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}=C$. 3907. $\sqrt{1-y^2}=\arcsen x+C$.

3908. $e^t=C(1-e^{-S})$. 3909. $10^x+10^{-y}=C$.

3910. $\ln\left|\mathrm{tg}\,\frac{y}{4}\right|=C-2\,\mathrm{sen}\,\frac{x}{2}$. 3911. $t=\frac{1}{a}\left(l+\frac{b\cdot l^{1-n}}{1-n}\right)$.

3912. $t=\frac{v^2}{2\sqrt{k_1k_2}}\ln\frac{\sqrt{k_1}(1-x)+x\sqrt{k_2}}{\sqrt{k_1}(1-x)-x\sqrt{k_2}}$.

3913. $y=e^{\mathrm{tg}\frac{x}{2}}$. 3914. $y=\frac{1+x}{1-x}$. 3915. $\cos x=\sqrt{2}\cos y$.

3916. $y=\frac{b+x}{1+bx}$. 3917. Hipérbola $xy=6$.

3918. Tractriz $y=\sqrt{4-x^2}+2\ln\left|\frac{2-\sqrt{4-x^2}}{x}\right|$.

3919. Parábolas $y^2=Cx$. 3920. $y^k=Cx$. 3921. $y=e^{\frac{x-a}{a}}$.

3922. $(x-C)^2+y^2=a^2$. 3923. $y=\frac{1}{k}\ln|C(k^2x^2-1)|$. 3924. $x=y^n$.

3925. $\approx 2{,}7\ \frac{m}{s}$. 3927. $0{,}467\ \frac{km}{hora}$; $85{,}2\ m$.

3928. $H=\left[\sqrt{h}-\frac{\sqrt{2g}}{4S}qT\right]^2$. 3929. $\ln\left|\frac{\theta_0-\theta_1}{\theta-\theta_1}\right|=\frac{k_0}{2}(2t+\alpha t^2)$.

3930*. Si t es el tiempo calculado a partir de la medianoche y expresado en horas, la ecuación diferencial ofrece la siguiente forma

$$\frac{dS}{S\sqrt{S}}=k\cos\frac{\pi(t-12)}{12}\,dt;\ \text{de donde}\ S=\frac{160\,000}{\left[9-\operatorname{sen}\frac{\pi(t-12)}{12}\right]^2}.$$

La función $S(t)$ está definida para $6\leqslant t\leqslant 18$.

3931. $x+\operatorname{ctg}\frac{x-y}{2}=C$. 3932. $4y-8x-7=Ce^{-2x}$.

3933. $x+C=2u+\frac{2}{3}\ln|u-1|-\frac{8}{3}\ln(u+2)$, donde $u=\sqrt{1+x+y}$.

3934. $y-2x=Cx^3(y+x)$. 3935. $\operatorname{arctg}\frac{y}{x}=\ln C\sqrt{x^2+y^2}$.

3936. $\ln|y|+\frac{x}{y}=C$. 3937. $x^2+y^2=Cy$. 3938. $y=\pm x\sqrt{2\ln|Cx|}$.

3939. $x^2=C^2+2Cy$. 3940. $e^{\frac{y}{x}}=Cy$. 3941. $\ln|Cx|=-e^{-\frac{y}{x}}$.

3942. $y=xe^{1+Cx}$. 3943. $(x+y)^2=Cx^3e^{-\frac{x}{x+y}}$.

3944. $Cx=\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$. 3945. $\sqrt{x^2+y^2}=e^{\frac{y}{x}\operatorname{arctg}\frac{y}{x}}$.

3946. $y^3=y^2-x^2$. 3947. $y=-x$. 3948. $y^2=5\pm 2\sqrt{5}\,x$.

3949. Si $\frac{y}{x}=u$, ó $\ln|x|=\int\frac{du}{\varphi\left(\frac{1}{u}\right)}$; $\varphi(u)=-\frac{1}{u^2}$ ó $\varphi\left(\frac{x}{y}\right)=$ $=-\frac{y^2}{x^2}$. 3950. $x=Ce^{\pm 2\sqrt{\frac{y}{x}}}$. 3951. $x=y\ln|Cy|$. 3952. $x^2=2Cy+C^2$.

3953*. Presenta la forma del paraboloide de revolución. Sea el plano Oxy el plano meridiano de la superficie del espejo. La línea buscada pertenece a este plano. La ecuación diferencial se obtiene si igualamos los tangentes de los ángulos de incidencia y de reflexión expresados mediante x, y, y'.

3954. $y=Ce^{-2x}+2x-1$. 3955. $y=e^{-x^2}\left(C+\frac{x^2}{2}\right)$.

3956. $y=Cx^2e^{\frac{1}{x}}+x^2$. 3957. $y=(x+C)(1+x^2)$.

3958. $y=Ce^{-x}+\frac{1}{2}(\cos x+\operatorname{sen} x)$.

3959. Si $m\neq -a$, se tiene $y=Ce^{-ax}+\frac{e^{mx}}{m+a}$; si $m=-a$, se tiene $y=$ $=(C+x)e^{mx}$.

3960. $y^2-2x=Cy^3$. 3961. $x=Ce^{2y}+\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{2}y+\frac{1}{4}$.

3962. $x=y\ln y+\frac{C}{y}$. 3963. $y=e^x\left(\ln|x|+\frac{x^2}{2}\right)+Ce^x$.

3964. $y=Ce^{-\Phi(x)}+\Phi(x)-1$. 3965. $y=\frac{x}{\cos x}$.

3966. $y=\frac{e^x+ab-e^a}{x}$. 3967. $y=\frac{x}{x+1}(x-1+\ln|x|)$.

3968. $x=-t\operatorname{arctg} t$. 3969. b) $\alpha+\beta=1$. 3971. $y=Cx-x\ln|x|-2$.

3972*. $y=Cx\pm\frac{a^2}{2x}$. La ecuación diferencial del ejercicio es $|xy-x^2y'|=a^2$.

3973*. $x=Cy\pm\frac{a^2}{y}$. La ecuación diferencial del ejercicio es $\left|xy-y^2\frac{dx}{dy}\right|=2a^2$.

3974. $v=\frac{k_1}{k}\left(t-\frac{m}{k}+\frac{m}{k}e^{-\frac{ht}{m}}\right)$.

3975. $v=(v_0+b)e^{-at^2}+b(at^2-1)$, donde $a=\frac{k_1}{2m}$; $b=\frac{2km}{k_1^2}$.

3976. $\theta-\theta_0=e^{-kt}\int\limits_0^t\varphi(t)e^{kt}\,dt$. 3977. 9,03 a.

3978. $I=\frac{E_0}{R^2+\omega^2L^2}\cdot\left[\omega Le^{-\frac{Rt}{L}}+R\operatorname{sen}\omega t-\omega L\cos\omega t\right]$.

3979. $x=Ce^{\operatorname{arctg}\frac{y}{x}}$. 3980. $y=Cx^2+\frac{1}{x}$.

3981. $y=\frac{C}{x}\sqrt{x^2+1}+\frac{(1+x^2)^2}{3x}$. 3982. $y=Cx-1$.

3983. $(1+x^2)(1+y^2)=Cx^2$. 3984. $(x+y)^2(2x+y)^3=C$.

3985. $x=Ce^{-\frac{x^2}{2y^2}}$. 3986. $\operatorname{sen}\frac{y}{x}=Cx$.

3987. $\operatorname{sen}\frac{y}{x}+\ln|x|=C$. 3988. $y=Ce^{-e^x}+e^x-1$.

3989. $y(y-2x)^3=C(y-x)^2$. 3990. $y=Ce^{\operatorname{sen} y}-2(1+\operatorname{sen} y)$.

3991. $x=y^2(1+Ce^{\frac{1}{y}})$. 3992. $y=Ce^{-\operatorname{sen} x}+\operatorname{sen} x-1$.

3993. $y=(C+e^x)(1+x)^n$. 3994. $y^4=4xy+C$.

3995. $y=C\cdot e^x$ e $y=C+\frac{x^2}{2}$.

3996*. $y^2=\frac{2}{3}\operatorname{sen} x+\frac{C}{\operatorname{sen}^2 x}$. Reducir a la ecuación lineal respecto a $z=y^2$.

3997. $\operatorname{arctg}(x+y)=x+C$. 3999. $\operatorname{arctg}\frac{y}{x}+\ln(x^2+y^2)=\frac{\pi}{4}+\ln 2$.

4000. $y=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,[2+x\sqrt{1-x^2}+\operatorname{arcsen} x]$.

4001. $(1+y)\,e^{-y}=\ln\frac{1+e^x}{2}+1-x$. 4002. $y=\frac{5}{3}\,e^{x^2}-\frac{1}{3}\,(2+x^3)$.

4004. $y=\frac{1}{2k}\,[e^{kx+C}+e^{-(kx+C)}]$. 4005. $x^2+y^2=Cx$.

4006. $(y-x)^2\,(x+2y)=1$. 4007. Parábolas $y=x+Cx^2$.
4008. $(2y^2-x^2)^3=Cx^2$. 4009. Catenaria. 4010. $y=Cx^2$.

4011*. Haz de rectas $y-y_0=C\,(x-x_0)$. La ecuación diferencial es $y-y_0=y'\,(x-x_0)$.

4012. Circunferencia cuyo centro se halla en el punto (x_0, y_0): $x^2+y^2=2\,(xx_0+yy_0)$.

4013. Cualquier circunferencia cuyo centro se halle en el eje Oy y que toque el eje Ox.

4014. Si el trayecto es S y el tiempo t, se tiene $S=S_0+Ce^{-k_2t}-\frac{k_1}{k_2^2}\,t+\frac{k_1}{2k_2}\,t^2$, donde S_0 es el trayecto inicial, y k_1 y k_2 son coeficientes de proporcionalidad.

4016. 1) $\frac{8}{9}$ vueltas por segundo; 2) al cabo de 6 *min* 18 *s*. 4017. 0,00082 *s*.

4018*. $v=v_0\left(1-\frac{m}{M_0}\,t\right)^{-1}e^{-\frac{3f_0}{mv_0}}\left(1-\sqrt[3]{1-\frac{m}{M_0}\,t}\right)$.

La fuerza efectiva F es igual a $\frac{d\,(m\cdot v)}{dt}$. Para resolver el problema de este ejercicio y los dos siguientes es necesario tener en cuenta que la masa m es una magnitud variable que depende del tiempo t. La velocidad v es la función buscada.

4019*. $v=\frac{g}{2m-k}\,(M_0-mt)\left[\left(1-\frac{m}{M_0}\,t\right)^{\frac{k}{m}-2}-1\right]$. Véase la indicación al ejercicio 4018.

4020*. $v=\frac{g}{\mu}\,e^{k_1\mu^{2/3}}\int\limits_0^1\mu e^{-k_1\mu^{2/3}}dt$, donde $\mu=M_0-mt$, $k_1=\frac{3k}{m}\times\sqrt[3]{\frac{9\pi}{2\gamma^2}}$. Véase la indicación al ejercicio 4018.

4021*. $y=m_0+\frac{m_0}{k_1-k_2}\,(k_2e^{-k_1t}-k_1e^{-k_2t})$, donde t es el tiempo, y es la cantidad del segundo producto. Si x es la cantidad del primer producto formado al cabo de t unidades del tiempo, se tiene $\frac{dx}{dt}=k_1\,(m_0-x)$. De donde hallamos $x=x\,(t)$. La velocidad $\frac{dy}{dt}$ de la formación del segundo producto es proporcional a la magnitud $x-y$.

4022. 2,97 *kg* de la sal. El máximo se obtiene para $t=33\frac{1}{3}$ *min* y es igual a 3,68 *kg*.

4023. $I = 1 + (I_0 - 1)\, e^{-t^2}$. 4024*. $p = \dfrac{p_0 l e^{h\omega^2 x^2}}{\int\limits_0^l e^{h\omega^2 x^2}\, dx}$, donde $k = \dfrac{M}{2p_0 lS}$.

Tiene importancia práctica el caso en que ω es muy grande (el caso de una centrífuga). En vez de calcular la integral en el denominador siendo dada ω (no puede ser expresada en funciones elementales) calculan $\lim\limits_{\omega\to\infty} p$ (véase el ejercicio 2439). La ecuación diferencial del problema presenta la forma

$$S\, dp = \omega^2 x\, dm,$$

donde dm es la masa del elemento CD. Luego, $\gamma = 2kp$ (una de las formas de la ley de Boyle—Mariotte; el coeficiente de proporcionalidad viene designado por $2k$ para simplificar la notación más abajo); $dm = \gamma S\, dx = 2kpS\, dx$. Como resultado obtenemos la ecuación con variables separables

$\dfrac{dp}{p} = 2k\omega^2 x\, dx$. Efectuando su integración, obtenemos $p = Ce^{h\omega^2 x^2}$. Luego, $M = \int\limits_0^M dm = C \cdot 2kT \cdot \int\limits_0^l e^{h\omega^2 x^2}\, dx$, de donde se halla C. Tenemos:

$$p = \frac{Me^{h\omega^2 x^2}}{2kS \int\limits_0^l e^{h\omega^2 x^2}\, dx}, \text{ pero } \gamma_0 = 2kp_0 = \frac{M}{lS}, \quad k = \frac{M}{2p_0 lS}$$

y, definitivamente,

$$p = \frac{p_0 l e^{h\omega^2 x^2}}{\int\limits_0^l e^{h\omega^2 x^2}\, dx}.$$

4025. $(x + y - 1)^3 = C(x - y + 3)$. 4026. $x^2 - xy + y^2 + x - y = C$.

4027. $y - 2y + \ln|x + y| = C$. 4028. $e^{+2\,\mathrm{arctg}\frac{y+2}{x-3}} = C(y+2)$.

4029. $y^2 = x + (x+1)\ln\dfrac{C}{x+1}$. 4030. $y^2 e^{-\frac{y^2}{x}} = C$.

4031. $y = \dfrac{1}{x}\,\mathrm{tg}\ln|Cx|$. 4032. $x^2y^2 + 1 = Cy$. 4033. $Cx = 1 - \dfrac{x}{x^2 + y^2}$.

4034. $(1 + Cx)\, e^y = 1$. 4035. $y^4 + 2x^2y^2 + 2y^2 = C$.
4036. $x^2 + y^2 = C(y-1)^2$. 4037. $y = x\,\mathrm{tg}(x + C)$.

4038. $\dfrac{1}{y^2} = Ce^{2x^2} + x^2 + \dfrac{1}{2}$. 4039. $y = \dfrac{1}{(1+x)\,[C + \ln|1+x|]}$.

4040. $ny^n = Ce^{\frac{-nx}{a}} + nx - a$. 4041. $x^2 = y^2(C - y^2)$.
4042. $y(1 + \ln x + Cx) = 1$. 4043. $y(x + C) = \sec x$.
4044. $y = \left(\dfrac{C + \ln|\cos x|}{x} + \mathrm{tg}\, x\right)^2$. 4045. $y = \dfrac{x^4}{4}\ln^2|Cx|$.

4046. $y^2 = Ce^{\frac{-2a}{x}} - \dfrac{b}{a}$. 4047. $y = \dfrac{\varphi(x)}{x + C}$.

4048. 1) $\frac{a}{x}+\frac{b}{y}=1$; 2) $\frac{a}{x^2}+\frac{b}{y^2}=1$. 4049. $\frac{\rho-k}{\rho}=\frac{(\rho_0-k)\varphi}{\rho_0\varphi_0}$.

4050. $x^4-x^2y^2+y^4=C$. 4051. $x+\operatorname{arctg}\frac{y}{x}=C$.

4052. $xe^y-y^2=C$. 4053. $x^y=C$. 4054. $\sqrt{x^2+y^2}+\frac{y}{x}=C$.

4055. $\operatorname{tg}(xy)-\cos x-\cos y=C$.

4056. $\frac{1}{3}\sqrt{(x^2+y^2)^3}+x-\frac{1}{2}y^2=C$.

4057. $\operatorname{sen}\frac{y}{x}-\cos\frac{x}{y}+x-\frac{1}{y}=C$.

4058. $x-\frac{y}{x}=C$. El factor integrante es $\mu(x)=\frac{1}{x^2}$.

4059*. $x^2+\frac{2x}{y}=C$. Buscar el factor integrante en forma de la función $\mu(y)$.

4060. $(x^2+y^2)e^x=C$. 4061. $\frac{y^2}{2}+\frac{\ln x}{y}=C$.

4062. $(x\operatorname{sen}y+y\cos y-\operatorname{sen}y)e^x=C$. 4064. $\mu=y^{-n}e^{-(n-1)\int P(x)dx}$.

4065. La expresión $\frac{Y'x-X'y}{X-Y}$ debe ser la función de $(x+y)$.

4066. La expresión $\frac{Y'x-X'y}{xX-yY}$ debe ser la función de xy.

4067. $abx+b^2y+a+bc=Ce^{bx}$. 4068. $y=\left[Ce^{\frac{(m-1)bx}{a}}-\frac{c}{b}\right]^{\frac{1}{1-m}}$.

4069. $x^2+2xy-y^2-4x+8y=C$.

4070. $\frac{2x}{x-y}+\ln|x+y|+3\ln|y-x|=C$.

4071. $x+y=a\operatorname{tg}\left(C+\frac{y}{a}\right)$. 4072. $y^3-3xy=C$.

4073 $x^2-y^2=Cy^3$. 4074. $3x^2y+x^3y^3=C$.

4075. $y\left(x^2+\frac{1}{3}y^2\right)=Ce^{-x}$. 4076. $\ln|1+y|-\frac{1+y}{x}=C$.

4077. $y^2-1+Cxy=0$. 4078. $\frac{xy}{x-y}+\ln\left|\frac{x}{y}\right|=C$.

4079. $3\sqrt{y}=C\sqrt[4]{x^2-1}+x^2-1$. 4080. $y=\operatorname{sen}x+C\cos x$.

4081. $y=\frac{2e^x}{C+e^x(\cos x+\operatorname{sen}x)}$. 4082. $\operatorname{tg}x-\frac{\operatorname{sen}y}{\operatorname{sen}x}=C$.

4083. $xe^{\operatorname{sen}\frac{y}{x}}=C$. 4084. $xy\cos\frac{y}{x}=C$. 4085. $\operatorname{sen}y=x-1+Ce^{-x}$.

4086. $y=\frac{\operatorname{tg}x+\sec x}{C+\operatorname{sen}x}$. 4087. $\ln|Cx|=-e^{-\frac{x^2+y^2}{x}}$. 4088. $x+ye^{\frac{x}{y}}=C$.

4089. $y=x\ln|Cx|$. 4090. $y^2-by-axy=C$.

4091. La circunferencia $x^2+y^2-\frac{2k}{k+1}(ax+by)=C$ $(k\neq-1)$ o la circunferencia $x^2+y^2-\frac{2k}{k-1}(ax+by)=C$ $(k\neq 1)$; si $k=-1$ ó $k=1$, es la recta $ax+by=C$.

4092. Las espirales lagarítmicas

$$\sqrt{x^2+y^2}=Ce^{\pm\operatorname{arctg}\frac{y}{x}}.$$

4093*. $y^2=\frac{x^4+C^4}{2x^2}$. La ecuación diferencial del ejercicio es $y^2=x(x-yy')$.

4094. $I=\frac{t}{2}$.

4095. El vector del campo en cada punto es perpendicular al radio polar del punto. Las curvas integrales es una familia de circunferencias concéntricas cuyo centro se halla en el origen de coordenadas. La ecuación de la familia es $x^2+y^2=C$. Las isóclinas son una familia de rectas que pasan por el origen de coordenadas.

4096. 1) $y'=f(x\cdot y)$; 2) $y'=f\left(\frac{y^2}{x}\right)$; 3) $y'=f(x^2+y^2)$.

4097. Las rectas $y=Cx$. El resultado puede ser presentado en forma del teorema geométrico siguiente: si cruzamos una familia de parábolas que tienen un eje común y un vértice común, por una recta que pase por el vértice, las tangentes a diferentes parábolas en los puntos de su intersección con la recta, son paralelas entre sí.

4099. $y'=\frac{ay+b}{x}+C$; $y'=ay+bx+C$.

4103. Para $\Delta x=0{,}05$ $y\approx 0{,}31$. 4104. Para $\Delta x=0{,}05$ $y\approx 1{,}68$.

4105. La solución exacta es $y=e^{\frac{x^2}{4}}=f(x)$; $f(0,9)=1{,}2244$. La solución aproximada es $f(0,9)=1{,}1942$. El error relativo es igual a $\sim 2{,}5\%$.

4106. Para la solución exacta $x=\sqrt[3]{3(e-1)}\approx 1{,}727$; dividiendo el intervalo en 4 partes y efectuando la integración numérica obtenemos $x\approx 1{,}72$.

4107. $y_2=1+x+\frac{3}{2}x^2+\frac{4}{3}x^3+\frac{13}{24}x^4+\frac{1}{4}x^5+\frac{1}{18}x^6+\frac{1}{63}x^7$.

4108. $-1{,}28$. 4109. $y=1+x+x^2+2x^3+\frac{13}{4}x^4+\ldots$

4110. $y=1-x+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{2}+\frac{x^5}{5}+\ldots$

4111. $y=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{7\cdot 9}x^7-\frac{2}{7\cdot 11\cdot 27}x^{11}-\ldots$

4112. $y=1+2x-x^2+\frac{4}{3}x^3-\frac{3}{2}x^4+\ldots$

4113. $y=0$. 4114. $y=x+\frac{x^2}{2}+\frac{2x^3}{3}+\frac{11x^4}{2\cdot 3\cdot 4}+\ldots$

4115. $y=-\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}-\frac{x^6}{6!}-\ldots$

4116. $y=1+(x-1)-\frac{(x-1)^2}{2!}+\frac{2(x-1)^3}{3!}+\frac{4(x-1)^4}{4!}-\frac{60(x-1)^5}{5!}+\ldots$
4117. $y=Cx+C^2$; la integral singular es $x^2+4y=0$.
4118. $y=Cx-3C^3$; la integral singular es $9y\pm 2x\sqrt{x}=0$.
4119. $y=Cx+\frac{1}{C}$; la integral singular es $y^2=4x$.
4120. $x=Cx+\sqrt{1+C^2}$; la integral singular es $x^2+y^2=1$.
4121. $y=Cx+\operatorname{sen} C$; la solución singular es $y=x(\pi-\arccos x)+$ $+\sqrt{1-x^2}$.
4122. $x=Cx-\ln C$; la solución singular es $y=\ln x+1$.
4123. $y=(\sqrt{x+1}+C)^2$; la solución singular es $y=0$.
4124. $y=Cx^2+\frac{1}{C}$; la integral singular es $y^2-4x^2=0$.
4125. $2Cx=C^2-y^2$; la integral singular no existe.
4126. $x=Ce^{-p}+2(1-p)$, $y=x(1+p)+p^2$; la integral singular no existe.
4127. $y=Cx-e^C$; la solución singular es $y=x(\ln x-1)$.
4128. $y=Cx+C+C^2$; la solución singular es $y=-\frac{1}{4}(x+1)^2$.
4129. $y=Cx+a\sqrt[3]{1-C^3}$; la integral singular es $\sqrt{y^3}-\sqrt{x^3}=\sqrt{a^3}$.
4130. $(C-x)y=C^2$; la solución singular es $y=4x$.
4131. $y^2-4e^x=0$. 4132. $xy=1$.
4133. $2y-x^2=0$.
4135. La hipérbola equilátera $2xy=\pm a^2$, donde a^2 es el área del triángulo; la solución trivial es cualquier recta de la familia $y=\pm\frac{C^2}{2}x+aC$.
4136. $(y-x-2a)^2=8ax$. 4137. Elipses e hipérbolas.
4138. $x=\frac{Ce^{-\frac{1}{2p^2}}(1+p^2)}{p^2}$, $\quad y=\frac{Ce^{-\frac{1}{2p^2}}}{p}$, ó $x=\frac{(p^2+1)C}{\sqrt{p}\sqrt[4]{(p^2+2)^3}}$,
$$y=\frac{-C\sqrt{p}}{\sqrt[4]{(p^2+2)^3}}.$$
4139. $y^2=Cx^{-\frac{1}{k}}+\frac{k^2x^2}{2k+1}$.
4140*. $$\begin{cases} y=\cos\alpha\left(C+\frac{a}{2}\operatorname{sen}^2\alpha\right) \\ x=\operatorname{sen}\alpha\left(a-C-\frac{a}{2}\operatorname{sen}^2\alpha\right)\end{cases}$$

En la ecuación diferencial obtenida poner $\frac{dy}{dx}=\operatorname{tg}\alpha$, luego, expresar x mediante y y el parámetro α, hallar dx, sustituir dx por $\frac{dy}{\operatorname{tg}\alpha}$, y resolver la ecuación deferencial así obtenida, considerando y como función de α.
4141. $S=at^2$, donde a es cierta constante definida.
4142. $x^2+y^2=2a^2\ln|Cx|$. 4143. $y=Ce^{-\frac{x}{2}}$.
4144. $y=C(x^2+y^2)$. 4145. $(x^2+y^2)^2=C(y^2+2x^2)$.

4146. Si el parámetro de las parábolas es igual a $2p$ y la recta es considerada como el eje de ordenadas, las ecuaciones de las trayectorias son:

$$y=C+\frac{2}{3}\sqrt{\frac{2x^3}{p}}.$$

4147. Tractrices.

4148. Marcando el ángulo α en una de las dos posibles direcciones obtenemos la ecuación de la familia

$$xy-\frac{\sqrt{3}}{2}(x^2+y^2)=C.$$

4149. Marcando el ángulo α en una de las dos posibles direcciones obtenemos la ecuación de la familia

$$\ln(2x^2+xy+y^2)+\frac{6}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{x+2y}{x\sqrt{7}}=C.$$

4150*. Se puede admitir, por ejemplo, que el viento pasa a lo largo del eje Ox. Las líneas de la propagación del sonido por el plano Oxy son trayectorias ortogonales de la familia de circunferencias $(x-at)^2+y^2=(v_0t)^2$, donde t es el tiempo transcurrido después de salir la onda sonora de la fuente, y v_0 es la velocidad del sonido en el aire inmóvil.

Para cualquier t fijada la ecuación diferencial de las trayectorias buscadas es $y'=\frac{y}{x-at}$ junto con la ecuación de la familia de circunferencias.

Excluyendo t obtenemos cierta ecuación de Lagrange. Su solución general es

$$x=C(\cos\varphi+b)\left(\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\right)^{\frac{1}{b}},$$

$$y=C\operatorname{sen}\varphi\left(\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\right)^{\frac{1}{b}},$$

donde $b=\pm\frac{a}{v_0}$, φ es el parámetro.

4151. $x=C\operatorname{sen}t+R(\cos t+t\operatorname{sen}t)$, $y=-C\cos t+R(\operatorname{sen}t-t\cos t)$.

4152. $x=\frac{C}{\operatorname{ch}t}+a(t-\operatorname{th}t)$, $y=C\operatorname{th}t+\frac{a}{\operatorname{ch}t}$.

4153. $x=a(\cos t+t\operatorname{sen}t)-\cos t\left(\frac{at^2}{2}+C\right)$,

$$y=a(\operatorname{sen}t+t\cos t)-\operatorname{sen}t\left(\frac{at^2}{2}+C.\right)$$

4154. $x=C\operatorname{sen}t+2\operatorname{tg}t$, $\quad y=\operatorname{tg}^2 t-C\cos t-2$.

4155. $y=\frac{x^3}{6}-\operatorname{sen}x+C_1x+C_2$.

4156. $y=\frac{\operatorname{arctg}x}{2}(x^2-1)-\frac{x}{2}\ln(1+x^2)+C_1x+C_2$.

4157. $y=\frac{x^2}{2}\left[\ln x-\frac{3}{2}\right]+C_1x+C_2$.

4158. $y=C_1x^2+C_2$.

4159. $y=C_1e^x+C_2-x-\frac{x^2}{2}$. 4160. $y=\frac{1}{3}x^3+C_1x^2+C_2$.

4161. $y=(1+C_1^2)\ln|x+C_1|-C_1x+C_2$.

4162. $y=(C_1x-C_1^2)e^{\frac{x}{C_1}+1}+C_2$. 4163. $y=\frac{1}{12}(y+C_1)^3+C_2$.

4164. $y=\frac{2}{3C_1}\sqrt{(C_1x-1)^3}+C_2$.

4165. $y=-\frac{1}{3}\operatorname{sen}^3 x+C_1\left(\frac{x}{2}-\frac{\operatorname{sen} 2x}{4}\right)+C_2$.

4166. $(x+C_2)^2=4C_1(y-C_1)$.

4167. $y=C_1(x+C_2)^{\frac{2}{3}}$. 4168. $y=C_1e^{\frac{x}{a}}+C_2e^{-\frac{x}{a}}$.

4169. $x=\frac{4}{3}(y^{\frac{1}{2}}-2C_1)\sqrt{y^{\frac{1}{2}}+C_1}+C_2$. 4170. $y=\frac{x+C_1}{x+C_2}$.

4171. $(x+C_2)^2-y^2=C_1$. 4172. $y=C_1e^{C_2x}$.
4173. $y\cos^2(x+C_1)=C_2$. 4174. $(x+C_2)\ln y=x+C_1$.

4175. Si la constante arbitraria introducida por la primera integración, es positiva $(+C_1^2)$, se tiene $y=C_1\operatorname{tg}(C_1x+C_2)$; si es negativa $(-C_1^2)$, se tiene

$$y=C_1\frac{1+e^{2(C_1x+C_2)}}{1-e^{2(C_1x+C_2)}}=-C_1\operatorname{cth}(C_1x+C_2);$$

si $C_1=0$, se tiene $y=-\frac{1}{1+C_2}$.

4176. $x=C_1+\cos C_2\ln\left|\operatorname{tg}\frac{y+C_2}{2}\right|$. 4177. $C_1x+C_2=\ln\left|\frac{y}{y+C_1}\right|$.

4178. $\frac{x+C_2}{2}=C_1\operatorname{arctg}(C_1\ln y)$, $C_1>0$.

4179. $\ln|C_1y|=2\operatorname{tg}(2x+C_2)$.

4180. $y=\ln|x^2+C_1|+\frac{1}{\sqrt{-C_1}}\ln\left|\frac{x-\sqrt{-C_1}}{x+\sqrt{-C_1}}\right|+C_2$, si $C_1<0$,

e $y=\ln|x^2+C_1|+\frac{2a}{\sqrt{C_1}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{C_1}}+C_2$, si $C_1>0$.

4181*. Después de efectuar la sustitución $y'=p$ la ecuación se divide en dos una de las cuales pertenece al tipo de Clairaut. Su solución general es $y=$ $=C_1+C_2e^{C_1x}$, y las soluciones singulares son

$$y=\frac{4}{C-x}.$$ La otra ecuación es $y'=0$.

4182. $y=C_1x(x-C_1)+C_2$, y las soluciones singulares son $y=\frac{x^3}{3}+C$.

4183. $y^2=C_1x^4+C_2$. 4184. $x=\ln\left|\frac{C_1x^{C_1}}{C_2-x^{C_1}}\right|$.

4185. $y=\sqrt{\frac{1}{3}x^3+C_1x+C_2}$. 4186. $y=C_1x+\frac{C_2}{x}$.

4187. $y=C_1xe^{\frac{C_2}{x}}$. 4188. $\ln|y+C_1|+\frac{C_1}{y+C_1}=x+C_2$.

4189. $y=x^3+3x+1$. 4190. $y=2+\ln\frac{x^2}{4}$.

4191. $y=\frac{2}{5}x^2\sqrt{2x}-\frac{16}{5}$. 4192. $y=\frac{4}{(x+4)^2}$.

4193. $y-x=2\ln|y|$. 4194. $y=\sqrt{2x-x^2}$.

4195. $y=\sqrt{1+e^{2x}}$. 4196. $y=-\ln|1-x|$. 4197. $y=\frac{x+1}{x}$.

4198*. $y=x$. Efectuar la sustitución $y=ux$. 4199. $y=2e^{\frac{1}{2}x^2}-1$.

4200*. La ecuación diferencial de la línea es $dx=\frac{dy}{\sqrt{(C_1y)^{\frac{2}{k}}-1}}$, donde k es el coeficiente de proporcionalidad. Si $k=1$, se tiene $y=$ $=\frac{1}{2C_1}[e^{C_1x+C_2}+e^{-(C_1x+C_2)}]=\frac{\operatorname{ch}(C_1x+C_2)}{C_1}$, es una catenaria. Si $k=-1$, se tiene $(x+C_2)^2+y^2=C_1^2$; es una circunferencia. Si $k=2$, se tiene $(x+C_2)^2=$ $=4C(y-C_1)$; es una parábola. Si $k=-2$, se tiene $dx=\sqrt{\frac{C_1y}{1-C_1y}}\,dy$; es la ecuación diferencial de la cicloide.

4201. $e^{\frac{y}{a}}=C_2\sec\left(\frac{x}{a}+C_1\right)$. 4202. $Cx=y^{2k-1}$.

4203. Catenaria. 4204. $v=\sqrt{\frac{mgv_0^2}{mg+kv_0^2}}$. 4205. Parábola.

4206. $S=\frac{m}{3k}\left[\sqrt{\left(\frac{2k}{m}t+C\right)^3}-\sqrt{C^3}\right]$.

4207*. Que el eje de abscisas esté dirigido verticalmente hacia abajo, el origen de coordenadas esté a la superficie del líquido, la ecuación del rayo, $y=f(x)$. A la profundidad x tenemos $\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}(\alpha+d\alpha)}=\frac{m+dm}{m}$, donde m es el índice de refracción a la profundidad x, α es el ángulo formado entre la vertical y la tangente al rayo de luz. Es evidente que tg α es igual a y'. Después de abrir los paréntesis en la ecuación $m\operatorname{sen}\alpha=(m+dm)(\operatorname{sen}\alpha\cos d\alpha+\cos\alpha\operatorname{sen}d\alpha)$ y suprimir las infinitesimales de orden superior a uno, obtenemos: $md\alpha=$ $=-dm\operatorname{tg}\alpha$, de donde $\frac{dm}{m}=-\frac{dy'}{y'(1+y'^2)}$. Efectuando la integración de esta ecuación hallamos y' como función de m. Sustituyendo m por su expresión mediante x e integrando la segunda vez, obtenemos la solución:

$$y=\frac{m_0h\operatorname{sen}\alpha_0}{m_2-m_1}\ln|m+\sqrt{m^2-m_0^2\operatorname{sen}^2\alpha_0}|+C,$$

donde $m=\frac{(m_2-m_1)x+m_1h}{h}$.

4208. $y=x^2\ln\sqrt{x}+C_1x^2+C_2x+C_3$

4209. $y=-\frac{1}{8}\operatorname{sen}2x+C_1x^2+C_2x+C_3$.

4210. $y=\frac{e^{ax}}{a^{10}}+P_9$ (P_9 es el polinomio de noveno grado respecto a x con coeficientes arbitrarios).

4211. $y=C_1\frac{x^2}{2}+C_2x+C_3-C_1^2(x+C_1)\ln|x+C_1|$.

4212. $y=C_1x^5+C_2x^3+C_3x^2+C_4x+C_5$.

4213. $y=\frac{1}{3}(C_1-2x)^{\frac{3}{2}}+C_2x+C_3$.

4214. $x=C_1y^2+C_2y+C_3$.

4215. Las soluciones son susceptibles de ser presentadas de tres maneras: $y=C_1\operatorname{sen}(C_2x+C_3)$ ó $y=C_1\operatorname{sh}(C_2x+C_3)$ ó $y=C_1\operatorname{ch}(C_2x+C_3)$.

4216. $(x+C_2)^2+(y+C_3)^2=C_1^2$.

4217. $y=C_2\left(xe^{C_1x}-\frac{1}{C_1}e^{C_1x}\right)+C_3$.

4219. 2) $y=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{2x^3}{3!}+\frac{8x^4}{4!}+\frac{14x^5}{5!}+\ldots$

4220. $y=1-\frac{(x-1)^2}{2!}-\frac{2(x-1)^4}{4!}+\frac{3(x-1)^5}{5!}+\ldots$

4221. $y=\frac{\pi}{2}(x-1)+\frac{(x-1)^2}{2!}+\frac{(x-1)^3}{3!}-\frac{(x-1)^4}{4!}-\frac{4(x-1)^5}{5!}+\ldots$

4222. $y=1+x+\frac{x^3}{3!}+\frac{2x^4}{4!}+\frac{3x^5}{5!}+\ldots$ Si $f(x)\approx 1+x+\frac{x^3}{3!}+\frac{2x^4}{4!}$, para $x=-0{,}5$, resulta una serie numérica alternante y el valor de los primeros términos suprimidos es menor que 0,001.

4223. $y=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}-\frac{x^4}{4!}+\frac{4x^5}{5!}-\frac{14x^6}{6!}+\ldots$; de quinto orden.

4224. $y=x^2-\frac{1}{10}x^5+\frac{1}{80}x^8-\frac{7}{4400}x^{11}+\ldots$; 0,318; 0,96951.

4225*. La ecuación diferencial del problema es $E=L\frac{d^2Q}{dt^2}+\frac{dQ}{dt}\times$ $\times\frac{V_0-kQ}{k_1}$, donde Q es la cantidad de electricidad que pasó por el circuito por el espacio de tiempo desde el comienzo del experimento hasta el momento t. Después de expresar Q mediante V (V es la cantidad disponible del agua en el baño en el momento t) y de determinar los coeficientes partiendo de los datos del problema, llegamos a la ecuación $V''+aVV'+b=0$, donde $a=\frac{1}{k_1L}=0{,}005$, $b=\frac{kE}{L}=0{,}00935$. Dadas las siguientes condiciones $V_0=$ $=1000$ cm³, $V_0'=-kI_0=-0{,}00187$ cm^3/s, efectuamos la integración de la ecuación y obtenemos la serie $V=1000-0{,}00187t-10^{-9}[2{,}91t^3-$ $-3{,}64t^4+3{,}64t^5-3{,}04t^6+2{,}17t^7-\ldots]$, que es alternante y cuyos coeficientes decrecen tendiendo a cero, lo cual es muy cómodo para efectuar los cálculos.

4226*. La ecuación diferencial del ejercicio presenta la forma

$$L\cdot\frac{d^2Q}{dt^2}+\frac{dQ}{dt}\cdot\frac{k_1}{M_0-kQ}=E.$$

Tomando como función buscada la cantidad y de cloruro de hidrógeno no descompuesta para el momento t, reducimos la ecuación a la forma $yy'' + ay' + by = 0$, donde $a = \frac{k_1}{L} = 50$, $b = \frac{kE}{L} = 0{,}0191$. Dadas las condiciones iniciales $y_0 = M_0 = 10$; $y'_0 = -kI_0 = -0{,}00381$, efectuamos la integración de esta ecuación y obtenemos la serie

$$y = 10 - 0{,}00381t + 10^{-10}t^3\,(1{,}21 - 1{,}52t + \ldots).$$

4227. $x^2y'' - 6xy' + 12y = 0$.

4228. $xy'' - (2x + 1)\,y' + (x + 1)\,y = 0$.

4229. $(x^3 - 3x^2 + 3x)\,y''' - (x^3 - 3x + 3)\,y'' - 3x\,(1 - x)\,y' + 3\,(1 - x)\,y = 0$.

4230. $y = 3x^2 - 2x^3$.

4231. a) $\frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} \neq \text{const}$; b) $y''\operatorname{sen} 2x - 2y'\cos 2x = 0$.

4232*. 3) De acuerdo con la fórmula de Ostrogradski

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{vmatrix} = C\cdot e^{-\int P(x)dx}$$

o, abriendo el determinante de Wronski (wronskiano): $y_1y'_2 - y'_1y_2 = Ce^{-\int P(x)dx}$. Después de dividir los dos miembros de la ecuación por y_1^2, obtenemos $\frac{d}{dx}\left(\frac{y_2}{y_1}\right) = \frac{C}{y_1^2}\,e^{-\int P(x)dx}$, de donde se halla la relación buscada.

4233. $y = C_1x\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| - 2C_1 + C_2x$.

4234. $y = C_1\frac{\operatorname{sen} x}{x} + C_2\frac{\cos x}{x}$. 4235. $y = x^2 - e^{x-1}$.

4236*. Las funciones P y Q deben estar unidas por la relación $Q' + 2P\cdot Q = 0$. Poner $y_1 = \frac{1}{y_2}$ en la fórmula del ejercicio 4232 (que se deduce de la fórmula de Ostrogradski), derivar dos veces la relación así obtenida, y poner y'_2, y''_2 en la ecuación dada.

4237*. $y = C_1\,(4x^3 - 3x) + C_2\sqrt{1 - x^2}\,(4x^2 - 1)$. De acuerdo con la condición ponemos $y_1 = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$. Poniendo y_1 en la ecuación dada obtenemos $B = 0$, $D = 0$, $A/C = \frac{4}{-3}$, ó $A = 4k$, $C = -3k$. De ahí, la solución particular es $y_1 = k\,(4x^3 - 3x)$. En conformidad con la propiedad de la ecuación lineal se puede admitir que $k = 1$, entonces se tiene $y_1 = 4x^3 - 3x$. Sabiendo una solución particular y aplicando el procedimiento ordinario, hallamos la segunda solución y formamos la solución general.

4238. $y = C_1\operatorname{sen} x + C_2\left[1 - \operatorname{sen} x\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)\right|\right]$.

4239. $y = C_1x + C_2x\int\frac{e^x\,dx}{x^2}$. 4240. $y = C_1x + C_2\,(x^2 - 1)$.

4241. $y = C_1x + C_2x^2 + C_3x^3$. 4242. $y = x^3 + x\,(C_1 + C_2\ln|x|)$.

4243. $y = C_1e^x + C_2x - x^2 - 1$. 4244. $y = C_1x^3 + C_2\,(x + 1) - x$.

4245. $y = 2 + 3x + x\left(\frac{\pi}{2} + 2\operatorname{arctg} x\right) + x^2$.

4246. $y=-2+2x-x^2+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\frac{7x^5}{60}-\ldots$

4247. $y=1+\frac{2x^4}{4!}-\frac{2x^5}{5!}+\frac{2x^6}{6!}-\frac{2x^7}{7!}+\frac{62x^8}{8!}-\ldots$

4248. $y=\frac{x^2}{2}+\left[\frac{x^4}{4!}+\frac{3x^6}{6!}+\frac{5x^8}{8!}+\ldots+\frac{(2n-1)\,x^{2n+2}}{(2n+2)!}+\ldots\right]$.

4249. $y=C_1\left(1+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{12}+\frac{x^5}{24}+\ldots\right)+$
$+C_2\left(x+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{12}+\frac{x^5}{30}+\ldots\right)$.

4250. $y=C_1\left(1+\frac{x^4}{12}+\ldots\right)+C_2\left(x-\frac{x^3}{6}+\frac{3x^5}{40}+\ldots\right)$.

4251. $y=C_1e^x+C_2e^{-2x}$. 4252. $y=C_1e^{3x}+C_2e^{-3x}$.

4253. $y=C_1e^{4x}+C_2$. 4254. $y=C_1e^{(1+\sqrt{2})x}+C_2e^{(1-\sqrt{2})x}$.

4255. $y=C_1e^{2x}+C_2e^{-\frac{4}{3}x}$. 4256. $y=C_1\cos x+C_2\operatorname{sen} x$.

4257. $y=e^{-3x}(C_1\cos 2x+C_2\operatorname{sen} 2x)$.

4258. $y=e^x\left(C_1\cos\frac{x}{2}+C_2\operatorname{sen}\frac{x}{2}\right)$.

4259. $y=e^x(C_1+C_2x)$. 4260. $x=(C_1+C_2t)\,e^{2,5t}$.

4261. $y=(C_1+C_2x)\,e^{-\frac{1}{4}x}$. 4262. $y=4e^x+2e^{3x}$.

4263. $y=3e^{-2x}\operatorname{sen} 5x$. 4264. $y=e^{-\frac{x}{2}}(2+x)$.

4265. $y=[1+(1-m)\,x]\,e^{mx}$. 4266. $y=\cos 3x-\frac{1}{3}\operatorname{sen} x$.

4267. Si $k>0$, se tiene $y=\frac{a}{\sqrt{k}}\operatorname{sen}[\sqrt{k}\,(x-x_0)]+y_0\cos\times$
$\times[\sqrt{k}\,(x-x_0)]$; Si $k<0$, se tiene $y=\frac{1}{2\sqrt{k_1}}[(y_0\sqrt{k_1}+a)\,e^{\sqrt{k_1}(x-x_0)}+$
$+(y_0\sqrt{k_1}-a)\,e^{-\sqrt{k_1}(x-x_0)}]$, donde $k_1=-k$.

4268. $y=C_1e^{-x}+C_2e^{\frac{x}{2}}+e^x$. 4269. $y=C_1\cos ax+C_2\operatorname{sen} ax+\frac{e^x}{a^2+1}$.

4270. $y=C_1e^{6x}+C_2e^x+\frac{5\operatorname{sen} x+7\cos x}{74}$.

4271. $y=e^{-x}(C_1\cos 2x+C_2\operatorname{sen} 2x)-\frac{1}{2}\cos 2x-2\operatorname{sen} 2x$.

4272. $y=(C_1+C_2x)\,e^{3x}+\frac{2}{9}x^2+\frac{5}{27}x+\frac{11}{27}$.

4273. $y=e^x(C_1\cos x+C_2\operatorname{sen} x)+x+1$.

4274. $y=C_1e^x+C_2e^{-5x}-0,2$.

4275. $y=C_1e^x+C_2e^{2x}+\bar{y}$, donde $\bar{y}$ es igual a 1) $\frac{5}{3}e^{-x}$;

2) $3xe^{2x}$; 3) $\frac{3}{5}\cos x+\frac{1}{5}\operatorname{sen} x$; 4) $x^3+\frac{9}{2}x^2+\frac{21}{2}x-\frac{15}{4}$;

5) $-\frac{8}{5}e^x\left[\cos\frac{x}{2}+2\operatorname{sen}\frac{x}{2}\right]$; 6) $\frac{1}{2}x+\frac{5}{4}-\frac{1}{12}e^{-2x}$; 7) $e^x(2x^2+x)$;

8) $\frac{3}{2}x+\frac{1}{4}(9+3\cos 2x-\operatorname{sen} 2x)$; 9) $-2xe^x-\frac{1}{12}e^{-2x}$;

10) $\frac{1}{20}\cos x-\frac{3}{20}\operatorname{sen} x+\frac{7}{260}\cos 3x+\frac{9}{260}\operatorname{sen} 3x$; 11) $-\frac{1}{12}e^{-x}-\frac{1}{2}xe^x$.

4276. $y=C_1+C_2e^{-\frac{5}{2}x}+\bar{y}$, donde $\bar{y}$ es igual a: 1) $\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{5}x^2+\frac{7}{25}x$;

2) $\frac{1}{7}e^x$; 3) $5\operatorname{sen} x-2\cos x$; 4) $\frac{1}{10}x+\frac{5}{164}\operatorname{sen} 2x-\frac{1}{41}\cos 2x$;

5) $\cos 2{,}5x+\operatorname{sen} 2{,}5x-0{,}02xe^{-2{,}5x}$;

6) $\left(-5x-\frac{16}{29}\right)\cos x-\left(2x-\frac{185}{29}\right)\operatorname{sen} x$;

7) $e^{-x}[(10x+18)\operatorname{sen} x-(20x+1)\cos x]$; 8) $\frac{3}{10}\left(\frac{1}{5}e^{\frac{5}{2}x}-xe^{-\frac{5}{2}x}\right)$.

4277. $y=e^{2x}(C_1+C_2x)+\bar{y}$, donde $\bar{y}$ es igual a: 1) $\frac{1}{4}$; 2) $\frac{1}{9}e^{-x}$;

3) $\frac{3}{2}x^2e^{2x}$; 4) $\frac{1}{4}\cos 2x+\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$;

5) $\frac{1}{169}\left(\frac{-5}{2}\operatorname{sen} 3x+6\cos 3x\right)-\frac{1}{50}(3\operatorname{sen} x+4\cos x)$;

6) $\frac{3}{100}(3\operatorname{sen} x+4\cos x)+\frac{1}{676}(5\operatorname{sen} 3x-12\cos 3x)$;

7) $2x^2+4x+3+4x^2e^{2x}+\cos 2x$; 8) $\frac{1}{4}\left(x^2e^{2x}-\frac{1}{8}e^{-2x}\right)$;

9) $\frac{1}{2}\left(e^x-\frac{1}{9}e^{-x}\right)+\frac{1}{25}(3\operatorname{sen} x+4\cos x)$; 10) $e^x-\frac{1}{2}e^{x-1}+\frac{1}{18}e^{1-x}$.

4278. $y=C_1\cos x+C_2\operatorname{sen} x+\bar{y}$, donde $\bar{y}$ es igual a: 1) $2x^3-13x+2$;

2) $\cos 3x$; 3) $\frac{1}{2}x\operatorname{sen} x$; 4) $-\frac{1}{2}x\cos x-e^{-x}$; 5) $\frac{1}{4}\left(x\operatorname{sen} x-\frac{1}{4}\cos 3x\right)$;

6) $9+4\cos 2x-0{,}2\cos 4x$; 7) $0{,}5\operatorname{ch} x$; 8) $0{,}5+0{,}1\operatorname{ch} 2x$.

4279. $y=e^{\frac{3}{5}x}\left(C_1\cos\frac{4}{5}x+C_2\operatorname{sen}\frac{4}{5}x\right)+\bar{y}$, donde y es igual a:

1) $\frac{25}{16}e^{\frac{3}{5}x}$; 2) $\frac{15}{219}\operatorname{sen}\frac{4}{5}x+\frac{40}{219}\cos\frac{4}{5}x$;

3) $\frac{1}{13}e^{2x}+\frac{1}{5}\left(2x^3+\frac{36}{5}x^2+\frac{107}{25}x-\frac{908}{125}\right)$; 4) $-\frac{5}{9}\cos x\cdot e^{\frac{3}{5}x}$.

5) $-\frac{1}{8}xe^{\frac{3}{5}x}\cos\frac{4}{5}x$;6) $0{,}5e^{2x}+1{,}3$.

4280. $y=2+C_1\cos x+C_2\operatorname{sen}x+\cos x\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|$.

4281. $y=e^x(C_1+C_2x-\ln\sqrt{x^2+1}+x\operatorname{arctg}x)$.

4282. 1) $y=e^x(x+C_1)-(e^x+1)\ln(e^x+1)+C_2$;

2) $y=\frac{1}{2}e^x[\operatorname{arcsen}e^x+e^x\sqrt{1-e^{2x}}+C_1]+\frac{1}{3}\sqrt{(1-e^{2x})^3}+C_2$;

3) $y=C_1e^x-\cos e^x+C_2$.

4283. $y=(1+x)e^{-\frac{3}{2}}+2e^{-\frac{5}{2}x}$.

4284. $x=e^x(0{,}16\cos 3x+0{,}28\operatorname{sen}3x)+x^2+2{,}2x+0{,}84$.

4285. $y=e^x+x^2$. 4286. $y=e^x(e^x-x^2-x+1)$.

4287. $y=\frac{1}{3}\operatorname{sen}2x-\frac{1}{3}\operatorname{sen}x-\cos x$.

4288*. Efectuar dos veces la derivación de las expresiones indicadas para y; en la ecuación introducir y, y' e y''. En los tres casos se obtiene una identidad.

4289. $y=x^3(C_1+C_2x^4)$.

4290. $y=\frac{x}{2}+C_1\cos\ln|x|+C_2\operatorname{sen}\ln|x|$.

4291. $y=x[C_1+C_2\ln|x|+\ln^2|x|]$.

4292. $y=x\ln|x|+C_1x+C_2x^2+x^3$.

4293. Si $\frac{1}{m\alpha}>\omega^2$, se tiene $y=C_1\cos kt+C_2\operatorname{sen}kt+\frac{g}{k^2-\omega^2}\cos\omega t+\frac{e\omega^2}{k^2}$, donde $k^2=\frac{1}{m\alpha}-\omega^2$. Si $\frac{1}{m\alpha}<\omega^2$, se tiene $y=C_1e^{kt}+C_2e^{kt}-\frac{g}{k^2+\omega^2}\cos\omega t-\frac{e\omega^2}{k^2}$ donde $k^2=\omega^2-\frac{1}{m\alpha}$. 4294. $s=\frac{1}{5}(4e^t+e^{-4t})$.

4295. $s=e^{-0{,}2t}[10\cos(0{,}245t)+8{,}16\operatorname{sen}(0{,}245t)]$; $s|_{t=3}\approx 7{,}07\ cm$.

4296. $t=\sqrt{\frac{am}{f}}\ln\frac{F+\sqrt{f(2F-f)}}{F-f}$.

4297. $s=e^{-0{,}245t}[2\cos(156{,}6t)+0{,}00313\operatorname{sen}(156{,}6t)]$.

4298*. $k=33\frac{1}{3}\frac{g}{cm}=33\frac{1}{3}\cdot g\frac{dinas}{cm}$; $t=0{,}38\ s$; la altura de la parte sumergida del zoquete de madera es $x=5[3+\cos[8{,}16t)]$. Formando la ecuación considerar $g=1000\ cm/s^2$.

4299*. $r=\frac{a_0}{2}(e^{\omega t}+e^{-\omega t})$. Todo ocurre de tal modo como si el tubo fuese inmóvil, pero sobre el globo actúa la fuerza igual a $m\omega^2r$ (r es la distancia que media entre el eje de revolución y el globo).

4300. Si $k>m\omega^2$, se tiene $r=\frac{a_0}{k-m\omega^2}\left[k-m\omega^2\cos\left(t\sqrt{\frac{k}{m}-\omega^2}\right)\right]$;

Si $k=m\omega^2$, se tiene $r=a_0\left(1+\frac{k}{2m}t^2\right)$;

Si $k<m\omega^2$, se tiene $r=\frac{a_0}{m\omega^2-k}\left[m\omega^2\operatorname{ch}\left(t\sqrt{\omega^2-\frac{k}{m}}\right)-k\right]$.

4301. $y = C_1 \cos 3x + C_2 \operatorname{sen} 3x + C_3$.
4302. $y = C_1e^{2x} + C_2e^{-2x} + C_3e^{3x} + C_4e^{-3x}$.
4303. $y = (C_1 + C_2x)\, e^{2x} + (C_3 + C_4x)\, e^{-2x}$.
4304. $y = C_1e^{2x} + C_2e^{-2x} + C_3 \cos 2x + C_4 \operatorname{sen} 2x$.
4305. $y = C_1e^{-x} + C_2e^{-3x} + C_3e^{4x}$.
4306. $y = C_1e^{x} + C_2xe^{x} + C_3x^2e^{x}$.
4307. $y = C_1 + C_2x + C_3e^{-x} + C_4xe^{-x}$.
4308. $y = C_1e^{x} + C_2e^{-x} + Cx_3^{n-3} + C_4x^{n-4} + \ldots + C_{n-1}x + C_n$.

4309. $y = e^{\frac{x}{\sqrt{2}}}\left(C_1 \cos \frac{x}{\sqrt{2}} + C_2 \operatorname{sen} \frac{x}{\sqrt{2}}\right) + e^{-\frac{x}{\sqrt{2}}}\left(C_3 \cos \frac{x}{\sqrt{2}} + C_4 \operatorname{sen} \frac{x}{\sqrt{2}}\right)$.

4310. $y = (C_1 + C_2x + C_3x^2) \cos \frac{x}{2} + (C_4 + C_5x + C_6x^2) \operatorname{sen} \frac{x}{2} + C_7x + C_8$.
4311. $y = e^{-x}\,(C_1 + C_2x + C_3x^2 + \ldots + C_nx^{n-1})$.
4312. $y = 1 + \cos x$.
4313. $y = e^{x} + \cos x - 2$.
4314. $y = (C_1 + C_2x)\, e^{x} + C_3e^{2x} - x - 4$.
4315. $y = (C_1 + C_2x)\, e^{x} + C_3e^{-2x} + (x^2 + x - 1)\, e^{-x}$.
4316. $y = (C_1 + C_2x) \cos 2x + (C_3 + C_4x) \operatorname{sen} 2x + \frac{1}{9} \cos x$.

4317. $y = (C_1 + C_2x) \cos ax + (C_3 + C_4x) \operatorname{sen} ax - \frac{x^2 \cos ax}{8a^2}$.

4318. $y = \frac{1}{60}x^5 - \frac{1}{2}x^3 + C_1x^2 + C_2x + C_3 + C_4 \cos x + C_5 \operatorname{sen} x$.

4319. $y = C_1e^{x} + C_2e^{-x} + C_3 \operatorname{sen} x + C_4 \cos x + \frac{x^2 - 3x}{8}e^{x} - \frac{1}{4}x \operatorname{sen} x$.
4320. $y = (C_1 + C_2x + x^2)\, e^{x} + (C_3 + C_4x + x^2)\, e^{-x} + \operatorname{sen} x + \cos x$.
4321. $y = 4 - 3e^{-x} + e^{-2x}$.
4322. $y = e^{x} + x^3$.
4323. $y = x\,(C_1 + C_2 \ln|x| + C_3\ln^2|x|)$.
4324. 1. $\begin{cases} x = e^{-6t}\,(C_1 \cos t + C_2 \operatorname{sen} t), \\ y = e^{-6t}\,[(C_2 + C_1) \cos t + (C_2 - C_1) \operatorname{sen} t]. \end{cases}$

4324.2. $\begin{cases} x = C_1e^{t} + C_2e^{5t}, \\ y = -C_1e^{t} + 3C_2e^{5t}. \end{cases}$ **4324.3.** $\begin{cases} x = e^{t}\,(C_1 \cos 3t + C_2 \operatorname{sen} 3t), \\ y = e^{t}\,(C_1 \operatorname{sen} 3t - C_2 \cos 3t). \end{cases}$

4324.4. $\begin{cases} x = C_1e^{t} + C_2e^{2t} + C_3e^{-t}, \\ y = C_1e^{t} - 3C_3e^{-t}, \\ z = C_1e^{t} + C_2e^{2t} - 5C_3e^{-t}. \end{cases}$ **4324.5.** $\begin{cases} x = C_1 + 3C_2e^{2t}, \\ y = -2C_2e^{2t} + C_3e^{-t}, \\ z = C_1 + C_2e^{2t} - 2C_3e^{-t}. \end{cases}$

4324.6. $\begin{cases} x = C_1e^{t} + C_2e^{2t} + C_3e^{5t}. \\ y = C_1e^{t} - 2C_2e^{2t} + C_3e^{5t}, \\ z = -C_1e^{t} - 3C_2e^{2t} + 3C_3e^{5t}. \end{cases}$

4324.7. $\begin{cases} x = C_1e^{2t} + e^{3t}\,(C_2 \cos t + C_3 \operatorname{sen} t), \\ y = e^{3t}\,[(C_2 + C_3) \cos t + (C_3 - C_2) \operatorname{sen} t], \\ z = C_1e^{2t} + e^{3t}\,[(2C_2 - C_3) \cos t + (C_2 + 2C_3) \operatorname{sen} t]. \end{cases}$

4325. $\begin{cases} x=C_1e^t+C_2e^{-t}+t\,\text{sh}\,t, \\ y=C_1e^t-C_2e^{-t}+\text{sh}\,t+t\,\text{ch}\,t. \end{cases}$

4326. $\begin{cases} x=C_1e^{-4t}+C_2e^{-7t}+\dfrac{7}{40}e^t+\dfrac{1}{5}e^{-2t}, \\ y=\dfrac{1}{2}C_1e^{-4t}-C_2e^{-7t}+\dfrac{1}{40}e^t+\dfrac{3}{10}e^{-2t}. \end{cases}$

4327. $\begin{cases} z=C_1y; \\ zy^2-\dfrac{3}{2}x^2=C_2. \end{cases}$

4328. $\begin{cases} y=\dfrac{\sqrt{C_1+x^2}}{\ln\left|\dfrac{C_2}{x+\sqrt{x^2+C_1}}\right|}, \\ z=\sqrt{C_1+x^2}\ln\left|\dfrac{C_2}{x+\sqrt{x^2+C_1}}\right|. \end{cases}$

4329. $\begin{cases} \dfrac{y}{x}=C_1; \\ x^2+y^2+z^2=C_2. \end{cases}$ 4330. $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=C_1y, \\ z=C_2y. \end{cases}$

4331. $\begin{cases} y^2-z^2=C_1; \\ yz-y^2-x=C_2. \end{cases}$ 4332. $\begin{cases} x=C_1e^{-t}+C_2e^{-3t}, \\ y=C_1e^{-t}+3C_2e^{-3t}+\cos t. \end{cases}$

4333. $\begin{cases} x=C_1e^t+C_2e^{-t}+C_3\cos t+C_4\,\text{sen}\,t, \\ y=C_1e^t+C_2e^{-t}-C_3\cos t-C_4\,\text{sen}\,t. \end{cases}$

4334. $\begin{cases} x=C_1+C_2t+C_3t^2-\dfrac{1}{6}t^3+e^t, \\ y=C_4-(C_1+2C_3)\,t-\dfrac{1}{2}(C_2-1)\,t^2-\dfrac{1}{3}C_3t^3+\dfrac{t^4}{24}-e^t. \end{cases}$

4335. $\begin{cases} x+y+z=C_1; \\ x^2+y^2+z^2=C_2. \end{cases}$ 4336. $\begin{cases} z=x-y; \\ y\,(y-2x)^3=(x-y)^2. \end{cases}$

4337. $\begin{cases} x=\dfrac{t}{3}. \\ y=-\dfrac{t}{3}. \end{cases}$

4338. $\begin{cases} x=\dfrac{1}{3}e^{-t}+\dfrac{1}{6}e^{2t}+\dfrac{1}{2}e^{-2t}, \\ y=\dfrac{1}{3}e^{-t}+\dfrac{1}{6}e^{2t}-\dfrac{1}{2}e^{-2t}, \\ z=-\dfrac{1}{3}e^{-t}+\dfrac{1}{3}e^{2t}. \end{cases}$ 4339. $\begin{cases} x=-e^{-t}, \\ y=e^{-t}, \\ z=0. \end{cases}$

4340. Las líneas son $y_1=\dfrac{C_1x^2-C_2}{2x}$ e $y_2=-\dfrac{C_1x^2+C_2}{2x}$. Dadas las condiciones iniciales se obtienen las hipérbolas

$$y_1=\frac{3-x^2}{2x}, \qquad y_2=\frac{3+x^2}{2x}.$$

4341. $y=e^{2x}$. 4342. Línea plana $\begin{cases} x-y+z=0; \\ x=\pm\dfrac{z\ln|z|}{\sqrt{2}}. \end{cases}$

4343. $\begin{cases} x=\dfrac{1}{2}\left[gt^2+(l_1-l_0)\left(1-\cos\dfrac{\pi t}{2T}\right)\right], \\ y=\dfrac{1}{2}\left[gt^2+l_0+l_1+(l_1-l_0)\cos\dfrac{\pi t}{2T}\right]. \end{cases}$

4344. $\begin{cases} x=10\,\mathrm{ch}\,2t-\dfrac{4}{49}\cos 14t+\dfrac{200}{49}, \\ y=10\,\mathrm{ch}\,2t+\dfrac{6}{49}\cos 14s-\dfrac{300}{49}. \end{cases}$

Aquí x es el trayecto del globo más pesado, e y, del globo más ligero.

4345. $A=\dfrac{k\alpha^2}{2k_1}\left[1-\left(\dfrac{1-\beta e^{\alpha kt}}{1+\beta e^{\alpha kt}}\right)^2\right]$. $B=\alpha\dfrac{1-\beta e^{\alpha kt}}{1+\beta e^{\alpha kt}}$, donde $\alpha=\sqrt{B_0^2+\dfrac{2k_1}{k}A_0}$, $\beta=\dfrac{\alpha-B_0}{\alpha+B_0}$.

4346*. Si T es la cantidad del veneno, se tiene $\dfrac{dN}{dt}=aN-bNT$, $\dfrac{dT}{dt}=cN$ y $\dfrac{dN}{dt}=0$ en el momento en que $N=M$.

4347. $h_1=\dfrac{S_1H_1+S_2H_2}{S_1+S_2}+\dfrac{S_2}{S_1+S_2}(H_1-H_2)e^{-\alpha\frac{S_1+S_2}{S_1S_2}}$,

$h_2=\dfrac{S_1H_1+S_2H_2}{S_1+S_2}-\dfrac{S_1}{S_1+S_2}(H_1-H_2)e^{-\alpha\frac{S_1+S_2}{S_1S_2}}$

4348. 1) $\theta-\theta_0+0{,}002(\theta^2-\theta_0^2)=0{,}00008\dfrac{E_1^2t^3}{R_0T^2}$; en 53°;

2) $\theta-\theta_0+0{,}002(\theta^2-\theta_0^2)=\dfrac{6E_0^2}{\pi R_0\cdot 10^7}\cdot(200\pi t-\mathrm{sen}\,200\pi t)$; en 76°.

4349. 1) 44,5°; 2) 46,2°.

4350.

x	1,00	1,05	1,10	1,15	1,20	1,25
y	1,000	1,000	0,997	0,992	0,984	0,973

x	1,30	1,35	1,40	1,45	1,50
y	0,959	0,942	0,923	0,901	0,876

4351. $y|_{x=1} = 3{,}43656\ldots$

y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
2,5	3,16667	3,37500	3,42500	3,43472

Para y_5 el error relativo es del orden 0,1%.

4352. 0,46128; lo mismo de la fórmula de Simpson para $2n = 10$. Todas las cifras son exactas.

4353. $y_4 = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{2x^3}{3} + \frac{7x^4}{12} + \frac{5x^5}{12} + \frac{16x^6}{75} +$ etc; $y_4(0{,}3) \approx 1{,}543$; $f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{2x^3}{3} + \frac{7x^4}{12} + \frac{11x^5}{20} + \frac{22x^6}{45} +$ etc; $f(0{,}3) \approx 1{,}545$. El error es menor que 0,2%. 4354. 0,808.

4355*. 1,001624. El resultado se obtiene de la manera más rápida si la función buscada se busca directamente en forma de una serie de potencias.

4356*. 1,0244. Véase la indicación al ejercicio anterior.

4357. $y = x + \frac{2}{4}x^4 + \frac{2\cdot 5}{7!} + \ldots x^7 + \frac{2\cdot 5 \ldots (3n-1)}{(3n+1)!}x^{3n+1} + \ldots$; $k = 0{,}2297$.

Al capítulo XV

4358. $$\operatorname{sen}^{2k} x = \frac{C_{2k}^k}{2^{2k}} + \frac{(-1)^k}{2^{2k-1}} [\cos 2kx - C_{2k}^1 \cos(2k-2)x + C_{2k}^2 \cos(2k-4)x - \ldots + (-1)^{k-1} C_{2k}^{k-1} \cos 2x];$$

$$\operatorname{sen}^{2k+1} x = \frac{(-1)^k}{2^{2k}} [\operatorname{sen}(2k+1)x - C_{2k+1}^1 \operatorname{sen}(2k-1)x + C_{2k+1}^2 \operatorname{sen}(2k-3)x - \ldots + (-1)^k C_{2k+1}^k \operatorname{sen} x];$$

$$\cos^{2k} x = \frac{C_{2k}^k}{2^{2k}} + \frac{1}{2^{2k-1}} [\cos 2kx + C_{2k}^1 \cos(2k-2)x + C_{2k}^2 \cos(2k-4)x + \ldots + C_{2k}^{k-1} \cos 2k];$$

$$\cos^{2k+1} x = \frac{1}{2^{2k}} [\cos(2k+1)x + C_{2k+1}^1 \cos(2k-1)x + C_{2k+1}^2 \cos(2k-3)x + \ldots + C_{2k+1}^k \cos x].$$

4360. $\cos nx = \cos^n x - C_n^2 \cos^{n-2} x \operatorname{sen}^2 x + C_n^4 \cos^{n-4} x \operatorname{sen}^4 x \ldots$ Como los exponentes del $\operatorname{sen} x$ sólo son números pares, $\cos nx$ es susceptible de ser expresado racionalmente mediante $\cos x$.

4363. 1) $\varphi = \nu \frac{2\pi}{n}$ y $\varphi = \nu \frac{2\pi}{n+1}$, donde $\nu = 0, 1, 2, \ldots, n$;

2) $\varphi = \nu \frac{2\pi}{n}$, donde $\nu = 1, 2, \ldots, n-1$ para n impar, y $\nu =$

$=1, 2, \ldots, n$ para n par, y $\varphi=(2\nu-1)\frac{\pi}{n+1}$, donde $\nu=1, 2, \ldots, n+1$.

4365*. Fijarse en que $\int_0^{2\pi}\Phi_n(\varphi)\,d\varphi=0$. **4366.** Sí.

4371. a) $b_1=b_2=b_3=\ldots=0$ y $a_1=a_3=a_5=\ldots=0$
b) $a_0=a_1=a_2=\ldots=0$ y $b_1=b_3=b_5=\ldots=0$.

4372. $\frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}(2n+1)x}{2n+1}$. **4373.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen} 2nx}{2n}$.

4374. $x=2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\operatorname{sen} nx}{n}\ (-\pi, \pi)$; $\frac{\pi-x}{2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen} nx}{n}\ (0, 2\pi)$.

4375. $\frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2}$.

4376. 1) $\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos nx}{n^2}$;

2) $\frac{4\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}-4\pi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen} nx}{n}$;

$$S_1=\frac{\pi^2}{6},\quad S_2=\frac{\pi^2}{12},\quad S_3=\frac{\pi^2}{8}.$$

4377. $\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left\{\frac{\pi^2}{n}+\frac{2}{n^3}[(-1)^n-1]\right\}\operatorname{sen} nx$.

4378. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{12}{n^3}-\frac{2\pi^2}{n}\right)\operatorname{sen} nx$.

4379. $2+\frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}(2n+1)x}{2n+1}$. **4380.** $\frac{2h}{\pi}\left[\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen} nh}{nh}\cos nx\right]$.

4381. $\frac{2h}{\pi}\left[\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\operatorname{sen} nh}{nh}\right)^2\cos nx\right]$.

4382. $\frac{l}{2}-\frac{4l}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos\left[\frac{(2n+1)\pi x}{l}\right]}{(2n+1)^2}$.

4383. $\frac{e^{2\pi}-1}{\pi}\left[\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\cos nx}{1+n^2}-\frac{n\operatorname{sen} nx}{1+n^2}\right)\right]-1$.

4384. $\dfrac{e^l-e^{-l}}{2l}+l(e^l-e^{-l})\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n\cos\dfrac{n\pi x}{l}}{l^2+n^2\pi^2}+$

$$+\pi(e^l-e^{-l})\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}n\operatorname{sen}\dfrac{n\pi x}{l}}{l^2+n^2\pi^2}=$$

$$=\operatorname{sh} l\left[\frac{1}{l}+2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{l\cos\dfrac{n\pi x}{l}-\pi n\operatorname{sen}\dfrac{n\pi x}{l}}{l^2+n^2\pi^2}\right]$$

4385. $\dfrac{2\operatorname{sen}\pi a}{\pi}\left(\dfrac{1}{2a}+\dfrac{a\cos x}{1-a^2}-\dfrac{a\cos 2x}{2^2-a^2}+\ \ldots\right).$

4386. $\dfrac{2\operatorname{sen}\pi a}{\pi}\left(\dfrac{\operatorname{sen} x}{1-a^2}-\dfrac{2\operatorname{sen} 2x}{2^2-a^2}+\dfrac{3\operatorname{sen} 3x}{3^2-a^2}-\ \ldots\right).$

4387. $\operatorname{sen} ax=\begin{cases}\dfrac{4a}{\pi}\left[\dfrac{\cos x}{a^2-1}+\dfrac{\cos 3x}{a^2-3^2}+\dfrac{\cos 5x}{a^2-5^2}+\ \ldots\right] & (a \text{ es par});\\ \dfrac{4a}{\pi}\left[\dfrac{1}{2a^2}+\dfrac{\cos 2x}{a^2-2^2}+\dfrac{\cos 4x}{a^2-4^2}+\ \ldots\right] & (a \text{ es impar}).\end{cases}$

4388. $\cos ax=\begin{cases}-\dfrac{4}{\pi}\left[\dfrac{\operatorname{sen} x}{a^2-1^2}+\dfrac{3\operatorname{sen} 3x}{a^2-3^2}+\dfrac{5\operatorname{sen} 5x}{a^2-5^2}+\ \ldots\right] & (a \text{ es par});\\ -\dfrac{4}{\pi}\left[\dfrac{2\operatorname{sen} 2x}{a^2-2^2}+\dfrac{4\operatorname{sen} 4x}{a^2-4^2}+\dfrac{6\operatorname{sen} 6x}{a^2-6^2}+\ \ldots\right] & (a \text{ es impar}).\end{cases}$

4389. $\dfrac{2\operatorname{sh} a\pi}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{n}{a^2+n^2}\operatorname{sen} nx.$

4390. $\dfrac{\operatorname{sh}\pi}{\pi}\left[1+2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{\cos nx}{1+n^2}\right];\ \dfrac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1-(-1)^n\operatorname{ch}\pi}{1+n^2}n\operatorname{sen} nx.$

4391. $f(x)=\dfrac{1}{3}+\dfrac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\dfrac{\operatorname{sen}\dfrac{2\pi n}{3}}{n}-\dfrac{3\left(1-\cos\dfrac{2\pi n}{3}\right)}{2\pi n^2}\right]\cos\dfrac{2\pi nx}{3}=$

$$=\frac{1}{3}+\frac{\sqrt{3}}{\pi}\left(\frac{\cos\dfrac{2\pi x}{3}}{1}+\frac{\cos\dfrac{4\pi x}{3}}{2}+\frac{\cos\dfrac{8\pi x}{3}}{4}-\ \ldots\right)-$$

$$-\frac{9}{2\pi^2}\left(\frac{\cos\dfrac{2\pi x}{3}}{1^2}+\frac{\cos\dfrac{4\pi x}{3}}{2^2}+\frac{\cos\dfrac{8\pi x}{4^2}}{4^2}+\ \ldots\right).$$

4392*. $f(x)\frac{\pi}{6}+\frac{3}{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}\frac{n\pi}{3^2}}{n^2}\left(\cos\frac{n\pi}{3}\operatorname{sen}2nx-\operatorname{sen}\frac{n\pi}{3}\cos 2nx\right)=$

$$=\frac{\pi}{6}+\frac{3\sqrt{3}}{8\pi}\left(\frac{\operatorname{sen}2x}{1^2}-\frac{\operatorname{sen}4x}{2^2}+\frac{\operatorname{sen}8x}{4^2}-\frac{\operatorname{sen}10x}{5^2}+\dots\right)-$$
$$-\frac{9}{8\pi}\left(\frac{\cos 2x}{1^2}+\frac{\cos 4x}{2^2}+\frac{\cos 8x}{4^2}+\frac{\cos 10x}{5^2}+\dots\right).$$

Valerse del resultado del ejercicio 4368.

4393*. 1) $f(x)\frac{4}{\pi}\left(\frac{\operatorname{sen}\alpha\cdot\operatorname{sen}x}{1^2}+\frac{\operatorname{sen}3\alpha\cdot\operatorname{sen}3x}{3^2}+\dots\right)$;

2) $f(x)=\frac{\alpha(\pi-\alpha)}{\pi}-\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-\cos 2n\alpha}{n^2}\cos 2nx=$

$$=\frac{\alpha(\pi-\alpha)}{\pi}-\frac{2}{\pi}\left(\frac{\operatorname{sen}^2\alpha\cdot\cos 2x}{1^2}+\frac{\operatorname{sen}^2 2\alpha\cdot\cos 4x}{2^2}+\dots\right).$$

Valerse del resultado del ejercicio 4371.

4394. $\frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}(2n-1)x}{(2n-1)^3}$; $\frac{\pi^3}{32}$.

4395. $\frac{8}{15}\pi^4-48\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos nx}{n^4}$; c) $\frac{7}{720}\pi^4$.

4396*. $\frac{\pi-x}{2}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}nx}{n(n^3+1)}$ (véase el ejercicio 4374).

4397*. $\frac{x}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n-1}{n(n^2+1)}\operatorname{sen}nx$ (véase el ejercicio 4374).

4398*. $\frac{(\pi-x)^2}{4}-\frac{\pi^2}{12}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2-1}{n^2(n^4+1)}\cos nx.$

Derivar la serie y valerse de la solución en el ejercicio 4374 y también de que $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$ (véase el ejercicio 4376).

4399. $\frac{\pi^3}{32}+\frac{\pi}{4}-\frac{\pi x^2}{8}-2\cos x+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}n\frac{\pi}{2}}{n^3(n^2-1)}\cos nx\ \left(-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}\right)$;

valerse de la serie $\frac{\pi}{4}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}\frac{\pi n}{2}}{n}\cos nx$ (véase el ejercicio 4380 para $h=\frac{\pi}{2}$) y de que $\sum\frac{(-1)^{n-1}}{n^3}=\frac{\pi^3}{32}$ (véase el ejercicio 4394).

4400. $f_1(x) \approx 27{,}8 + 6{,}5 \cos x - 0{,}1 \operatorname{sen} x - 3{,}2 \cos 2x + 0{,}1 \operatorname{sen} 2x$;
$f_2(x) \approx 0{,}24 + 0{,}55 \cos x + 0{,}25 \operatorname{sen} x - 0{,}08 \cos 2x - 0{,}13 \operatorname{sen} 2x$;
$f_3(x) \approx 0{,}12 + 1{,}32 \cos x + 0{,}28 \operatorname{sen} x - 0{,}07 \cos 2x + 0{,}46 \operatorname{sen} 2x$

Al capítulo XVI

4401. Son las rectas paralelas al vector $A\{a, b, c\}$: $\frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}$.

4402. Son las circunferencias cuyo centro se encuentra en el origen de coordenadas $x^2 + y^2 = R^2$.

4403. Son las hélices cuyo paso es igual a $\frac{2\pi h}{\omega}$ situadas en los cilindros cuyos ejes coinciden con el eje z: $x = R\cos(\omega t + \alpha)$, $y = R \operatorname{sen}(\omega t + \alpha)$, $z = ht + z_0$, donde R, α y z_0 son constantes arbitrarias.

4404. Son las circunferencias formadas por la intersección de las esferas cuyo centro se halla en el origen de coordenadas, y de los planos paralelos al plano bisector $y - z = 0$: $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $y - z + C = 0$, donde R y C son constantes arbitrarias.

2) Son las circunferencias formadas por la intersección de las esferas cuyo centro se halla en el origen de coordenadas, y de los planos que cortan en los ejes de coordenadas segmentos que son iguales por su valor y por su signo: $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $x + y + z = C$.

3) Son las líneas de intersección de las esferas $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ y de los paraboloides hiperbólicos $zy = Cx$.

4405. $\operatorname{div} \boldsymbol{A} = 3$, $\operatorname{rot} \boldsymbol{A} = 0$.

4406. $\operatorname{div} \boldsymbol{A} = 0$, $\operatorname{rot} \boldsymbol{A} = 2[(y - z)\boldsymbol{i} + (z - x)\boldsymbol{j} + (x - y)\boldsymbol{k}]$.

4407. $\operatorname{div} \boldsymbol{A} = 6xyz$, $\operatorname{rot} \boldsymbol{A} = x(z^2 - y^2)\boldsymbol{i} + y(x^2 - z^2)\boldsymbol{j} + z(y^2 - x^2)\boldsymbol{k}$.

4408. $\operatorname{div} \boldsymbol{A} = 6$, $\operatorname{rot} \boldsymbol{A} = 0$. **4409.** $\operatorname{div} \boldsymbol{A} = 0$, $\operatorname{rot} \boldsymbol{A} = 0$.

4410. $\operatorname{div} \boldsymbol{A} = \frac{k}{r^3}$, donde k es el coeficiente de proporcionalidad, r es la distancia que media entre el punto de aplicación de la fuerza hasta el origen de coordenadas, $\operatorname{rot} \boldsymbol{A} = 0$.

4411. $\operatorname{div} \boldsymbol{A} = 0$, $\operatorname{rot} \boldsymbol{A} = 0$. **4412.** $\operatorname{div} \boldsymbol{A} = 0$, $\operatorname{rot} \boldsymbol{A} = 0$. En los puntos del eje Oz el campo no está definido.

4413. $\operatorname{div} \boldsymbol{A} = -\frac{k}{z\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, donde k es el coeficiente de proporcionalidad. En los puntos del plano Oxy el campo no está definido.

4414. $3\boldsymbol{a}$. **4416.** $\operatorname{div} \boldsymbol{b}(\boldsymbol{ra}) = (\boldsymbol{ab})$, $\operatorname{div} \boldsymbol{r}(\boldsymbol{ra}) = 4(\boldsymbol{ra})$.

4417. 0. **4418.** 1) 0, 2) 0, 3) 0.

4419. $\operatorname{div} \boldsymbol{A} = \frac{2f(r)}{r} + f'(r)$, si el campo es espacial, $\operatorname{div} \boldsymbol{A} = \frac{f(r)}{r} + f'(r)$, si el campo es plano.

4421. $\varphi \operatorname{rot} \boldsymbol{A} + (\operatorname{grad} \varphi \times \boldsymbol{A})$. **4422.** $\frac{\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{r}|}$.

4423. $2\boldsymbol{a}$. **4424.** $2\omega\boldsymbol{n}^\circ$, donde $\boldsymbol{n}^\circ$ es el vector único paralelo al eje de revolución. **4430.** $u = \boldsymbol{Ar} + C$.

4431. $u = -\frac{1}{2}k(x^2 + y^2 + z^2) + C$.

4432. No. 4433. No. 4434. $u=-\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)+C$.

4435. No. 4437. $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$. 4438. $k\delta\ln\frac{\sqrt{(l-x)^2+y^2}+l-x}{\sqrt{(l+x)^2+y^2}-l-x}$.

4439*. $4k(\sqrt{2}-1)$. 4440. $\frac{k\delta\sqrt{a^2+b^2}}{b}\ln\frac{2\pi b+\sqrt{a^2+4\pi^2b^2}}{a}$.

4441. $2k\delta a\ln(1+\sqrt{2})$.

4442. $\frac{2\pi k}{\sqrt{1-h^2}}\arccos h$, si $h<1$, $2\pi k$, si $h=1$.

$\frac{2\pi k}{\sqrt{h^2-1}}\ln(h+\sqrt{h^2-1})$, si $h>1$.

4443*. 1) $2k\pi R\delta\ln\frac{H+\sqrt{H^2+R^2}}{R}$, 2) $4k\pi R\delta\ln\frac{H+\sqrt{H^2+4R^2}}{2R}$.

Dividir el cilindro en dos partes iguales por la sección paralela a la base, y calcular el potencial de la superficie lateral del cilindro como suma de los potenciales de las superficies laterales de las dos mitades aplicando el resultado del punto 1.

4444. $2k\pi R\delta$.

4445*. 1) $k\pi\delta\left[H\sqrt{R^2+H^2}-H^2+R^2\ln\frac{H+\sqrt{R^2+H^2}}{R}\right]$,

2) $\frac{k\pi\delta}{2}\left[H\sqrt{4R^2+H^2}-H^2+4R^2\ln\frac{H+\sqrt{4R^2+H^2}}{2R}\right]$; véase la indicación al ejercicio 4443.

4446. $\pi k\delta H(l-H)$, donde l es la generatriz del cono.

4447. $u=\frac{2}{3}k\frac{\pi R^3\delta}{a}\left[\left(1+\frac{a^2}{R^2}\right)^{\frac{3}{2}}-\left(\frac{a}{R}\right)^3-\frac{3a}{2R}+1\right]$ para $a\geqslant R$;

$u=\frac{2}{3}k\pi a^2\delta\left[\left(1+\frac{R^2}{a^2}\right)^{\frac{3}{2}}-\left(\frac{R}{a}\right)^3+\frac{3}{2}\left(\frac{R}{a}\right)^2-2\right]$ para $a\leqslant R$;

$u=\frac{k\pi R^2\delta}{3}(4\sqrt{2}-3)$ para $a=R$.

4448*. $u=\frac{4k\pi\delta}{3a}(R^3-r^3)=\frac{kM}{a}$ (M es la masa del cuerpo) para $a\geqslant R$;

$u=2k\pi\delta(R^2-r^2)$ para $a\leqslant r$;

$u=\frac{4k\pi\delta}{3a}(a^3-r^3)+2k\pi\delta(R^2-a^2)$

para $r\leqslant a\leqslant R$. Trazar la esfera concéntrica de radio a y aplicar los resultados de los dos primeros casos.

4449. $\frac{kM}{a}\left[1+\frac{2}{7}\left(\frac{R}{a}\right)^2\right]$, donde M es la masa del globo.

* En las respuestas a los ejercicios 4439—4449 k es la constante gravitacional.

4450. El flujo y la circulación son iguales a 0.

4451. El flujo es igual a $2aS$, donde S es el área del dominio limitado por el contorno L. La circulación es igual a 0.

4452. El flujo y la circulación son iguales a 0.

4453. El flujo es igual a $\frac{3}{2}\pi R^4$, la circulación es igual a $2\pi R^2$.

4454. En el caso en que el origen de coordenadas se halla dentro del contorno, el flujo es igual a 2π, en caso contrario el flujo es igual a 0. En ambos casos la circulación es igual a 0.

4455. La circulación es igual a 2π, si el origen de coordenadas se halla dentro del contorno, e igual a 0 fuera del contorno. En ambos casos el flujo es igual a 0.

4456. 2. 4458. $2\pi R^2H$. 4459. πR^2H. 4460. 4π. Calcular el flujo a través de la base del cono y valerse del resultado del ejercicio 4457.

4461. $\frac{3\pi}{16}$. 4462*. $\frac{1}{6}$. Valerse de la fórmula de Ostrogradski y calcular el flujo a través de la base de la pirámide.

4463. $2\pi^2b^2$. 4464. $2\pi\omega R^2$. 4465. $-\pi$. Aplicar el teorema de Stokes tomando la línea de intersección del paraboloide con el plano Oxy como el contorno L.

Suplemento

Tablas de ciertas funciones elementales

1. Funciones trigonométricas

α°	sen α	tg α	ctg α	cos α	
0	0,0000	0,0000	—	1,000	90
1	0175	0175	57,3	1,000	89
2	0349	0349	28,6	0,999	88
3	0523	0524	19,1	999	87
4	0698	0699	14,3	998	86
5	0,0872	0,0875	11,4	0,996	85
6	1045	1051	9,51	995	84
7	1219	1228	8,14	993	83
8	139	141	7,11	990	82
9	156	158	6,31	988	81
10	0,174	0,176	5,67	985	80
11	191	194	5,145	982	79
12	208	213	4,705	978	78
13	225	231	4,331	974	77
14	242	249	4,011	970	76
15	0,259	0,268	3,732	0,966	75
16	276	287	487	961	74
17	292	306	271	956	73
18	309	325	3,078	951	72
19	326	344	2,904	946	71
20	0,342	0,364	2.747	0,940	70
21	358	384	605	934	69
22	375	404	475	927	68
23	391	424	356	921	67
24	407	415	246	914	66
25	0,423	0,466	2,145	0,906	65
26	438	488	2,050	899	64
27	454	510	1,963	891	63
28	469	532	881	883	62
29	485	554	804	875	61
30	0,500	0,577	1,732	0,866	60
31	515	601	664	857	59
32	530	625	600	848	58
33	545	649	540	839	57
34	559	675	483	829	56
35	0,574	0,700	1,428	0,819	55
36	588	727	376	809	54
37	602	754	327	799	53
38	616	781	280	788	52
39	629	810	235	777	51
40	0,643	0,839	1,192	0,766	50
41	656	869	150	755	49
42	669	900	111	743	48
43	682	933	072	731	47
44	695	966	036	719	46
45	0,707	1,000	1,000	0,707	45
	cos α	ctg α	tg α	sen α	α°

α°	α radianes	sen α	tg α
0	0	0,000	0,000
5,73	0,1	0,100	+0,100
11,5	0,2	0,199	+0,203
17,2	0,3	0,296	+0,309
22,9	0.4	0,389	+0,423
28,7	0,5	0,479	+0,546
34,4	0,6	0,565	+0,684
40,1	0,7	0,644	+0,842
45,0	$\frac{\pi}{4}$	0,707	+1,000
45,8	0,8	0,717	+1,030
51,6	0,9	0,783	+1,260
57,3	1,0	0,841	+1,557
63,0	1,1	0,891	+1,965
68,8	1,2	0,932	+2,572
74,5	1,3	0,964	+3,602
80,2	1,4	0,985	+5,798
86,1	1,5	0,997	+14,10
90,0	$\frac{\pi}{2}$	1,000	—
91,7	1,6	1,000	—34,23
97,4	1,7	0,992	—7,697
103,1	1,8	0,974	—4,286
108,9	1,9	0,946	—2,297
114,6	2,0	0,909	—2,185
120,3	2,1	0,863	—1,710
126,1	2,2	0,808	—1,374
131,8	2,3	0,746	—1,119
135,0	$\frac{3\pi}{4}$	0,707	—1,000
137,5	2,4	0,675	—0,916
143,2	2,5	0,598	—0,747
149,0	2,6	0,516	—0,602
154,7	2,7	0,427	—0,473
160,4	2,8	0,335	—0,356
166.2	2,9	0,239	—0,246
171,9	3,0	0,141	—0,143
177,6	3,1	0,042	—0,042
180,0	π	0,000	0,000

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2},\qquad \cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}\,\frac{1}{\sqrt{3}},\qquad \operatorname{ctg}\frac{\pi}{6}=\sqrt{3},$$

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}=\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4}=1.$$

α grados	1	2	3	4	5	6	7	8	9
α radianes	0,017	0,035	0,052	0,070	0,087	0,105	0,122	0,140	0,157

1 radián = 57°17′45″

2. *Funciones hiperbólicas*

x	sh x	ch x	x	sh x	ch x
0	0	1	2,1	4,022	4,144
0,1	0,100	1,005	2,2	4,457	4,568
0,2	0,201	1,002	2,3	4,937	5,037
0,3	0,305	1,045	2,4	5,466	5,557
0,4	0,411	1,081	2,5	6,050	6,132
0,5	0,521	1,128	2,6	6,695	6,769
0,6	0,637	1,185	2,7	7,406	7,474
0,7	0,759	1,255	2,8	8,192	8,253
0,8	0,888	1,337	2,9	9,060	9,115
0,9	1,027	1,433	3,0	10,02	10,07
1,0	1,175	1,543	3,1	11,08	11,12
1,1	1,336	1,669	3,2	12,25	12,29
1,2	1,509	1,811	3,3	13,54	13,58
1,3	1,698	1,971	3,4	14,97	15,00
1,4	1,904	2,151	3,5	16,54	16,57
1,5	2,129	2,352	3,6	18,29	18,31
1,6	2,376	2,578	3,7	20,21	20,24
1,7	2,646	2,828	3,8	22,34	22,36
1,8	2,942	3,107	3,9	24,69	24,71
1,9	3,268	3,418	4,0	27,29	27,31
2,0	3,627	3,762			

Para $x > 4$ se puede considerar que $\operatorname{sh} x \approx \operatorname{ch} x \approx \frac{e^x}{2}$ con exactitud hasta 0,01.

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}; \qquad \operatorname{ch} e = \frac{e^x + e^{-x}}{2};$$

$$e^x = \operatorname{sh} x + \operatorname{ch} x; \qquad e^{xi} = \cos x + i \operatorname{sen} x$$

3. Magnitudes inversas, raíces cuadradas y cúbicas, logaritmos, función exponencial

x	$\frac{1}{x}$	$\sqrt{x}$	$\sqrt{10x}$	$\sqrt[3]{x}$	$\sqrt[3]{10x}$	$\sqrt[3]{100x}$	lg x	ln x	e^x	x
1,0	1,000	1,00	3,16	1,00	2,15	4,64	000	0,000	2,72	1,0
1,1	0,909	05	32	03	22	79	041	095	3,00	1,1
1,2	833	10	46	06	29	93	079	182	3,32	1,2
1,3	769	14	61	09	35	5,07	114	262	3,67	1,3
1,4	714	18	74	12	41	19	146	336	4,06	1,4
1,5	0,667	1,22	3,87	1,14	2,47	5,31	176	0,405	4,48	1,5
1,6	625	26	4,00	17	52	43	204	470	4,95	1,6
1,7	588	30	12	19	57	54	230	530	5,47	1,7
1,8	556	34	24	22	62	65	255	588	6,05	1,8
1,9	526	38	36	24	67	75	279	642	6,69	1,9
2,0	0,500	1,41	4,47	1,26	2,71	5,85	301	0,693	7,39	2,0
2,1	476	45	58	28	76	94	322	742	8,17	2,1
2,2	455	48	69	30	80	6,04	342	788	9,03	2,2
2,3	435	52	80	32	84	13	362	833	9,97	2,3
2,4	417	55	90	34	88	21	380	875	11,0	2,4
2,5	0,400	1,58	5,00	1,36	2,92	6,30	398	0,916	12,2	2,5
2,6	385	61	10	38	96	38	415	956	13,5	2,6
2,7	370	64	20	39	3,00	46	431	993	14,9	2,7
2,8	357	67	29	41	04	54	447	1,030	16,4	2,8
2,9	345	70	39	43	07	62	462	065	18,2	2,9
3,0	0,333	1,73	5,48	1,44	3,11	6,69	477	1,099	20,1	3,0
3,1	323	76	57	46	14	77	491	131	22,2	3,1
3,2	313	79	66	47	17	84	505	163	24,5	3,2
3,3	303	82	74	49	21	91	519	194	27,1	3,3
3,4	294	84	83	50	24	98	531	224	30,0	3,4
3,5	0,286	1,87	5,92	1,52	3,27	7,05	544	1,253	33,1	3,5
3,6	278	90	6,00	53	30	11	556	281	36,6	3,6
3,7	270	92	08	55	33	18	568	308	40,4	3,7
3,8	263	95	16	56	36	24	580	335	44,7	3,8
3,9	256	97	24	57	39	31	591	361	49,4	3,9
4,0	0,250	2,00	6,32	1,59	3,42	7,37	602	1,386	54,6	4,0
4,1	244	02	40	60	45	43	613	411	60,3	4,1
4,2	238	05	48	61	48	49	623	435	66,7	4,2
4,3	233	07	56	63	50	55	633	459	73,7	4,3
4,4	227	10	63	64	53	61	643	482	81,5	4,4
4,5	0,222	2,12	6,71	1,65	3,56	7,66	653	1,504	90,0	4,5
4,6	217	14	78	66	58	72	663	526	99,5	4,6
4,7	213	17	86	68	61	77	672	548	110	4,7

Continuación

x	$\frac{1}{x}$	$\sqrt{x}$	$\sqrt{10x}$	$\sqrt[3]{x}$	$\sqrt[3]{10x}$	$\sqrt[3]{100x}$	lg x	ln x	e^x	x
4,8	208	19	93	69	63	83	681	569	122	4,8
4,9	204	21	7,00	70	66	88	690	589	134	4,9
5,0	0,200	2,24	7,07	1,71	3,68	7,94	699	1,609	148	5,0
5,1	196	26	14	72	71	99	708	629	164	5,1
5,2	192	28	21	73	73	8,04	716	649	181	5,2
5,3	189	30	28	74	76	09	724	668	200	5,3
5,4	185	32	35	75	78	14	732	686	221	5,4
5,5	0,182	2,35	7,42	1,77	3,80	8,19	740	1,705	245	5,5
5,6	179	37	48	78	83	24	748	723	270	5,6
5,7	175	39	55	79	85	29	756	740	299	5,7
5,8	172	41	62	80	87	34	763	758	330	5,8
5,9	169	43	68	81	89	39	771	775	365	5,9
6,0	0,167	2,45	7,75	1,82	3,91	8,43	778	1,792	403	6,0
6,1	164	47	81	83	94	48	785	808	446	6,1
6,2	161	49	87	84	96	53	792	825	493	6,2
6,3	159	51	94	85	98	57	799	841	545	6,3
6,4	156	53	8,00	86	4,00	62	806	856	602	6,4
6,5	0,154	2,55	8,06	1,87	4,02	8,66	813	1,872	665	6,5
6,6	152	57	12	88	04	71	820	887	735	6,6
6,7	149	59	19	89	06	75	826	902	812	6,7
6,8	147	61	25	89	08	79	833	917	898	6,6
6,9	145	63	31	90	10	84	839	932	992	6,9
7,0	0,143	2,65	8,37	1,91	4,12	8,88	845	1,946	1097	7,0
7,1	141	66	43	92	14	92	851	960	1212	7,1
7,2	139	68	49	93	16	96	857	974	1339	7,2
7,3	137	70	54	94	18	9,00	863	988	1480	7,3
7,4	135	72	60	95	20	05	869	2,001	1636	7,4
7,5	0,133	2,74	8,66	1,96	4,22	9,09	875	2,015	1808	7,5
7,6	132	76	72	97	24	13	881	028	1998	7,6
7,7	130	77	77	97	25	17	886	041	2208	7,7
7,8	128	79	83	98	27	21	892	054	2441	7,8
7,9	127	81	89	99	29	24	898	067	2697	7,9
8,0	0,125	2,83	8,94	2,00	4,31	9,28	903	2,079	2981	8,0
8,1	123	85	9,00	01	33	32	908	092	3294	8,1
8,2	122	86	06	02	34	36	914	104	3641	8,2
8,3	120	88	11	02	36	40	919	116	4024	8,3
8,4	119	90	17	03	38	44	924	128	4447	8,4
8,5	0,118	2,92	9,22	2,04	4,40	9,47	929	2,140	4915	8,5
8,6	116	93	27	05	41	51	935	152	5432	8,6

Continuación

x	$\frac{1}{x}$	$\sqrt{x}$	$\sqrt{10x}$	$\sqrt[3]{x}$	$\sqrt[3]{10x}$	$\sqrt[3]{100x}$	$\lg x$	$\ln x$	e^x	x
8,7	115	95	33	06	43	55	940	163	6003	8,7
8,8	114	97	38	06	45	58	944	175	6634	8,8
8,9	112	98	43	07	46	62	949	186	7332	8,9
9,0	0,111	3,00	9,49	2,08	4,48	9,65	954	2,197	8103	9,0
9,1	110	02	54	09	50	69	959	208	8955	9,1
9,2	109	03	59	10	51	73	964	219	9897	9,2
9,3	108	05	64	10	53	76	968	230	10938	9,3
9,4	106	07	69	11	55	80	973	241	12088	9,4
9,5	0,105	3,08	9,75	2,12	4,56	9,83	978	2,251	13360	9,5
9,6	104	10	80	13	58	86	982	262	14765	9,6
9,7	103	11	85	13	59	90	987	272	16318	9,7
9,8	102	13	90	14	61	93	991	282	18034	9,8
9,9	101	15	95	15	63	97	996	293	19930	9,9
10,0	0,100	3,16	10,00	2,15	4,64	10,00	000	2,303	22026	10,0

La columna $\lg x$ contiene mantisas de los logaritmos decimales.
Para hallar logaritmos naturales de los números mayores que 10 y menores que 1, se recurre a la fórmula

$$\ln (x \cdot 10^k) = \ln x + k \ln 10.$$

Notemos que

$$\ln 10 = 2{,}303; \quad \ln 10^2 = 4{,}605;$$
$$\lg x = 0{,}4343 \ln x; \quad \ln x = 2{,}303 \lg x.$$

Fórmulas para extracción aproximada de las raíces:

$$1) \quad \sqrt[n]{1+x} \approx 1 + \frac{x}{n} + \frac{1-n}{2n^2} x^2 \text{ para } |x| < 1.$$

$$2) \quad \sqrt[n]{a^n + b} \approx a \left(1 + \frac{b}{na^n} + \frac{1-n}{2n^2} \cdot \frac{b^2}{a^{2n}}\right) \text{ para } \left|\frac{b}{a^n}\right| < 1.$$

A NUESTROS LECTORES:

«Mir» edita libros soviéticos traducidos al español, inglés, francés, árabe y otros idiomas. Entre ellos figuran las mejores obras de las distintas ramas de la ciencia y la técnica: manuales para los centros de enseñanza superior y escuelas tecnológicas; literatura sobre ciencias naturales y médicas. También se incluyen monografías, libros de divulgación científica y ciencia-ficción.

Dirijan sus opiniones a la Editorial «Mir», 1 Rizhski per., 2, 129820, Moscú, I-110, GSP, URSS.

MALTSEV A.

Fundamentos de álgebra lineal

Los resultados obtenidos por el eminente matemático soviético Anatol Ivánovich Máltsev han influido grandemente en el desarrollo del álgebra moderna. El profesor Máltsev además de gran científico, fue un destacado pedagogo y formó un grupo considerable de científicos soviéticos. Durante los años que trabajó en los centros de enseñanza superior preparó y dictó un gran número de cursos en diferentes ramas del álgebra. El libro que ofrecemos al lector es el resultado de la gran labor realizada por A. I. Máltsev durante la preparación de los cursos de álgebra lineal.

Su primera edición en ruso tuvo una amplia acogida y se agotó rápidamente. En los últimos años de su vida, el autor se propuso una modificación sustancial del libro, pero no pudo realizar sus planes y sólo alcanzó a escribir tres capítulos. Los manuscritos correspondientes fueron preparador para la publicación por un grupo de alumnos de A. I. Máltsev e incluidos en la segunda edición (capítulo 1, 2 y 8) en ruso. Los demás capítulos reproducen casi íntegramente el texto de la edición anterior.

Entre los libros de álgebra lineal existentes, el de A. I. Máltsev se destaca por su originalidad, la plenitud y claridad de la exposición y porque resalta constantemente la conexión que existe entre los objetos que estudia el álgebra lineal (matrices, especios y formas algebráicas). En el último capítulo se exponen los elementos de la teoría de espacios afines multidimensionales, que ha pasado a ocupar uno de los lugares centrales en una rama tan importante de las matemáticas aplicadas como es la teoría de operaciones. El libro es un manual para los estudiantes de especialidades matématicas de las universidades. Además resultará útil para los ingenieros y economistas que trabajan en diferentes ramas de la matemática aplicada y que deseen profundizar sus conocimientos del álgebra lineal.

La obra se reedita a solicitud de los lectores extranjeros.

En el año 1977 salen a la luz los siguientes libros de la serie "Lecciones populares de matemáticas":

BARSOV A.
Qué es programación lineal

BESKIN N.
Representación de figuras espaciales

BOLTIANSKI V.
La envolvente

MARKUSHEVICH A.
Curvas maravillosas
Números complejos y representaciones conformes
Funciones maravillosas

NATANSON I.
Problemas elementales de máximo y mínimo
Suma de cantidades infinitamente pequeñas

TRAJTENBROT B.
Los algoritmos y la solución automática de problemas

ROSENFELD B., SERGEEVA N.
Proyección estereográfica

VENTSEL E.
Elementos de la teoría de los juegos

YAGLOM I.
Algebra extraordinaria